リー代数
という本のタイトルについて

Noriaki Kamiya (神谷徳昭)
University of Aizu（福島県公立大学法人会津大学）

Abstract
1950 年頃から 2020 年位迄を主体に, この 70 年間に日本 (日本人による英語の著作を含め) で出版されたリー代数 (環) とタイトルに名前がつけられている本のリストを列挙して, 調査・研究し,　補足において Lie algebra の naming と筆者の研究分野のジョルダン三項系の一般化についての手短な概説をするのが主な目的です.

Introduction (はじめに)

この小論は非結合的代数系 (non associative algebras) の著作についての話題 (topics) です, 主にリー代数（環）についてです.

話の発端の 1 つ目は 1956 年に松島先生のリー環の本が出版されました.

2 つ目は 1965 年に来日したアメリカ数学会の会長を歴任された N.Jacobson (Yale Univ.）教授が, 日本数学会の招待で日本各地の大学 (東京大学, 広島大学, 京都大学, 九州大学, 北海道大学, 岡山大学, 名古屋大学等) で, リー代数, ジョルダン代数, 非可換代数等の講義 (講演) を 3ヶ月間の滞在中に行った.

3 つ目はジョルダン代数の著作は日本 (語) では出版されていない様です.

これらの事柄をふまえて, 日本のこの分野の数学書出版状況を「リー代数」というタイトルがつけられた訳本を含めた主に数学の分野に限定して, 筆者の独断的見解を交じえながら述べさせていただきます.(以下名前の敬称略).

この章の最後にリー代数 (リー環) の定義と簡単な例を述べておきます.

体 Φ 上のベクトル空間 V で 2 項積 [,] で閉じていて双線形性を持ち, 次の 1) と 2) を満たす代数系をリー代数 (Lie algebra) という.

1) $[x, y] = -[y, x], \ \forall x, y \in V$

2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \ \forall x, y, z \in V$

実例　行列代数 $Mat(n, \Phi)$ で積を $[x, y] = xy - yx$ と定義した代数.

4 元数代数 $\mathbf{H}$ で虚数部のベクトル部分空間 $Im\ \mathbf{H}$ の外積 $x \times y$ を $[x, y]$ の定義とすると, これらはリー代数です.

Lie algebra の naming についても後で述べさせていただきます (補足参照).

§1 日本におけるリー代数の著作 (本) について

[1956] 松島与三, リー環論, 共立出版
[1962] N.Jacobson, Lie algebras, Interscience Publishers
[1965] 岩堀長慶, Lie 環論と Chevally 群 上, 下. 東大数学教室セミナーノート, vol.12,13
[1965] 岩堀長慶 (訳), リー代数, 現代の数学 I, 第 5 章, 岩波書店
[1968] 杉浦光夫 (訳), ブルバギ数学原論, リー群とリー環 I(1968),II(1973), III(1970), 東京図書
[1971] N.Jacobson, Exceptional Lie algebras, Marcel Dekker
[1978] M.Goto(後藤守邦) and F.D.Grosshans, Semi simple Lie algebras, Marcel Dekker
[1983] 東郷重明, リー代数, 槇書店
[1983] 竹内外史, リー代数と素粒子論, 裳華房
[1987] 佐武一郎, リー環の話, 日本評論社
[1990] 東郷重明, 無限次元リー代数, 槇書店
[1999] 脇本実, 無限次元リー環, 岩波書店
[1999] 大島利雄・小林俊行, リー群とリー環１, ２, 岩波講座現代数学の基礎
[2000] 佐藤肇, リー代数入門, 裳華房
[2001] 脇本実, Infinite dimenssional Lie algebras, Transulation of Mathematical Monographs, AMS
[2002] 佐武一郎, リー環の話, 日本評論社 (新編)
[2002] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版
[2008] 窪田高弘, 物理のためのリー群とリー代数, (SGC ライブラリ 66) サイエンス社
[2010] 九後汰一郎 (訳), 物理におけるリー代数, 吉岡書店
[2012] 示野信一, 演習形式で学ぶリー群・リー環（SGC ライブラリ 88）, サイエンス社
[2013] 熊原啓作 (訳), 数学者ソーファス・リー, リー群とリー環の誕生, 丸善出版
[2018] 井ノ口順一, はじめて学ぶリー環, 現代数学社
[2019] 金谷健一, 3 次元回転: パラメータ計算とリー代数による最適化, 共立出版
[2022] 山下博, リー代数と表現論, 日本評論社（新装版)

外国語の本として N.Jacobson の本だけをここで挙げたのは, 日本人にとり, リー代数の本として多分, この分野 (非結合的代数系, AMS classification 17) の研究者にとりまして必読書として知れ渡っていると考えたからです.

一方, C.Chevally の戦後直ぐの日本滞在も我々日本人に取り, リー群との直接の交流と思われます (佐武氏の「リー環の話」の本のシュバレーとの思い出参照). 彼の著作（リー群) については後述します.

もしかしたら筆者の浅学の由に抜け落ちている出版物が存在したとすれば, このような研究論文の第一歩としてお許しください.

リー環からリー代数へ: 何故１９８５年頃まではリー環という ”ことば” が普及していたかの理由の一つはリー環がリー群と対比する concept として考えられていたからだと思います. この時期までは, リー群の接空間としてリー環を把握する人々が多かったのではないでしょうか. その後（1985 年以後）,　無限次元リー代数, Kac-Moody algebra, affine 化, super 化等そして数理物理学との関連性でリー群との関係性よりもリー環独自の代数的な性質が他の分野への応用に役に立つ方向へと変遷した為と推察しています.

§2 日本におけるいくつかの講義録関係

この章では, 講演録等においてリー代数というタイトルが在る講究録・所報・報告集等を調べてみます.

[1986] 野海正俊, 上野喜三雄編, リー環と微分方程式, 上智大学数学講究録, no.23.

[2000] 杉浦光夫, 実単純リー環の分類, 第 10 回数学史シンポジウム, 津田塾大, 数学・計算機科学研究所報, vol.20, p158-391.

[2006] 篠田健一郎編, Proc. of the Conf. on Groups and Lie algebras, 上智大学数学講究録, no.46.

又, 数理解析研究所講究録の Repository KURENAI(紅) でリー代数 (Lie algebras 又は superalgebras) というキーワードで探索すると中里博, 野村隆昭, 筆者が発表 (講演) したタイトルのものしか存在しなかった. (もしかしたら mistake している可能性もありますので御容赦下さい.) この章に関しては特に記載漏れ・探究ミスでの不備が多々存在している可能性があるかもしれません, 再度の調査の予定ですので読者の寛容をお願いします.

§3 リー代数サマーセミナーの歩み

広島大学で長く一貫して教育・研究された東郷重明氏の弟子達 (河本直紀, 久保富士夫氏を中心にしたグループ) を主体に創出されたリー代数の研究会とその報告集として「Proc. of Summer Seminar Lie algebras and Related Topics」(リー代数サマーセミナー報告集・リー代数とその周辺) が刊行されています. 研究会は 1985 年より毎年・現在まで開催され, 報告集は 1990 年以後現在まで　(コロナ禍の為 2020 年のみ不開催) 出版されています. 歴史の一コマとして, 第 1 回から現在 (2023) までの責任・世話人と会場を以下に列挙します.

回	日程	会場	責任者	講演数
1	85 年 8 月 1,2 日	広島工業大学付属図書館	河本	6
2	86 年 8 月 25,26 日	広島経済大学	坂本	7
3	87 年 8 月 3,4 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
4	88 年 7 月 25,26 日	広島大学教育学部	丸尾, 河本	7
5	89 年 6 月 3 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
6	90 年 6 月 2 日	広島大学理学部	河本, 池田	6
7	91 年 7 月 21 日	広島大学理学部	池田	6
8	92 年 7 月 20 日	福岡教育大学第二会議室	坂本	9
9	93 年 8 月 4 日	新潟薬科大学	本多	6
10	94 年 6 月 5 日	広島大学旧教育学部	丸尾, 河本, 池田	7
11	95 年 7 月 28 日	山口大学吉田キャンパス大学会館	柏木	7
12	96 年 8 月 5 日	九州工業大学工学部資料館	池田, 久保	7
13	97 年 8 月 19 日	岡山大学大学院自然科学棟	平野	7
14	98 年 8 月 3,4 日	海外技術者研修協会横浜研修センター	浅野	9
15	99 年 8 月 23,24 日	九州産業大学	牟田	6
16	00 年 8 月 2,3 日	広島大学法学部・経済学部	丸尾, 河本	6
17	01 年 8 月 10,11 日	福山大学	三川	5
18	02 年 8 月 10,11 日	九州工業大学工学部共通教育研究棟	池田, 久保, 坂本	5
19	03 年 8 月 9,10 日	九州共立大学工学部深耕館	首藤	5
20	04 年 8 月 20,21 日	広島大学教育学部	丸尾, 河本	5
21	05 年 8 月 26,27 日	広島大学学士会館	久保	5
22	06 年 8 月 25,26 日	西日本工業大学	谷口	5
23	07 年 8 月 31,1 日	海上保安大学校総合実習棟	河本	5
24	08 年 8 月 29,30 日	福岡教育大学多目的室	坂本	5
25	09 年 8 月 21,22 日	九州工業大学総合教育棟	池田	7
26	10 年 8 月 23,24 日	広島大学東千田キャンパス	久保	5
27	11 年 8 月 22,23 日	広島大学霞キャンパス	久保	7
28	12 年 8 月 24,25 日	山口大学吉田キャンパス大学会館	柏木	7
29	13 年 8 月 23,24 日	大阪樟蔭女子大学関屋キャンパス	平野, 松岡	6
30	14 年 8 月 29,30 日	福岡ガーデンパレス	坂本	6
31	15 年 8 月 28,29 日	新潟薬科大学	本多	8
32	16 年 8 月 26,27 日	岩手大学教育学部	吉井	7
33	17 年 8 月 18,19 日	筑波大学	森田	6
34	18 年 8 月 25,26 日	富山大学理学部	山根	7
35	19 年 8 月 28,29 日	学校法人鶴学園広島校舎	久保	7
36	21 年 8 月 28,29 日	岡山理科大学 (Zoom)	柴田	10
37	22 年 8 月 27,28 日	福井大学文京キャンパス	古関	9
38	23 年 8 月 22,23 日	岩手大学教育学部	富江, 吉井	11
39	24 年 8 月	酪農学園大学	菅原	予定

第 6 回 (1990) 以降は Proceedings (報告集) があります.

最近の傾向として, リー代数以外の超代数,Hopf 代数等の研究者 (外国人も含め）達による発表・論文も増えつつあります（もし興味がある読者は, 報告集を含め, 関係者にご連絡されれば, 資料等手に入ると思います).

§4 今後の課題

($\sharp$) リー環・代数という言葉を誰が最初に Lie algebra の訳として使用したのか筆者は知りませんので, その方を見つけるのも興味ある事柄です. 日本において誰が最初にリー代数の講義をされたのでしょうか? (知られている事柄かも知れませんが…).

1938 年に吉田氏の Lie ring (Japan J. Math. **14**) という論文存在, 1947 年の学士院紀要の松島氏の論文で Lie algebra というタイトルがつけられているものがあります; On the Cartan decomposition of a Lie algebra, Proc. Japan Acad. 23(5) 50-52.

($\sharp$) 戦前 (戦中を含めて) の著作 (本・論文) で, リー代数について論究されているものの文献を調べる (例えば, 吉田耕作, 安倍亮, 小平邦彦氏の論文が全国数学紙上談話会の中に存在しています).

津田塾大学数学史研究会シンポジウム (2023, Oct. 15) の折, 以下のことを教示いただきました; [1939] 吉田耕作, りい環論 (大阪帝国大学数学講演集 IV) が存在する.

これらの事柄からの筆者の推測ですが, 昭和 12 年 (1937) 吉田氏が阪大の数学教室の学生にりー環論の講義を行ない, そしてまた中山正氏がプリンストンに留学（1937-1939) されていたので彼経由等での H. Weyl の　Continuous Groups I,II (1934) を入手したのが日本への最初の伝来ではないかと思われます. この 1934 年の H. Weyl の Princeton での講義録 I,II (N. Jacobson 記述) に関しては、日本語でないのでここでは省かせていただきます (後述の補足説明参照).

($\sharp$) リー群の文献 (著作) をリー代数と同様に調査・探求する.

($\sharp$) S.Togo, N.Iwahori, I.Satake 氏の評伝 (この分野の先駆者達).

§5 あとがき (Conclusion)

リー代数の本の書き方として, 具体例・実例を列挙しながら初学者にも理解しやすいように心掛けられた記述の本, また線形代数の次に学習する教材として捉える, 専門書として読者を限定する, 他の分野との応用的な側面として著述する.

著者の考え方により色々な論及 (著述) の表現の仕方が存在すると思います. 学風・気風 (時代の要請), ページ数の制約等も関係すると思います. 例えば

Section 1 で述べた佐武, 岩堀, 東郷氏の著作は三者三様のそれぞれの気風（学風）が出ていて興味深いです（筆者はそれぞれの先生方と面識がありましたので). またどのような断面で著作を書くかにより（読者層をどこにするか）, 例えば非結合的代数（4 元数、8 元数などの数の拡張）の実例として, 量子力学の次に学習する科目として, 工学への応用, 大学院の数理物理を含めた専門書として捉える著述の仕方等色々な方法が存在すると考えます.

そしてさらに付け加えると, リー群 (対称空間), 表現論に比して, リー代数独自の構造論の研究者達が, 諸外国に比較して, 日本にそしてこの分野 (nonassociative algebras) の著作が少ないのは, 松島, 後藤, 佐武氏が長く U.S.A. で教鞭をとられたことと関係するのかも, 又はほかにも理由が存在するのかも知れません. 例えば 筆者が 1982 年夏に Oberwolfach(Germany) で N.Jacobson 氏から直接伺った話ですが岩堀に Jordan algebra の論文を送ったが彼は興味を示してくれなかった様だ等. この時代, 日本人の中で Jordan algebra に興味を持たれていたのは佐武氏 (1987 年の著作) を含め数名 (山口清, 浅野洋等) の様です.

リー代数の概念と対応するリー群について, 少しだけ述べますと, リー代数の説明を含むリー群の本は多数存在すると思います. 例えば, 横田一郎, 杉浦光夫, 岩堀長慶, 佐武一郎氏等, 又内容的にリー代数の事柄が記述されている物理学, 表現論又は幾何学の本も多数出版されています. ここでは 1 つだけ C.Chevalley の Princeton Univ.Press から戦後すぐに出版された 1946 年の Lie group の著作は特筆すべきものと考えます（1965 年に Asian text edition 版,2012 年に斉藤正彦訳, ちくま学芸文庫版). 一方, 非結合的代数系の著作としては, S.Okubo(大久保進）氏の [1995] Introduction to Octonion and other non-associative algebras in Physics, Cambridge Univ. Press. のみが出版されています. (彼は Wigner medal と仁科賞受賞).

この研究ノートでは, リー代数というタイトルのみに着目してリー群・表現論については言及していません (勿論連続群・位相群についても). これらについては別の機会に, そして名前が挙げられていない研究者・著作者の方々も多数存在するかも知れません. 読者の御寛容をお願いします.

最後にこのような著作の数学史的記述と考察 (記録) の文献は, まだ日本では先行資料が無いと考えますので, 参考文献 (引用文献) は存在しません (先行研究等, 筆者の知見不足かも知れませんが, 再度の浅学お許しください).

不十分な研究探索・考察結果ですが, 数学史のとらえ方の一例として現在までに出版された著作のタイトルと内容から時代の雰囲気とこの分野の傾向を考察する数学史研究の試論の所説として独断的な部分を含めた論及ですが, 将来への数学史探求の一歩・ある断面として数学研究者の視点でここに記述させていただきました.

この小論の最後に自己宣伝を兼ねて私の論文を含めて, 以下の著作にはこ

の分野 (Lie algebras, Jordan algebras, nonassociative algebras, etc.) の最近の論文 (Fields 賞の受賞者の Zelmanov, Kac-Moody algebra で著名な Kac, 等が招待講演者) が収録されています; Springer Publisher, Proc. Math. and Statistics series の本 (2023 年出版, vol.427) において Nonassociative algebras の国際会議（2022 年夏, ポルトガル, Coimbra University）の報告論文集が最近の研究動向を知る上で役に立つかもしれません.

また少し古いかもしれませんが 1990 年夏, 広島での ICM の satellite の国際会議の Proceeding として World Scientific 社より Nonassociative algebras and related topics, Yamaguti and Kawamoto eds,（1991）が出版されています. Lie algebras を含め, この分野 (非結合的代数系, Math. Review classification 17) に興味のある読者はご一読ください.

§ Appendix I (補足説明)

この章では日本の事柄ではないですが N. Jacobson の personal history (Jacobson の collected papers の抜粋です) より 以下の Lie algebra のネーミングについての部分を少し長くなりますが引用させていただきます.

The advent of the Institute for Advanced Study in 1932 had great potential, but in the beginning it amounted only to the transfer of several members of the Princeton department to the new Institute and the addition of Einstein - who did not lecture. Gradually new members were added: Hermann Weyl in 1933 and Marston Mores in 1935. From the time of his arrival, Weyl gave a number of important courses. Perhaps the most influential of these was his first course, Continuous Group I and II. given in 1934. Richard Brauer had been designated as Weyl's research assistant, but he was unable to arrive in Princeton until the fall of 1934. I was asked to fill the gap and I wrote up the lecture notes for I. given in the spring of 1934. This part of the course was largely preparatory to the structure and representation theory of semi-simple Lie groups presented in II. The last part of II. was devoted to a "Seminar on various topics in group theory". This included lectures by Brauer on the detemination of the Betti numbers of the classical simple groups and by H.S.M.Coxeter on groups generated by reflections. The achievement of Lie had been to reduce the study of local properties of an analytic group to the study of corresponding properties of a certain non-associative algebra called its infinitesimal group. In his lecture, Weyl proposed an independent study of such algebras, which became known as Lie algebras. He felt that it would be of interest to study these algebras over arbitrary fields of characteristic 0 and that it would be desirable to derive their properties "rationally", that is, without recourse to extension of the base field to its algebraic closure - as had been done by Wedderburn in 1908 for associative algebras. These goals attracted A.A.Albert and myself. My first paper on Lie algebras, "Rational methods in the theory of Lie algebras" (筆者の注 [Rational methods in the theory of Lie algebras, Ann. of Math. 36(1935)875-881.]) was directed toward the second goal.

以上から理解できますように, 勿論ご存知の方々も存在しているかもしれませんが **"Lie algebra"** の名ずけ親は H. Weyl と考えます. ここに記録のために記述させていただきました.

更に, これらの事柄を踏まえて N. Jacobson が Annals of Math. vol 36(1935) に発表した"Rational Methods in the theory of Lie algebras" (Received May 20, 1934) がタイトルに Lie algebra を使用した最初の論文と筆者は考えています.

§ **Appendix II** (Triple systems and their examples)

この機会に手短に, 簡単に我々の研究 (筆者に関連する) を述べることにします. – ジョルダン代数 (三項系), リー三項系, リー (超) 代数の構成–

$< x, y >$ なる内積を持つ Φ 上の vector space V において,

ただし $< x, y > = < y, x > \in \Phi$, ここで Φ は基礎体です,

$$\{xyz\} = < x, y > z + < y, z > x - < z, x > y$$

と定義すれば Jordan triple system (ジョルダン三項系, JTS と略す) になり, つまり $\{xyz\} = \{zyx\}$ and 以下の基本公式 (♠) が満たされる.

さらに JTS $(V, \{xyz\})$ から $l(x, y)z := [xyz] = \{xyz\} - \{yxz\}$ により Lie triple system(the tangent space of a symmetric space) with respect to the ternary product $l(x, y) \in End\ V$ が得られ, そして Lie algebra が構成可能です. つまり $Der\ V = < l(x, y)|x, y \in A >_{span}$ の中に Lie product を導入する方法です. そして $L(V) = V \oplus Der\ V$ に Lie 代数の構造が存在する.

次に binary product の観点から, $\overline{xy} = \overline{yx}$ を満たす involution を持つ代数系が三項系 (triple system) $\{xyz\} = (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y$ によって定義され

$$(\spadesuit) \quad \{xy\{uvw\}\} = \{\{xyu\}vw\} - \{u\{yxv\}w\} + \{uv\{xyw\}\}$$

なる基本公式 (南部恒等式と呼ぶ場合もあります) が成り立つとき structurable algebra と呼ばれます. このような三項系 ((-1,1)-Freudenthal-Kantor triple system と呼ばれる) から単純リー代数 (古典型と例外的な $G_2, F_4, E_6, E_7,\ and\ E_8$ を含む) が得られます. 少し変形すると Lie superalgebras も構成可能です.

まとめると次の a),b),c),d),e) のような types による root systems を用いない構成が存在します． a)$A = g_{-1} = \mathbf{O} \otimes \mathbf{O}$(64 次元), b)$A = g_{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \beta \end{pmatrix}$(56 次元), c)$A = \mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{J}_0$(182 次元) Tits construction, d) bilinear forms $< x, y >$, e) triple systems induced from matrix algebras.

これらの場合それぞれ triple system, or nonassociative algebra の structure が導入され，それらからリー代数またはリー超代数を construct できます．a),b),c),d),e) types の代数系をまとめて A と表します．a),b),d),e) は triple system (三項積) の structure をもち，a),b),c) はある代数 (normal triality algebra) の積で閉じています．これらの場合それぞれより simple Lie algebras or simple Lie superalgebras が construct されます，we denote by $L(A)$. 特に 5-graded Lie algebra$g_{-2} \oplus g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1 \oplus g_2 = L(A),\ and\ g_{-1} = A$ です．そして $T(A) = A \oplus A = (g_{-1} \oplus g_1)$has a structure of Lie triple system.

従って symmetric (super)spaces 又は reductive homogeneous spaces が $L(A)/Der(T(A)) = g_{-1} \oplus g_1\ and\ Der(T(A)) = g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2$ の概念として考察可能です．ただし $Der(T(A))$ は三項系代数 $T(A)$ の derivation です．

実例として (m, n) 次行列 $A = M_{m,n}(\Phi)$ において $\delta = \pm 1$ とおき，x^T は転置行列として次のように三項積を定義する (右辺は行列の積で定義されます)；

$$(\sharp)\quad \{xyz\} = xy^Tz + \delta(zy^Tx - zx^Ty), \quad \forall x, y, z \in A$$

この triple product $\{xyz\}$ は $(-1, \delta)$-Freudenthal-Kantor triple systems です．

つまり (♠) and (♠♠) $K(K(a, b)c, d) - K(a, b)L(c, d) - L(d, c)K(a, b) = 0$, の 2 つの恒等式を満たします，ただし $L(a, b)c = \{abc\}\ and\ K(a, b)c = \{acb\} - \delta\{bca\}$ です．That is, $A = g_{-1}$ has a structure of ternary product.

(♠) and (♠♠) の恒等式 で特に $\delta = 1$ and $K(a, b) = 0$ (that is, $\{abc\} = \{cba\}$) がジョルダン三項系 (JTS) の定義式です．我々の triple product 概念の特別な場合です．詳しくは前述の論文 (Springer Pub.[2023]) 参照.

JTS は R-symmetric spaces や bounded symmetric domains と関係する代数概念です．

($\sharp$) の式で $\delta = 1$ が structurable algebra ($if\ m = n$) であり，リー代数が構成され $\delta = -1$ のときが anti-structurable algebra ($if\ m = n$) であり，リー超代数が構成されます．勿論 5-graded Lie (super)algebra $L(A)$, であり $A = g_{-1}$ に代数的な構造が導入されています．root systems を用いない方法です．

$m \neq n$ ならば ternary(triple) product は存在しますが binary product は存在しません，そして特に anti-structurable algebra ($\delta = -1$) のとき，$M_{2n,2n}(\Phi)$ ならば $osp(2n, 4n)$ type with $(18n^2 + n)$ 次元，$M_{2n+1,2n+1}(\Phi)$ ならば $osp(2n + 1, 2(2n + 1))$ type with $(18n^2 + 19n + 5)$ 次元のリー超代数

が構成されます. $A = M_{2n+1,2n+1}(\Phi)$ から得られ Lie superalgebra $L(A)$ の extended Dynkin diagram を考察すると次の様になります：

$\circledcirc => \circ - - - \circ - \boxtimes - \circ - - \circ => \circ,\quad \boxtimes$ omitted

$\alpha_0 \quad \alpha_1 \qquad \alpha_{2n+1} \qquad \alpha_{3n+1},\ \alpha_0$ is the highest root

$\cong C_{2n+1} \oplus B_n = Der\ (T(A))$ (*the derivation of the Lie triple system* $T(A)$).

次に $A = M_{2n,2n}(\Phi)$ の $L(A)$ の extended Dynkin diagram を考える.

$\circledcirc => \circ - - - \circ - \boxtimes - \circ - - - \circ - \circ,\ \alpha_{3n-1} \quad \boxtimes$ omitted

$|$

$\alpha_0 \quad \alpha_1 \qquad \alpha_{2n} \qquad \circ\ \alpha_{3n}, \quad \alpha_0$ is the highest root

$\cong C_{2n} \oplus D_n = Der\ (T(A))$ (*the derivation of the Lie triple system* $T(A)$.

($\sharp\sharp$)*consept of algebraic structures* $\Longleftrightarrow$ *concept of geometric structures*

このような対応が非結合的代数系の立場から考えられます (標数 $p \neq 2$ の場合も含めてです). これらの場合, roots system を用いない方法です.

興味を持つ対象により a),b),c),d),e) 等, 非結合的代数系の道具,notation, 手法 (methods), により色々と素朴に予備知識をあまり仮定せずに考察することが可能です. これらの研究については筆者の論文 (例えば日本語では RIMS Koukyuroku の数十編の論文) 又はそこにおいて引用しました論文を参照してください. (Math. Review classification 17, nonassociative algebras, mainly)

少し話題がそれるかもしれませんが, For Lie algebras and symmetric spaces (or bounded domains), 対称空間又は対称領域に関する著作:

[1980] Satake, Algebraic structures and symmetric domains (the correspondence of Hermite JTS and bounded symmetric domains),

[1969] Loos, Symmetric spaces, I, II (the correspondence of Lie triple systems and symmetric spaces)

[2002] Bertram, Complex and quaternionic structures on symmetric spaces -correspondence with Freudenthal-Kantor triple systems, Sophia Kokyuroku in Mathematics, vol.45, 57-76.

これらも三項系代数と幾何学の対応を特徴ずける初期の著作だと考えます. また前に述べた Okubo's book（[1995]）は数理物理学と三項系の関連が述べられています.

Acknowledgements; This work was supported by the Research Institute for Mathemtical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

Current address;
Noriaki Kamiya,
Japan, Chigasaki City Chigasaki 1-2-47-201
e-mail; shigekamiya@outlook.jp