Block designs from signed graphs with few distinct eigenvalues

防衛大学校　須田庄 (Sho Suda)
National Defense Academy

1　はじめに

Gunderson-Semeraro [3, Theorem 11] において、Paley tournament $T=(V,A)$ に頂点 $x\notin V$ を加え、x から V のすべての要素に向かうような有向辺を加えて得られる tournament に対して、diamond と呼ばれる頂点集合の 4 点からなる部分集合全体が 3-デザインとなることが示された。この結果は [1] において、歪対称アダマール行列の 4×4 主部分行列式が 9 であるような行・列に対応する 4 点部分集合が 3 デザインとなることに拡張された。本講究録では、行列の主部分行列式が指定した値をとるような行・列に対応する k 点部分集合が t-デザインとなるための条件を考察し、対称・歪対称 conference matrix から 3 デザインが得られることを示す。本研究は Gary Greaves 氏 (Nanyang Technological University) との共同研究である。証明の詳細については [5] を参照されたい。

2　t-(v,k,λ) デザイン

t, v, k, λ を正整数とする。A t-(v,k,λ) **デザイン**とは、 v 点集合 $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}$ の k 点部分集合族 $\mathfrak{B}$（この要素をブロックという）の組 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ であって、 $\mathfrak{X}$ の任意の t 点を含むようなブロックの個数が常に定数 λ に等しいときをいう。

位数 v の正方行列 A と実数 a に対して、以下のように $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}$ の k 点部分集合族 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_A(v,k,a)$ を定める：$\mathfrak{X}=\{1,\dots,v\}$ とし、

$$\mathfrak{B}_A(v,k,a) := \{\{1,\dots,v\} \text{ の } k \text{ 点部分集合で、それに対応する行列 } A \text{ の主部分行列式が } a \text{ と等しいもの}\}.$$

以下、組 $\mathfrak{H}_A(v,k,a):=(\{1,\dots,v\},\mathfrak{B}_A(v,k,a))$ を考察する。$[v]=\{1,\dots,v\}$, $\binom{[v]}{k}=\{\alpha\subset[v] \;:\; |\alpha|=k\}$ と定める。A を $v\times v$ 行列とし、行と列が $[v]$ の要素で添え字づ

けられているとする。部分集合 $\alpha \subset [v]$ に対して、$A[\alpha]$ を α の要素に対応する A の主部分行列とする。α の $[v]$ における補集合を $\overline{\alpha} = [v] \setminus \alpha$ と記す。位数が n の正方行列 I_n を単位行列とする。位数が文脈から明らかなときは I と記す。

集合 $D_A(k)$ を A の $k \times k$ 主部分行列式全体がなす集合とする:

$$D_A(k) := \left\{ \det(A[\alpha]) \ : \ \alpha \in \binom{[v]}{k} \right\}.$$

$v \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, v\}$, $a \in D_A(k)$ に対して、$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_A(v, k, a)$ であった。$\beta \subset [v]$ に対して、 $\lambda_{\mathfrak{B}}(\beta), \mu_{\mathfrak{B}}(\beta)$ を

$$\lambda_{\mathfrak{B}}(\beta) := |\{\alpha \in \mathfrak{B} \ : \ \beta \subset \alpha\}|,$$
$$\mu_{\mathfrak{B}}(\beta) := |\{\alpha \in \mathfrak{B} \ : \ \beta \cap \alpha = \emptyset\}|$$

と定める。

$k \in \{0, 1, \ldots, v\}$, $v \times v$ の複素行列 A, 部分集合 $\alpha \subset [v]$ に対して $c_A(\alpha, k)$ を $\det(xI - A[\overline{\alpha}])$ における $x^{v-k-|\alpha|}$ の係数を表すとし、$[v]$ の部分集合族 $\mathfrak{A}$ に対して

$$C_A(\mathfrak{A}, k) := \{c_A(\alpha, k) \ : \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$$

と定める。以上の記号の下、主結果は次のように述べられる。

Theorem 2.1. *t, v, k を正整数とする。$v \times v$ 複素行列 A が次の二つの条件を満たすとする：*

(1) 相異なるある複素数 $a \neq b$ が存在して、$D_A(k) = \{a, b\}$;

(2) 各 $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$ に対して、ある複素数 c_i が存在して、$C_A\left(\binom{[v]}{i}, k\right) = \{c_i\}$.

このとき、$\mathfrak{H}_A(v, k, a)$ は t-(v, k, λ) デザインである。ただし、

$$\lambda = \frac{(-1)^k \binom{k}{t}}{(a-b)\binom{v}{t}} c_A(\emptyset, k) - \frac{b}{a-b} \binom{v-t}{k-t}.$$

3 Theorem 2.1 の証明の方針

行列の特性多項式の係数と主部分行列式の総和に関しては、任意の $v \times v$ 正方行列 B に対して、次の内容が知られている（例えば [2, Eq.(1,2,13), Page 53]）:

$$\det(xI - B) \text{ の } x^{v-k} \text{ の係数} = (-1)^k \sum_{\alpha \in \binom{[v]}{k}} \det(B[\alpha]). \tag{3.1}$$

$\beta \in \binom{[v]}{i}$ とし $B = A[\overline{\beta}]$ とすると、(3.1) の左辺はこれまでに設定した記号を用いると $c_i = c_A(\beta, k)$ に等しい。一方、(3.1) の右辺は Theorem 2.1 の仮定 (2) により、

$$(-1)^k \left(a\mu_{\mathfrak{B}}(\beta) + b \left(\binom{v-i}{k} - \mu_{\mathfrak{B}}(\beta) \right) \right) = (-1)^k \left((a-b)\mu_{\mathfrak{B}}(\beta) + b\binom{v-i}{k} \right)$$

に等しい。従って

$$c_i = (-1)^k \left((a-b)\mu_{\mathfrak{B}}(\beta) + b\binom{v-i}{k} \right),$$

となり、$\mu_{\mathfrak{B}}(\beta)$ は β の取り方に依らず、$\beta \in \binom{[v]}{i}$ であるような i にのみ依存することが示された。この値を μ_i とおく。Inclusion-exclusion principle により

$$\lambda_{\mathfrak{B}}(\beta) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \mu_j$$

となり、$\lambda_{\mathfrak{B}}(\beta)$ が β の取り方に依らず、$\beta \in \binom{[v]}{i}$ であるような i にのみ依存することが示された。よって、$\mathfrak{H}_A(v,k,a)$ は t-デザインである。

$|\beta| = t$ に対して、$\lambda = \lambda_{\mathfrak{B}}(\beta)$ の値の決定は $X := \sum_{(\alpha,\beta)\in Y} \det(A[\alpha])$ を二通りの方法で以下の通り計算することから従う。ただし、$Y = \{(\alpha,\beta) \in \binom{[v]}{k} \times \binom{[v]}{t} \ : \ \beta \subset \alpha\}$.
X を α, β の順に計算すると

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\beta \in \binom{[v]}{t}} \sum_{\substack{\alpha \in \binom{[v]}{k} \\ \beta \subset \alpha}} \det(A[\alpha]) \\ &= \sum_{\beta \in \binom{[v]}{t}} \left((a-b)\lambda + b\binom{v-t}{k-t} \right) \\ &= \binom{v}{t} \left((a-b)\lambda + b\binom{v-t}{k-t} \right). \end{aligned}$$

X を β, α の順に計算すると

$$X = \sum_{\alpha \in \binom{[v]}{k}} \sum_{\beta \in \binom{\alpha}{t}} \det(A[\alpha]) = \binom{k}{t} \sum_{\alpha \in \binom{[v]}{k}} \det(A[\alpha]) = (-1)^k \binom{k}{t} c_A(\emptyset, k).$$

よって、X を消去すると、 $a - b \neq 0$ であるので

$$\lambda = \frac{(-1)^k \binom{k}{t}}{(a-b)\binom{v}{t}} c_A(\emptyset, k) - \frac{b}{a-b}\binom{v-t}{k-t}.$$

4　Theorem 2.1 から得られるデザインの例

位数が n の conference matrix とは対角成分が 0、非対角成分が ±1 のいずれかの $n\times n$ 行列 S であって、$SS^\top=(n-1)I$ を満たす行列である。

Example 4.1. S を位数 $4n+2\geqslant 6$ の対称な conference matrix とする。$k=3,4$ としたとき、S が Theorem 2.1 の仮定を満たし、3-デザインが得られることを示す。

$D_S(3)=\{-2,2\}, D_S(4)=\{3,5\}$ である。$\alpha\subset\{1,\dots,4n+2\}$ とする。[4, Section 4] により、S の主部分行列の特性多項式について次が得られる。

$\lvert\alpha\rvert$	$\det(xI-S[\overline{\alpha}])$
0	$(x^2-4n-1)^{2n+1}$
1	$x(x^2-4n-1)^{2n}$
2	$(x^2-1)(x^2-4n-1)^{2n-1}$
3	$(x\pm2)(x\mp1)^2(x^2-4n-1)^{2n-2}$

表 1: The characteristic polynomials of principal submatrices of S from Example 4.1.

表 1 により、$i\in\{0,1,2,3\}$ に対して $\left|C_S\left(\binom{[4n+2]}{i},4\right)\right|=1$ が従う。($|\alpha|<3$ のときは特性多項式が α の取り方に依らずに決まるので、その係数もそうである。$|\alpha|=3$ のとき、特性多項式は二通りの可能性があるが、$S[\overline{\alpha}]$ の特性多項式の $4n-4$ 次の係数は一意的に決まることが容易に確認できる。) Theorem 2.1 を適用することで次がわかる：

- $\mathfrak{H}_S(4n+2,4,5)$ は 3-$(4n+2,4,3n)$ デザイン;
- $\mathfrak{H}_S(4n+2,4,-3)$ は 3-$(4n+2,4,n-1)$ デザイン.

Example 4.2. S を位数 $4n\geqslant 8$ の歪対称な conference matrix とする。 $k\in\{4,5\}$ としたとき、$S,S\pm I$ が Theorem 2.1 の仮定を満たし、3 デザインが得られることを示す。

$D_S(4)=\{1,9\}, D_{S\pm I}(4)=\{8,16\}, D_{S\pm I}(5)=\{\mp16,\mp32\}$ である。$\alpha\subset\{1,\dots,4n\}$ とする。[4, Section 4] により、S の主部分行列の特性多項式について次が得られる。

$\lvert\alpha\rvert$	$\det(xI-S[\overline{\alpha}])$
0	$(x^2+4n-1)^{2n}$
1	$x(x^2+4n-1)^{2n-1}$
2	$(x^2+1)(x^2+4n-1)^{2n-2}$
3	$x(x^2+3)(x^2+4n-1)^{2n-3}$

表 2: The characteristic polynomials of principal submatrices of S from Example 4.2.

表 2 により、$i\in\{0,1,2,3\}$ に対して $\left|C_S\left(\binom{[4n]}{i},4\right)\right|=1$ と $\left|C_{S+I}\left(\binom{[4n]}{i},5\right)\right|=1$ が従う。Theorem 2.1 を適用することで次がわかる：

- $\mathfrak{H}_S(4n,4,1)$ は 3-$(4n,4,3(n-1))$ デザイン;
- $\mathfrak{H}_S(4n,4,9)$ は 3-$(4n,4,n)$ デザイン;
- $\mathfrak{H}_{S\pm I}(4n,5,\mp 16)$ は 3-$(4n,5,3(n-1)(n-2))$ デザイン;
- $\mathfrak{H}_{S\pm I}(4n,5,\mp 32)$ は 3-$(4n,5,5n(n-1))$ デザイン.

位数が n の Seidel matrix とは対角成分が 0、非対角成分が ± 1 のいずれかの $n\times n$ 行列である。

Example 4.3. S を位数 v の対称な Seidel matrix とし、その特性多項式を $\det(xI-S)=(x-\theta_1)^{m_1}(x-\theta_2)^{m_2}$ （$\theta_1\neq\theta_2$, $\min(m_1,m_2)\geqslant 2$）とする。S の主部分行列の特性多項式について次が得られる（[5, Corollary 1.5] を参照）：

$\lvert\alpha\rvert$	$\det(xI-S[\overline{\alpha}])$
0	$(x-\theta_1)^{m_1}(x-\theta_2)^{m_2}$
1	$(x-\theta_1)^{m_1-1}(x-\theta_2)^{m_2-1}(x-(\theta_1+\theta_2))$
2	$(x-\theta_1)^{m_1-2}(x-\theta_2)^{m_2-2}(x-(\theta_1+\theta_2+1))(x-(\theta_1+\theta_2-1))$

表 3: The characteristic polynomials of principal submatrices of S from Example 4.3.

$k\in\{3,4\}$, $\varepsilon\in\{0,\pm 1\}$ とする。表 3 と $D_S(3)=\{-2,2\}, D_S(4)=\{3,5\}$ により行列 $A=S+\varepsilon I$ が Theorem 2.1 の仮定を満たすことがわかり、$\mathfrak{H}_{S+\varepsilon I}(v,k,a)$ は 2 デザインとなる。パラメータ λ は 表 4 で与えられる：

ε	k	a	λ
0	3	± 2	$\frac{\mp 3c_S(\emptyset,3)}{2v(v-1)}+\frac{v-2}{2}$
± 1	3	0	$\frac{-3\varepsilon c_{S+I}(\emptyset,3)}{2v(v-1)}+v-2$
± 1	3	-4ε	$\frac{3\varepsilon c_{S+I}(\emptyset,3)}{2v(v-1)}$
0	4	-3	$\frac{-3c_S(\emptyset,4)}{2v(v-1)}+\frac{5}{8}\binom{v-2}{2}$
0	4	5	$\frac{3c_S(\emptyset,4)}{2v(v-1)}+\frac{3}{8}\binom{v-2}{2}$
± 1	4	0	$\frac{3c_{S\pm I}(\emptyset,4)}{4v(v-1)}+\binom{v-2}{2}$
± 1	4	-16	$\frac{-3c_{S\pm I}(\emptyset,4)}{4v(v-1)}$

表 4: The 2-(v,k,λ) designs $\mathfrak{H}_{S+\varepsilon I}(v,k,a)$ of Example 4.3.

5　おわりに

成分を 1 の三乗根とするような Hermitian complex Hadamard matrix から 2 デザインが得られることや、walk-regular graph の隣接行列から 1 デザインが得られる

ことも [5] で示されている。さらに、対称アソシエーション・スキームとその隣接行列を符号化した行列から PBIBD（partially balanced incomplete block design）や異なるサイズのブロックを適切に集めてくることにより、PBD（pairwise balanced design）が得られることも同様の行列の手法で示される。[5] には関連する問題を多数提示した。ここでは以下の問題を提示して、本講究録を終える。

Problem 5.1. t を 4 以上の整数とする。$\mathfrak{H}_A(v,k,a) = ([v], \mathfrak{B}_A(v,k,a))$ が t デザインとなるような行列 A, 整数 k, a の例を挙げよ。

参考文献

[1] W. Belkouche, A. Boussaïri, S. Lakhlfi, and M. Zaidi, *Matricial characterization of tournaments with maximum number of diamonds*, Discrete Math. **343**(4):111699, (2020).

[2] R.A. Horn and C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] K. Gunderson and J. Semeraro, *Tournaments, 4-uniform hypergraphs, and an exact extremal result*, J. Combin. Theory, Series B, **126**, 114–136 (2017).

[4] G. Greaves and S. Suda, *Symmetric and Skew-Symmetric* $\{0, \pm 1\}$*-Matrices with Large Determinants,* J. Combin. Des. **25**(11), 507–522 (2017).

[5] G. Greaves and S. Suda, Constructions of t-designs from weighing matrices and walk-regular graphs, submitted, arXiv:2402.17528.