高次群論とその幾何学

— Higher group theory and its geometry —

高村茂　京都大学理学研究科数学教室

2023 年 12 月 20 日

概 要

線形代数は 1 次式の理論で簡明であるが、そこに現れる空間のバリエーションは少ない—直線や平面など「まっすぐな」ものばかりである。これに対し、高次式を扱う代数幾何に移ると、「簡明さ」は失われるものの、多様な空間が現われ、豊かな幾何が広がる。ひるがえって、「古典的な」群論。その対象である “群の元” や “部分群・コセット” は、われわれの観点では 0 次と 1 次であり、「線形代数的な段階」にとどまっているように思える。われわれは、群に対して “高次の対象” を導入する（高次群論への移行)。一見すると、この “高次の対象” は非常に複雑でアナーキーな、とても制御できないものに思える。しかし、それらの「上部構造」を介在させることにより、アンダーコントロールとなる。たとえば、代数幾何の交点理論における「ベズーの定理」の類似を、「上部構造」を使って定式化し示した。

1　高次群論：　背景と動機

数学の発展には二つの方向がある。
深く掘り進めていく「縦」の発展と、
視点を新たに進めていく「横」の発展。
「横」方向へは、概念・記号・用語の体系の
“一体化した創出” が不可欠である。

「高次群論」は著者の “手作り数学” みたいなものなので、「背景」や「動機」あるいは「いきさつ」について尋ねられることが多い。まずはそういったことの説明から始める。なお、高次群論について最初に書いた [Ta1] とは、定式化や用語が違っている部分があることを断っておく。

群論において最も根源的な問いは、群をいかに理解するべきか、である。これはさまざまな観点から考えられてきた。ナイーブなところでは、乗積表。これを書き下すと、群は完全に決まったことになるが、わかった感からはほど遠い。なぜなのだろうか。これは「人間原理」に根ざしていると思われる。たとえば、部屋の中の気体は無数と言っていいぐらいの個数の分子からなるが、これらすべての分子の運動が完全に記述されたとしても—現

実にはありえないが—「気体の状態が完全にわかった！」とハッピーな気分になるかというとそんなことはない。人間が知りたいことはそういったことではなく、もっとマクロな「温度」「圧力」「比熱」などである。群に対しても、われわれが知りたいのは、群の元たちの積（ミクロな相互作用）の情報を与える乗積表ではなく、群から取り出した、もっとマクロな物や量である。

人間にとって "視覚に訴える" 手法は、「理解できた」と感じやすい（これも人間原理）。そのため、群に幾何的対象を対応させて群を理解する方法がいくつか編み出され、研究がなされてきた。素朴なところでは、有限群の部分群たちのハッセ図がある—「空間」を理解するうえで、"部分空間たちがどのように入っているか" が大切なように、群の中に "部分群たちがどのように入っているか" を決定することは大切である。また、離散群や有限群に対しては、ケーレーグラフがある。これらは 1 次元の幾何的対象であるが、高次元空間を対応させるものとしては、群の分類空間や、有限群の部分群たちのなすポセットから作られる単体複体がある（これらには代数トポロジーの手法が使える）。

比較　可換環に対しても、幾何的対象を対応させて理解する方法がある—環付き空間を対応させるスキーム論。しかし、群の場合と違って、これ一強である。可換な環よりも非可換な群の方が多様な幾何的見方ができるのは、その「複雑性」ゆえであろうか。

群をどう理解するかという根源的な問いに対し、先人は—群に幾何的対象を対応させて理解するという路線に限っても—多彩な方法を編み出してきた。そして、それらを起点として群に関する数学が多方向へ伸張していった。私の方法はこれらとは異なり、まず "群の高次構造" なるものを導入し、それをもとに理論を組み立てていく、というものである。まずは、ここに至った経緯から始める。以前、変換群論の研究集会の報告集 [Ta1] に書いた動機を引用する。時は、私の学生時代にさかのぼる。

> 群論の基本事項として、有限群 G の部分群の位数は G の位数 $|G|$ を割り切る、がある（ラグランジュの定理）。このことから、G の真部分群の位数は $|G|/2$ を越えないことがわかる。学生の頃、これを知ったとき不思議な気がした—群論は、部分群を基にして理論を組み立てているが、それはあくまで $|G|/2$ 以下の部分の情報を反映しているだけで、残り半分の情報は打ち捨てられている。これは完全な理論ではないのではないか、と感じたことを憶えている。はたして、$|G|/2$ 以下の部分だけがわかったとして、群が "完全に" わかったと言えるのだろうか。残り半分の部分の情報も取り込んだ、あるいは反映した理論があるのではないか、と当時おぼろげながら思ったものである。*What is going on with the remaining half?* 図 1 参照。それ以来、折に触れてこの問題に立ち返ってきた（本業のリーマン面・代数曲線の族やモジュライ空間の研究 ([Ta6],[Ta8] など) のかたわら）。

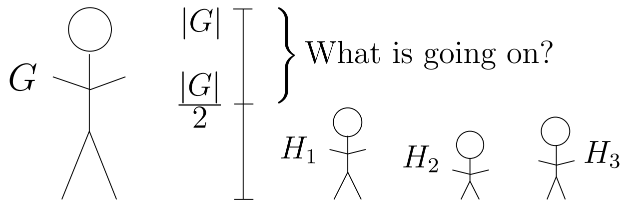

図 1: 真部分群 H_i の位数は高々 $\frac{|G|}{2}$ である．これを越えると群論の “空白地帯” である。

研究の通常モードは、「研究の対象がすでにあり」それについて調べていく、という手順であるが、群の “残り半分の部分” の情報も取り込んだ理論を構想する、というのは非常時モードで「研究の対象となるものが未だない」状態である— 頭の中に、もやもやした “引っかかり” があるだけである。「研究対象の無い研究とはいかに」という禅問答のようでもあるが、学生時代に気になって以来、折に触れてこの問題に立ち返ってきた。そして、**群の「残り半分」を記述するのが、本稿で導入する “群の高次構造” ではないかと思うようになった—哲学的には「線形代数から代数幾何への移行」を念頭に置いている。**線形代数は 1 次の理論であり（内積は 2 次式だが）、そこに現れる空間は、直線、平面、高次元超平面など「まっすぐな」空間ばかりである。一方、代数幾何に現れる空間は曲がっているものも含み、豊かである。もっとも、この豊かさこそ高次の複雑さと表裏一体なのであるが。

われわれの観点では、古典的な群論は低次（2 次以下）の理論である。まず、群 G の元 a は 0 次（スカラー）、部分群 H やコセット aH は 1 次、また両側コセット KaH は 2 次。われわれは、これらを「高次化」した n 次の対象 $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ として、部分群積（**セクト**）$H_1H_2 \cdots H_n$ やコセット積（**クラン**）$a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ を導入する。これらは G の部分集合として次のように与えられる（n をセクトやクランの**次数**あるいは**長さ**という）:

$$\begin{cases} H_1H_2 \cdots H_n := \{h_1h_2 \cdots h_n \,:\, h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}, \\ a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n := \{a_1h_1a_2h_2 \cdots a_nh_n \,:\, h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}. \end{cases}$$

セクトは多項式 $x_1x_2 \cdots x_n$ のアナロジー、クランは多項式 $c_1x_1c_2x_2 \cdots c_nx_n$ （c_i はスカラー) のアナロジーである[1]。 ただし、**多項式と違って、セクトやクランは単なるシンボル（記号）ではなく、（G の部分集合として）内部構造をもつ。それゆえシンボルのような機械的な取扱いができず、新たな発想が求められる。**

[1]余談になるが、以前、著者の所属する教室で配られた冊子 [Ue] の中に上野健爾先生が書かれた、当教室の先達である園正造（そのまさぞう）（可換環のイデアルで先駆的な業績）に関する記事に次の一文があった。われわれの方向性とは “逆向き” であることが興味深い。

> 園が理論を進める上での手引きとしたのは多項式環の理論ではなく、群論であった。
>
> 第 4 章 園正造と京都帝国大学数学教室 p.196

線形代数	古典群論
スカラー (deg 0)	群の元 (deg 0)
一次式 (deg 1)	部分群, コセット (deg 1)
内積 (deg 2)	両側コセット (deg 2)
代数幾何	**高次群論**
高次式 (deg n)	セクト, クラン (deg n)

先に進む前に、セクトが群の中にどのように分布しているかを、二面体群 D_4（位数は 8) の場合にハッセ図で表しておこう（図 2)。セクトが非常にたくさんあることが一目瞭然である。位数が $\frac{|D_8|}{2}$ $(=4)$ を越えるものがたくさんあることに注意。

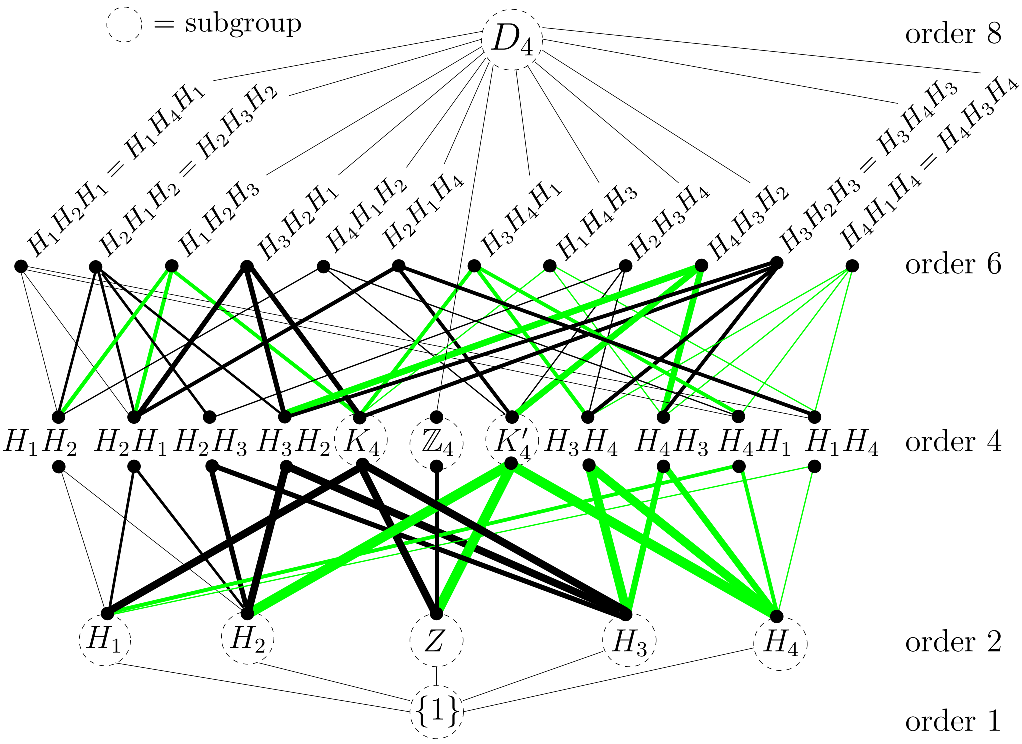

図 2: D_4 のセクト･ポセットのハッセ図：Z $(\cong \mathbb{Z}_2)$ は D_4 の中心, H_1, H_2, H_3, H_4 はそれ以外の $\mathbb{Z}_2$ であり, K_4 と K_4' はクライン四元群 $(\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. 注：スペースの都合上 K_4 や K_4' を分解するセクトは描いていない。これらは $K_4 = H_1H_3 = H_3H_1 = ZH_1 = H_1Z = ZH_3 = H_3Z$ および $K_4' = H_2H_4 = H_4H_2 = ZH_2 = H_2Z = ZH_4 = H_4Z$.

さて、セクトやクランを定義したものの、研究対象が「できた」だけである。定義しただけでは、「だから何？」「意味があるの？」となってしまう。したがって、そこから先は「どのような視点でこれらを描写すべきか」ということを熟考しなければならない。

一般に、群の位数が大きくなると、“群の高次構造” であるセクトやクランを具体的に書き下そうとすると多大な計算を要する。とくに、非可換群の場合、セクトやクランの次数が大きいと、非可換性が激しく効いて具体的に計算するのは急速に困難になる。それゆえ、具体例を計算して理論の方向性を探るというアプローチが取りづらい（このことが、今までセクトやクランなどが考えられてこなかった大きな要因と思われる）。次は物理学書からの引用であるが、身につまされる。

> 数式を使うだけでは物理学ではなく、物理学としての考察に耐える内容があるかどうかを常に注意しなくてはならない。とくに、恣意的なモデルを用いて何かを説明しようとする場合、どの点が物理学的な普遍性をもつのかについては十分考察すべきである。対象の複雑さをよいことに、ただ自分の意見を述べているだけの ‘理論’ にならないように気をつけなくてはならない。
>
> 宮下精二　『相転移・臨界現象』 p.85　岩波書店（2002 年）

2　第一着手点をどう取るか—上部構造の導入

【群の中のミクロとマクロの相互作用】
群は、あたかも気体のようである
その元たちは気体の中を飛び交う粒子
元たちの積は、粒子の相互作用
部分群は部分気体であり、
セクトは部分気体たちの相互作用

セクトやクランの「非情な」複雑さのため、これらを “理解する” ための第一着手点をどう取るか判然とせず、そもそもセクトやクランを記述する一般的な理論なんてあるのか、などと思うときもあり、スタート台に立つ前の段階に長らくとどまっていた。されど、次の問題意識は常に頭にあった：

(I) **群論における「代数幾何的なフレームワーク」はどうあるべきか。**ここでいう代数幾何は、古典的な代数幾何ではなく、セールやグロタンディーク以降の現代的な代数幾何（つまりスキーム論）であり、そこでは代数多様体の上の “上部構造”（層）が活躍する [EGA1], [EiHa]。群論においても “上部構造” にあたるものを定義し、それをテコに理論を展開できないか。

(II) **群論において「ミクロな相互作用」（元たちの積）と「マクロな相互作用」（部分群たちの積、コセットたちの積）を “一体的に” 理解する枠組みを構築すること。**統計力学では、「分子たちのあいだのミクロな相互作用」と「気体たちのあいだのマクロな相互作用」を結びつけて諸法則を演繹する。群においても「ミクロな相互作用

（群の元たちの積）」と「マクロな相互作用（部分群たちの積、コセットたちの積）」を結びつけて新たな「諸法則」を見出せないか[2]。

(I) と (II) の両方の要求を満たすのが、あとで導入するシナジーやテラジーである。

先に進む前に (I) に関してコメントしておく。群の部分群に比するものとして、（代数幾何サイドでは）可換環のイデアルがある。周知のように、可換環論のイデアル論は高度に発展している。これには、イデアルが積に関して「閉じて」いることが効いている。つまり、イデアル I と J の積 IJ はイデアルになる。一方、部分群 H と K の積 HK は一般に部分群ではない。つまり部分群は積に関して閉じていない。ここで、HK は長さ 2 のセクトであることに注意。一般に、n が大きくなるとセクト $H_1H_2\cdots H_n$ は急激に複雑化し、部分群からかけ離れていく。したがって、今までの群論ではセクトはうまく描写できない。また、セクトそのものだけを見ていても、セクトを記述する「一般論」が背後にあるかどうか見当もつかない。そこで、われわれは**群の高次構造の「上部構造」である “シナジー” を導入し、“幾何学化” する**—代数的な問題を幾何的に言い換える。

定義 2.1. セクト $H_1H_2\cdots H_n$ に対し、その**シナジー** (synergy) を次で定義する：

$$\pi\colon H_1\times H_2\times\cdots\times H_n\longrightarrow H_1H_2\cdots H_n,\qquad \pi(h_1,h_2,\dots,h_n):=h_1h_2\cdots h_n. \tag{2.1}$$

ここで、‘全空間’$H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ は直積なので、シナジーは「自明なベクトル束」の類似物に見えてしまい、簡単なものかと誤解されそうであるが、断じてそうではない。実際、写像 π は一般に非常に複雑で、その複雑さは ‘底空間’ のセクト $H_1H_2\cdots H_n$ の複雑さを反映している—「代数的複雑さ」が「幾何的複雑さ」に翻訳される。また、π のファイバー $\pi^{-1}(x)$ $(x\in H_1H_2\cdots H_n)$ 自体も複雑で、しかも x を動かすと、複雑な挙動をする。

> **基本哲学：** $x\in H_1H_2\cdots H_n$ をパラメータとみなし、$\pi^{-1}(x)$ を “族”(family) のようにみなす—あたかも代数幾何における「代数多様体の族」のように。この観点からシナジーのファイバーを精緻に研究することが、セクトの研究の「幾何学化」の重要な側面である。

用心 2.2. 群 G の部分群 $H_1,H_2,\dots,H_n$ に対するシナジー $\pi : H_1\times H_2\times\cdots\times H_n\to H_1H_2\cdots H_n$ は、$H_1,H_2,\dots,H_n$ の群構造だけからは定まらない。$H_1,H_2,\dots,H_n$ の G の

[2]念頭にあるのは次のこと： 自然は階層性をもち、どんどん細かく細分していったとき、行き着くところは素粒子である。古典力学から量子力学、さらに素粒子論へのパラダイムの移り変わりが示すように、階層ごとにそれを支配する「法則」は異なっている—新たな階層にシフトすると、それまでの「法則」が成り立たなくなり、新たな「法則」を探求することになる。**われわれの場合も、群の高次構造という新たな「階層」を考えるので、それを支配する「法則」は新たなものになるだろうということが予期される。**

中への入り方—いかに埋め込まれているか—に依存する。もし $H_1, H_2, \ldots, H_n$ が別の群 G' の部分群にもなっている場合、それに対するシナジー $\pi' : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \to H_1 H_2 \cdots H_n$ は、一般に π とは異なる。つまり、シナジーは、$H_1, H_2, \ldots, H_n$ の内部構造だけでなく、外部構造 (G への埋め込まれ方) を反映している。

上の (II) で提唱した、群におけるマクロな相互作用とミクロな相互作用の観点に即して言うと、

(a) シナジーは、部分群 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ の**マクロな（順序付き）相互作用** $H_1 H_2 \cdots H_n$ を与えている。注：$H_1 H_2 \cdots H_n$ の順序を並べ替えると、一般に異なるセクトになる。$n = 2$ のときでさえ、一般に $H_1 H_2 \neq H_2 H_1$ である。

(b) シナジーの各ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は**ミクロな（順序付き）相互作用**を与えている：$\pi^{-1}(x)$ は $x = h_1 h_2 \cdots h_n$ をみたす $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ からなり、$h_1 h_2 \cdots h_n$ は $h_1, h_2, \ldots, h_n$ のミクロな（順序付き）相互作用を与えている。

補足 2.3. 群論的に言うと、上の (b) の $x = h_1 h_2 \cdots h_n$ は「x の表示」である。したがって、シナジーのファイバー $\pi^{-1}(x)$ は、x の表示からなるものとみなせる。**ファイバーという幾何的な対象が、代数的な意味をもっているのである。**これもシナジーの利点である。

さて、セクトのシナジーと同様に、クラン $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ に対して、そのシナジーを次のように定める：

$$\begin{aligned} \pi :\ & a_1 H_1 \times a_2 H_2 \times \cdots \times a_n H_n \longrightarrow a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n, \\ & \pi(a_1 h_1, a_2 h_2, \ldots, a_n h_n) := a_1 h_1 a_2 h_2 \cdots a_n h_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

実は、クランにはこれ以外にも上部構造がある。構成をはっきりさせるため、コセット $a_i H_i$ を C_i と書き、$a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ を $C_1 C_2 \cdots C_n$ と書くことにする（代表元フリーな表示)。各コセット C_i から改めて代表元 $r_i \in C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を選び、$C_1 C_2 \cdots C_n$ の「プラズマ状態」（ばらけた状態）を考える：

$$\{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n. \tag{2.3}$$

このとき、クランのもう一つの上部構造である**テラジー**[3] (telergy：遠隔相互作用) を次で定める：

$$\begin{aligned} \eta :\ & \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n \longrightarrow r_1 H_1 r_2 H_2 \cdots r_n H_n, \\ & \eta(r_1, h_1, r_2, h_2, \ldots, r_n, h_n) = r_1 h_1 r_2 h_2 \cdots r_n h_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

[3]名称の由来： 図式的には、テラジーはシナジー π の上方に位置し ((2.7) 参照)、クランから遠隔なため。

ここで、$r_iH_i = C_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ ゆえ

$$r_1H_1r_2H_2\cdots r_nH_n = C_1C_2\cdots C_n. \tag{2.5}$$

したがって、テラジーは次のようにも思える：

$$\eta\colon \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n \longrightarrow C_1C_2\cdots C_n. \tag{2.6}$$

補足 2.4. 上の表記を使うと、クラン $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ のシナジーは $\pi\colon C_1\times C_2\times\cdots\times C_n \to C_1C_2\cdots C_n$ であり、クランに対しただ一つ定まる。一方、テラジーは（コセット C_i の代表元 r_i の取り方がいろいろあるので）クランに対し一つには定まらない。

さて、テラジーは、クラン・シナジー π を使って、次のように合成写像で表される：

$$\begin{aligned}\eta\colon \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n & \\ \xrightarrow{\nu} r_1H_1 \times r_2H_2 \times \cdots \times r_nH_n = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n & \\ \xrightarrow{\pi} C_1C_2\cdots C_n. &\end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし、$\nu(r_1, h_1, r_2, h_2, \dots, r_n, h_n) = (r_1h_1, r_2h_2, \dots, r_nh_n)$.

先に進む前に、ワンフレーズ的に言っておくと、

> シナジーは部分群やコセットのあいだの相互作用を記述し、
> テラジーはコセットを細分したもののあいだの相互作用を記述する。

強調しておくと、シナジーやテラジーは古典的な群論では定義されず、群の高次構造を考えて初めて定義される—**古典群論と高次群論をわかつ分水嶺**である。これらは非常にシンプルな概念であるが、シンプルであるがゆえに、潜在力（ポテンシャル）を秘めていると思われる。

さて、いったん「上部構造」を導入したあとは、それを経由して背後にある幾何を浮き彫りにするという方針が立つ。

群の世界で、高次へ「移行」したとき、どういう幾何が現れるだろうか？

代数幾何と高次群論のあいだには、たとえばセクトに対しては次のような対照がある（というより、この対照を初期の指導原理にしていた）：

代数幾何	高次群論
代数多様体 X	セクト $H_1H_2\cdots H_n$
構造層 $\mathcal{O}_X \to X$	シナジー $\pi\colon H_1\times H_2\times\cdots\times H_n \to H_1H_2\cdots H_n$
層 $\mathcal{O}_X$ の分解	シナジー π の縮約への分解 (縮約列)。下の補足 2.5 参照
コホモロジー	組み合わせ的公式
オイラー数 $\chi(X)$	位数積 $\|H_1\|\|H_2\|\cdots\|H_n\|$

補足 2.5. シナジーは縮約（contraction）のさまざまな列として表される。たとえば、$n=4$ の場合、縮約図式 (2.8) において、一番上にある $H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4$ と一番下にある $H_1H_2H_3H_4$ を結ぶ経路が、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4 \to H_1H_2H_3H_4$ の縮約への分解に対応している。

$$
\begin{tikzcd}
 & H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H_1H_2 \times H_3 \times H_4 \arrow[d] \arrow[dr] & H_1 \times H_2H_3 \times H_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & H_1 \times H_2 \times H_3H_4 \arrow[dl] \arrow[d] \\
H_1H_2H_3 \times H_4 \arrow[dr] & H_1H_2 \times H_3H_4 \arrow[d] & H_1 \times H_2H_3H_4 \arrow[dl] \\
 & H_1H_2H_3H_4. &
\end{tikzcd}
\tag{2.8}
$$

3　ギルドとその交点公式（ベズー型定理）

思い出しておくと、クランはコセット積 $a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ である。クランが**モニック**とは、$H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ の形のとき。つまり $a_1 = e$（単位元）のとき。任意のクランはモニックとみなせることに注意。実際、$a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ を $H_0a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ (ここで $H_0 = \{e\}$ は単位部分群) とみなせばよい。（したがって、モニックなクランだけを考えても、実は一般性を失わない。）

さて、セクト $H_1H_2 \cdots H_n$ やクラン $a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ は、その複雑さもさることながら、その記号自体も長たらしいので、思考を進める際に見通しが悪くなりがちである。これを remedy するために「ギルド」という概念を導入する。セクトやクランは群 G の部分集合であるが、ギルドはより一般的な部分集合である：

定義 3.1. **ギルド** (guild) とは、次の形をした群 G の部分集合のことである：

(3.1)
$$HAK = \{hak : h \in H, a \in A, k \in K\},$$
ここで、H と K は G の部分群, 一方、A は G の “任意の” 部分集合。

セクトやモニックなクランはギルドの特別な場合である。実際、

(i) セクト $H_1H_2 \cdots H_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := H_2H_3 \cdots H_{n-1}, \quad K := H_n$$

と取ると、ギルド HAK はセクトである。

(ii) モニック・クラン $H_1a_2H_2a_3H_3 \cdots a_nH_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := a_2H_2a_3H_3 \cdots a_{n-1}H_{n-1}a_n, \quad K := H_n$$

と取ると、ギルド HAK はモニック・クランである。

(iii) 一般のクラン $a_1H_1a_2H_2a_3H_3\cdots a_nH_n$ に対しては、まずこれをモニックなクラン $H_0a_1H_1a_2H_2a_3H_3\cdots a_nH_n$ (ここで $H_0 := \{e\}$ は単位部分群) とみなすと、(ii) のようにギルドとみなせる。

(iii) より、$\{G$ のクランたち $\} \subset \{G$ のギルドたち $\}$. したがって、次の包含関係が成り立つ：

$$(\sharp) \qquad \{G \text{ のセクトたち }\} \subset \{G \text{ のクランたち }\} \subset \{G \text{ のギルドたち }\}.$$

用心 3.2. ($\sharp$) より、ギルドに対して成り立つことは自動的にセクトやクランに対し成り立つ。よって、ギルドだけ調べればよいように思えるが、そうではない。**ギルドでは成り立たないが、セクトやクランに対し成り立つ「固有の」性質や公式もある。**

ギルドの持つ著しい特徴は、両側作用（biaction）を持つことである：

$$\begin{aligned} &H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K: \quad \text{ここで } u \in H, v \in K \text{ に対し、} \\ &hak \in HAK \longmapsto u \cdot hak \cdot v := (uh)a(kv) \in HAK. \end{aligned} \tag{3.2}$$

この両側作用による軌道分解は、ギルドの**両側コセット分解**を与える：

$$HAK = \coprod_{i \in I} Ha^{(i)}K, \quad (a^{(i)} \in A). \tag{3.3}$$

一方、分解 $H \times A \times K = \coprod_{b \in A} H \times \{b\} \times K$ を $H \times A \times K$ の**サテライト分解**といい、各 $H \times \{b\} \times K$ を**サテライト**という。

次に、**ギルド・シナジー**を次で定義する：

$$\psi : H \times A \times K \to HAK, \quad (h, a, k) \mapsto hak. \tag{3.4}$$

定義 3.3. ギルド HAK の両側コセット分解を $HAK = \coprod_{i \in I} Ha^{(i)}K$ とする。このとき、各両側コセット $Ha^{(i)}K$ に対し、次のように定める：

(1) サテライト $H \times \{b\} \times K$ が両側コセット $Ha^{(i)}K$ の**上にある**とは、$\psi : H \times A \times K \to HAK$ が $H \times \{b\} \times K$ を $Ha^{(i)}K$ にうつすとき。つまり $HbK = Ha^{(i)}K$ のとき。

(2) ギルド HAK が有限のとき、$Ha^{(i)}K$ の上にあるサテライトの個数を $s^{(i)}$ と記し、$Ha^{(i)}K$ の**サテライト指数**という（ギルドの有限性より、サテライトの個数は有限個、したがってサテライト指数も有限である）。

(3) 任意の $x \in Ha^{(i)}K$ に対し、(2) の $s^{(i)}$ を x のサテライト指数ともいう。

(3) にもとづいて次を導入する：

定義 3.4. すべての $x \in Ha^{(i)}K$ に対するサテライト指数の総計 $m^{(i)} := s^{(i)}|Ha^{(i)}K|$ を $Ha^{(i)}K$ の**重複度**という。

次は [Ta3] の主結果のひとつである—**意外なことに、（可換とはほど遠い）群の世界でも、代数幾何のベズーの定理の類似物が成り立つ**：

交点公式　有限ギルド HAK に対し、次が成り立つ：

$$|H||A||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)}|H \cap K^{a^{(i)}}|. \quad \text{ここで } K^{a^{(i)}} := a^{(i)}K{a^{(i)}}^{-1}. \tag{3.5}$$

証明は、ファイバーの元の個数の数え上げによる。詳しくは [Ta3] 参照。強調しておくと、**この交点公式は、上部構造（シナジー）を使ってはじめて定義される**。これは、上部構造の導入が本質的であることをものがたっている。

代数幾何のベズーの定理との比較　複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の中の平面代数曲線 C と D を考える。これらはそれぞれ多項式 f および g の零点集合とし、$\deg C$, $\deg D$ は f, g の次数を表すとする。このとき、$\deg C \deg D$ は交点集合 $C \cap D$ にわたって、各交点ごとの「交差重複度」を足し上げたものに等しい (ベズーの定理; [EiHa] p.140). これを少し書き換える。まず、ここに現れる交差重複度の集合を $\{m_i,\, i = 1, 2, \ldots, l\}$ とする。各 m_i に対し、交差重複度が m_i に等しい交点全体の集合を $(C \cap D)_i$ と書くことにし、その個数を $|(C \cap D)_i|$ と表す。このとき、

ベズーの定理　$\displaystyle \deg C \deg D = \sum_{i=1}^{l} m_i |(C \cap D)_i|.$

われわれの交点公式 (3.5) はこれに似ている—“ベズー型” 定理。

代数幾何	高次群論
$\mathbb{P}^2$: 複素射影平面	HAK: G のギルド
$C, D \subset \mathbb{P}^2$: 平面代数曲線	$H, K \subset HAK$: G の部分群
$(C \cap D)_i$,　交差重複度 m_i	$H \cap K^{a^{(i)}}$,　重複度 $m^{(i)}$
$\deg C, \deg D$	$\|H\|, \|K\|$
ベズーの定理 $\displaystyle \deg C \deg D = \sum_{i=1}^{l} m_i \|(C \cap D)_i\|$	交点公式 $\displaystyle \|H\|\|A\|\|K\| = \sum_{i \in I} m^{(i)} \|H \cap K^{a^{(i)}}\|$

ここで、C と D の “ambient space” $\mathbb{P}^2$ は C と D によらないが、H と K の “ambient space” HAK は A に依存することに注意。このことから、$|A|$ や $a^{(i)} \in A$ がわれわれの交点公式に現れるのはもっともである。

補足 3.5. 素朴な疑問として、可換な世界（可換環論）と非可換な世界（高次群論）で、なぜ共通の「ベズー（型）の定理」が成り立つのだろうか。根源的な理由があるのだろうか。

交点公式の特殊化

有限ギルド HAK の真ん中の部分 A が 1 点集合 $A = \{a\}$ $(a \in G)$ のときは、HAK は両側コセット HaK である。これの両側コセット分解は自明、つまり自分自身であり、その重複度は $|HaK|$ である。また、$|A| = |\{a\}| = 1$ に注意すると、交点公式 (3.5) は $|H||K| = |HaK||H \cap K^a|$ となる。つまり、

$$|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K^a|}. \tag{3.6}$$

これは両側コセット HaK の位数の古典的な公式にほかならない。

交点公式 (3.5) は一般のセクトやクランへ適用可能である (もちろん、以下に現れる I, $m^{(i)}$, $a^{(i)}$ はセクトやクランに依存する):

(i) 有限セクト $H_1H_2 \cdots H_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := H_2H_3 \cdots H_{n-1}, \quad K := H_n \quad (\text{ただし、} n = 2 \text{ の場合は } A = \{e\})$$

と取り、HAK に交点公式 (3.5) を適用すると、

$$|H_1||H_2H_3 \cdots H_{n-1}||H_n| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \tag{3.7}$$

(ii) 有限モニッククラン $H_1a_2H_2a_3H_3 \cdots a_{n-1}H_{n-1}a_nH_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := a_2H_2a_3H_3 \cdots a_{n-1}H_{n-1}a_n, \quad K := H_n$$

と取り、HAK に交点公式 (3.5) を適用すると、

$$|H_1||a_2H_2a_3H_3 \cdots a_{n-1}H_{n-1}a_n||H_n| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \tag{3.8}$$

一般の有限クラン $a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$ に対しては、有限モニッククラン $H_0a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n$（ただし、$H_0 := \{e\}$ は単位部分群）とみなしてから、上のように (3.5) を適用すればよい。

その他の公式など　セクトやクランに対し、上で述べた公式 (3.7) や (3.8) は「ギルドの交点公式」から導かれたものである。しかし、これら以外にも（ギルドの交点公式からは導かれない）セクトやクランに “固有の” 公式もある。[Ta3] 参照。

なお、セクトは、本稿で説明する以外にも「使い道」がある。[Ta2] において、「群の素因子分解」の理論を展開した。群 G のセクトへの分解 $G = H_1H_2 \cdots H_n$ のうち、それ以上分解できないものを素因子分解という。任意の有限群が（高々有限通りの）素因子分解

をもつことや、素因子分解が一意的である有限群の分類定理などを示した。なお、われわれとは違う文脈ではあるが—次ページの引用参照—、秋月康夫[4]は「有限群論は非可換初等整数論だ」と喝破している [AMM] p.10。

4　最後に

群の高次構造から、群の新たな知見が得られるのか？と尋ねられることがよくある。[Ta1] の p.102 に書いたように、次のように考えている。

> 代数幾何（高次式）は線形代数（1 次式）の延長上にあるが、だからと言って代数幾何の研究から「線形代数の新たな知見を得る」という動機で研究する人はまずいないと思う。問題意識もまったく別であるし、方法論も違うのは周知の通り。**私見では、古典的な群論とは別に、群の高次構造の世界—高次群論 (higher group theory)—が広がっており（両者は深く関係はするが）、後者は後者として独立した興味の対象でよいのではないかと思っている。**

高次群論は、高次構造を導入したことにより、古典群論よりも格段に複雑になるが、そのぶん「自由度」が増す—高次構造を使っていろいろな試行錯誤ができる。また、群の元たちのミクロな相互作用（元たちの積）だけでなく、マクロな相互作用（部分群たちやコセットたちの積）をも同時に考えるので、一種の「気体運動的な」視座をもたらす。さらに、これ以外の動的な側面もある。たとえば、縮約図式 (2.8) にあるような “つぎつぎにつぶしていく” 操作（縮約）を考えることができる。「縮約列」はさまざまな経路を取るので、幾何的な情報や組み合わせ的な情報をいろいろと含んでいる（これに対し、古典群論における「組成列」はつねに一直線状）。文脈は違うが、縮約は代数幾何のブローダウンに相通じるものがある—これは代数幾何に「動的」な視座をもたらした。次を強調しておきたい：

高次群論は動的群論でもある。

振り返ってみると歴史的には、群は動的な「作用」（変換）として創（はじ）まった。ただし、これは「外へ向かって」動的ということである。高次群論の立場では、群は「内部でも」動的なのである。

一般に、理論に「動的な」（運動学的な、と言ってもよい）要素を加えると、理論が豊かになる。物理学においても、静的なものの性質を調べるよりむしろ、動きをいかに記述するか、が先行して発展してきた。これは、古典力学でも、統計力学でも、量子力学でも

---

[4] わが国の可換環論・代数幾何学の先駆者であるが、彼の師匠の園正造（そのまさぞう）は、群論から得た着想（群の正規鎖とイデアルの減少列のアナロジー）でイデアル論の先駆的仕事を行っている [Ue] p.196。このことを鑑みると、秋月のこの発言は自然である。なお、秋月は、有限群はどちらかというと代数とは思っていなくて、むしろ整数論、とも述べている [AMM] p.4。

そうである。そして“動的なもの”に対する知見を使って、“静的なもの”を理解するのである。これを高次群論でも期待しつつ、最後に次を引用してペンを置くことにする（傍点引用者)。

> 数学の理論の価値は、役に立たん、役に立つということじゃなくて、そこに立派な理論といいますか、作品ができるかどうかということが、決定的な点じゃないか。そのためには、対象が相当豊富な構造を持ってないといけないと思う。どうもそういう点からいうと、グループなんてのは、やっぱり非常に意味があると思う。だから、有限群論なんていうのは、やっぱりわれわれ人間に住みついたものである。だから有限群論は、克服しなきゃならないものだ。そういう点で、ぼくは有限群論なんていうのは、非可換初等整数論だと思う。
>
> 秋月康夫 [AMM] p.10

参考文献

[AMM] 秋月康夫, 松浦重武, 松村英之, “座談会　代数学の歩み　その進歩・発展の原動力は何か？”,　現代数学　昭和 47 年 12 月号臨時増刊 代数入門, p.3–11

[EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Springer-Verlag (1999)

[EGA1] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas,* Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 4 (1960), p.5–228 `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0.pdf`

[HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups,* Int. J. Group Theory 13 (2) (2024), 133-160

[HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups,* Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367

[HiTa2] ______, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball,* J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233

[Ta1] S. Takamura, “群の高次構造とその同伴ファイブレーション”, 研究集会 変換群の幾何とトポロジー (2023 年 6 月), 数理研講究録 (2024) p.94–117

[Ta2] ______, *Prime factorizations of finite groups, I, II, and III,* (2023), to appear from Advances in Group Theory and Applications

[Ta3] ______, *Higher group theory and Bézout type theorem,* Preprint (2024)

[Ta4] ———, *Blowdown maps between subgroup posets,* Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499

[Ta5] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams,* Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897

[Ta6] ———, *Linearization of quotient families,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389

[Ta7] ———, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese)*,* Symposium on topology of manifolds (2014) `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf`

[Ta8] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III,* (*Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*)*,* Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)

[Ta9] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, I,* (*Splitting criteria via configurations of singular fibers*)*,* J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145

[Ue] 上野健爾, “園正造と京都帝国大学数学教室”, 『京都大学理学研究科数学教室所蔵の貴重書と数学の歴史』(2009 年 3 月), 第 4 章 p.191–199