ブーロスの“最強のパズル”と論理的推論に関する研究

群馬大学理工学府　本多梨七 ＊
Rina Honda
Department of Computer Science,
Gunma University

群馬大学理工学府 藤田憲悦 †
Ken-etsu Fujita
Department of Computer Science,
Gunma University

1　はじめに

自然言語によって与えられた条件・前提を記号化・形式化することにより，回答を導き出すパズルを論理パズルと呼ぶ．特に G.ブーロスが考案した最強のパズル”The Hardest Logic Puzzle Ever”[1]は論理パズルの最高峰とされる．この解法には二つ知られている．一つは，ブーロスの iff を用いたもの，もう一つは B.ラバーンと L.ラバーンの入れ子状の質問[2]である．

本研究では最強のパズル”The Hardest Logic Puzzle Ever”を一般化することで，必要な質問数の予測や解法の形式化を行う．

2　準備

本節では，最強のパズルの概念や iff 解法に関する重要な性質について述べる．

2.1　スマリヤンのパズルと最強のパズルの解法の関係

最強のパズルは, 1996 年にブーロスが” The Hardest Logic Puzzle Ever”と題して発表した論理パズルである．これは，正直者，嘘つき，気まぐれ屋の三人に三回質問をすることで，登場人物の属性を特定する，というものである．しかし，回答が Da と Ja という意味不明な言葉で返ってくる．

最強のパズルはスマリヤンの正直者と嘘つきパズル[7]の拡張と言える．まずスマリヤンのパズルには，常に本当のことを言う正直者と，常に本当とは反対のこと，つまり嘘をつく嘘つきが登場する．そして彼自身の発言あるいは，彼らに対する Yes/No で答えられる質問に対する回答に

＊ 本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである．

†本研究の一部は KAKENHI(C)20K03711 及び 23K10991 の援助を受けたものである．

よって，例えば村人の属性や宝物の入った当たりの箱を特定するというパズルである．

これにいくつか手を加えることで最強のパズルになる．1 つは，登場するのは正直者と嘘つきのみだが，彼らの質問に対する回答が Da と Ja という意味不明なものである．これは入れ子状の質問という解法が有効である．次に回答は Yes/No だが，回答がランダムな気まぐれ屋という属性を追加したものである．これには回答者が気まぐれ屋かどうか，という場合分けが有効である．以上より，最強のパズルはスマリヤンパズルの拡張であり，この 2 つの解法を組み合わせることで解くことができる．

2.2　ブーロスの解法：iff

ブーロスは iff(A if and only if B)を用いた解法を示した．

「ローマがイタリアにある場合に限って，Da は Yes を意味するか？」という質問を例にする．ここで最も重要なことは「ローマがイタリアにある」が True であるから Da がどんな意味を持っているかにかかわらず，この質問の回答から回答者の属性を判断できることである．

まず下図が示すように，この質問に対しては Da=Yes/No の二通りの場合分けが考えられる．

①	②
Da=Yesの場合 正直者ならDaと答える(Yesを意味する) 嘘つきならJaと答える(Noを意味する)	Da=Noの場合 正直者ならDaと答える(Noを意味する) 嘘つきならJaと答える(Yesを意味する)

図 1：iff の場合分け

そもそも同値とは A と B という命題があって，その両方が True または False のときに True になる関係のことである．この iff 解法ではその考えを使用している．

例えば上記図①に示している Da=Yes を意味する場合は，質問の「ローマがイタリアにある」は True であり(これは自明である)，「Da=Yes を意味するか？」も True になる．これら二つの命題は True であるので，同値性より「Da はローマがイタリアにあるならば,Yes を意味する」という命題は True になる．よって質問に対する英語での正しい回答は Yes である．したがって正直者は Da と答える．上記図②も同様に考えられる．

つまり，「ローマがイタリアにある」にあたる命題が True なので,Da がどんな意味を持っているかにかかわらず，正直者なら Da，嘘つきは Ja と答えるので，この質問の回答者の属性を判断することができる．

3　ブーロスの最強のパズルの解法

気まぐれ屋を追加したり，回答の言葉を意味不明にすることでスマリヤンのパズルを拡張できる．これらに対する解法は「入れ子状の質問」と「気まぐれ屋か否かの場合分け」であると 2.1 で示した．この 2 つの解法が，なぜ最強のパズルにおいて有効であるかについて示す．

3.1　最強のパズルの問題文

問題文は『数理パズルで楽しく学べる論理学』[6]から引用した．

登場人物は A, B, C の三人である．この中の一人は正直者であり，一人は嘘つき，一人は気まぐれ屋と呼ばれている．正直者はいつも真実を語り，嘘つきはいつも真実の否定(偽)を語り，そして気まぐれ屋は真実または偽のどちらか一方をランダムに語る. A, B, C の一人に対して Yes/No の質問をして，誰が正直者であるか，嘘つきか，気まぐれ屋であるかを特定したい．ただし，彼ら三人は日本語の質問を理解することはできるが，彼らの回答は Da または Ja という彼らの言葉で返ってくる．残念ながら, Da が Yes の意味なのか，それとも Ja が Yes の意味なのかは不明である. Da または Ja のどちらか一方が Yes であり，他方が No を指している．質問は三回まで許されている．三つの質問$Q1, Q2, Q3$ を順に尋ねて誰が誰であるかを判定せよ.

3.2　気まぐれ屋か否かの場合分け

気まぐれ屋の回答からは何の情報も得られない．しかし場合分けを活用することで, 1 問目の時点では回答者が正直者，嘘つき，気まぐれ屋(以下，それぞれ T, F, R と言う)なのか分からないのに, 2 問目以降の行動を決定できる.

例えば 1 問目の回答者を A とし, R か否かの 2 通りに場合分けできる.

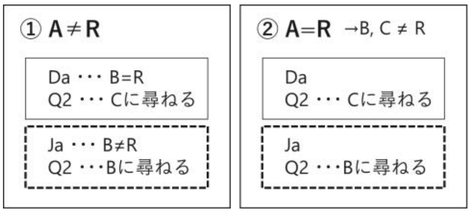

図 2：1 問目の場合分け

上図①のように A≠R(A=T or F)の場合，それぞれ 2 問目を尋ねるべき人，つまり確実に R ではない人を A の回答から特定できる．一方②A=R の場合，この人物はランダムに回答するため何の情報も得られない．しかし, B も C も R でないので 2 問目を尋ねるべき人が決まっている．ここでは，①A≠R の場合の考えをそのまま用いる．つまり Da と返答があったら次は C に尋ねることを, A=R の場合も適用することで少なくとも 2 問目を尋ねる人を決定できる.

3.3　B.ラバーンと L.ラバーンの解法：入れ子状の質問

入れ子状の質問とは, B.ラバーンおよび L.ラバーンが考案した，正直者と嘘つきに用いると得たい情報を 1 回の質問で得ることができる質問手法である[2]. この質問手法は，正直者と嘘つきの場合分けが不要である．これはその名の通り，入れ子状に質問の中に質問を忍ばせている.

なぜ入れ子状の質問が有効なのかについては，以下の質問を例にとる.

例：A に『もしあなたに「B は正直者ですか？」と尋ねたら Da と答えますか？』と尋ねる.

E を q をとる関数だとする．この例では E=「もしあなたに q と質問したら, Da と回答しますか？」, q=「B は正直者ですか？」とする.

ここで重要なのは，正直者は常に真実を言うことである．正直者が True である q に関して尋ねられたら，自然言語では Yes と答える．q が False であれば No と答える．一方，嘘つきならば, True である q に関して尋ねられたら Yes と答えるべきところを，嘘をついて No と言う．同様に

q が False であれば Yes と答える．表 1 の破線部で囲まれた箇所から分かるように，単純に q のみについて尋ねても，正直者も嘘つきも Yes または No と答える可能性があるため，この場合において得られる回答からは何の情報も得られない．

しかし，嘘つきにもう一度嘘をつかせることで情報を得られる．嘘つきが q に No と答えた場合, E(q)の質問全体に対してさらに嘘をつかせると Yes と答える．

よって E(q)を尋ねられた場合，正直者と嘘つきは q=True なら Yes と答える．

これが入れ子状質問の特徴である．つまり，入れ子状の質問 E(q)で True または False のどちらかが問われたとき, Da という回答は q が True であることを示し, Ja という回答は q が False であることを示す．

表 1 ：q と E(q)の回答の関係

回答者	q = Bは正直者ですか？	回答者↔q	qに対する英語での回答	E(q)の回答
T	<u>True</u>	True	Yes	<u>Yes/Da</u>
T	False	False	No	No/Ja
F	<u>True</u>	False	**No**	もう一度嘘をつく	<u>**Yes**/Da</u>
F	False	True	**Yes**	**No**/Ja

4　命題論理による形式化

質問，回答者，回答の三つを命題論理の論理式を用いて形式化することで, iff 形式の質問と入れ子状の質問の意味を簡潔に説明できる[3].

ここで使う道具は命題変数と同値式，否定の 3 つである．

4.1　スマリヤンのパズルの形式化

スマリヤンのパズルでは回答者と回答の二項関係しかないため，同値式で形式化できる．形式化には命題変数を用いる．命題変数は True または False の二値のうち，必ずどちらか一方を持つ．

「回答者 A が正直者である」ことを True または False の値を持つ命題変数 A と記号化する．このとき, A=T すなわち「回答者 A は正直者」の時に限り命題変数 A の値は True, A=F すなわち「回答者 A は嘘つき」の時に限り命題変数 A の値は False と定義する．そして回答を True または False の値を持つ命題変数 Y と記号化する．このとき,「回答が正しい」時に限り命題変数 Y の値は True,「回答が正しくない」時に限り命題変数 Y の値を False と定義する．正直者(T)は常に本当のこと(True)を言い，嘘つき(F)は嘘をつく(False)．つまり回答者 A と回答 Y の間には同値性があるため，以下のように論理式で書ける．

$$A \leftrightarrow Y$$

4.2　最強のパズルの形式化

最強のパズルでは，質問，回答者，回答の三項関係に置き替えることが出来る．

命題変数 X は「質問内容」を表す True または False の値を持つ命題変数である．このとき，

X=True ならば「質問内容は正しい」ことを，X=False ならば「質問内容は正しくない」ことを意味する．

まず，質問 X と回答者 A は同値である．回答者が正直者と嘘つきの場合分けで考える．その真偽に応じた場合分けを図 3 に示す。次に、質問 X と回答者 A の同値式の真理値表を表 2 で示す。これらから，回答 Y は同値式$X \leftrightarrow A$の真理値に対応していることが分かる．

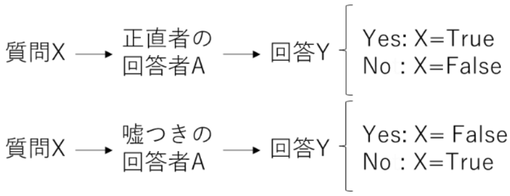

図 3：回答者 A の場合分けによる回答

同値式$X \leftrightarrow A$の真理値を表 2 として表す．

表 2：同値式$X \leftrightarrow A$の真理値表

A	X	$X \leftrightarrow A$	自然言語による回答
True	True	True	Yes
True	False	False	No
False	True	False	No
False	False	True	Yes

つまり，回答者 A が正直者，嘘つきに関わらず，式$X \leftrightarrow A$の真理値が True の時は質問 X に対する回答者 A の回答が Yes であることを意味している．一方，式$X \leftrightarrow A$の真理値が False の時は回答が No であることを意味している．

これまでの説明より、質問，回答者，回答の命題変数 X, A, Yはそれぞれ True または False の値を持つ．よって，質問 X，回答者 A，回答 Y の関係は以下の論理式でかける．

$$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Y$$

これの妥当性を，回答者 A の場合分けによって述べる．

A=T の場合，回答者を表す命題変数 A の値は True であり A は単位元であるため，以下のように表せる．

$$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Y \Leftrightarrow X \longleftrightarrow Y$$

$X \longleftrightarrow Y$が成り立つことから，回答者 A が正直者であることを意味している．

一方, A=F の場合, A の値は False であるため以下のように表せる．

$$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \longleftrightarrow Y$$

$\neg X \longleftrightarrow Y$と同値であり，質問と回答の真理値が反転しているため，回答者 A が嘘つきであることを意味している．

以上より，$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Y$という記号化が妥当であることが示された．

4.3 iff 形式の質問の形式化

ここでは「ローマがイタリアにある場合に限って, Da は Yes を意味するか？」という質問を例にする．

「回答者 A が正直者である」ことを True または False の値を持つ命題変数 A と記号化する．こ

のとき, A=T すなわち「回答者 A は正直者」の時に限り命題変数 A の値は True, A=F すなわち「回答者 A は嘘つき」の時に限り命題変数 A の値は False と定義する．そして Da/Ja による回答を True または False の値を持つ命題変数 Y と記号化する．このとき Y は回答が Da であることを意味し，$\neg Y$ は回答が Ja であることを表している．命題変数 Y が持つ値は必ず True/False のどちらかであるが，ここではその意味を未定とする．また, Yes/No による回答を True または False の値を持つ命題変数 Y' と記号化する．このとき, Y'=True ならば「回答は Yes」, Y'=False ならば「回答は No」であることを意味する．さらに「ローマがイタリアにある」という命題を True または False の値を持つ命題変数 X で記号化する．このとき，X=True ならば「ローマがイタリアにある」ことを, X=False ならば「ローマがイタリアにない」ことを意味する．

これらを用いて質問に対する回答が Da である場合の iff 形式の質問は以下の式で表せる．

$$((Y \leftrightarrow Y') \leftrightarrow X) \leftrightarrow A \leftrightarrow Y$$

ここで X=True, Y'=True の場合，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} ((Y \leftrightarrow Y') \leftrightarrow X) \leftrightarrow A \leftrightarrow Y &\Leftrightarrow (Y \leftrightarrow Y') \leftrightarrow A \leftrightarrow Y \\ &\Leftrightarrow Y' \leftrightarrow A \\ &\Leftrightarrow A \end{aligned}$$

よって回答 Da が得られると, A=T すなわち正直者であることが分かる．

また，仮に回答が Ja である場合の iff 形式の質問は以下の式で表せる．

$$((Y \leftrightarrow Y') \leftrightarrow X) \leftrightarrow A \leftrightarrow \neg Y$$

ここで X=True, Y'=True の場合，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} ((Y \leftrightarrow Y') \leftrightarrow X) \leftrightarrow A \leftrightarrow \neg Y &\Leftrightarrow Y' \leftrightarrow A \leftrightarrow \bot \\ &\Leftrightarrow \neg A \end{aligned}$$

よって回答 Ja が得られると, A=F すなわち嘘つきであることが分かる．

Y の値は必ず True/False のどちらか必ず一方になるが，どちらかは定まっていない．しかし式を簡単にしていくと Y が消去されることから, Y の意味に関わらず A の属性を特定できる．

4.4　入れ子状の質問の形式化

ここでは『もし A に「B は気まぐれ屋ですか？」と尋ねたら Da と答えますか？』という質問を例にする．

「回答者 A が正直者である」ことを True または False の値を持つ命題変数 A と記号化する．このとき, A=T すなわち「回答者 A は正直者」の時に限り命題変数 A の値は True, A=F すなわち「回答者 A は嘘つき」の時に限り命題変数 A の値は False と定義する．そして Da/Ja による回答を True または False の値を持つ命題変数 Y と記号化する．このとき Y は回答が Da であることを意味し，$\neg Y$ は回答が Ja であることを表している．命題変数 Y が持つ値は必ず True/False のどちらかであるが，ここではその意味を未定とする．また,「B は気まぐれ屋である」という命題を True または False の値を持つ命題変数 X で記号化する．このとき，X=True ならば「B は気まぐれ屋である」ことを, X=False ならば「B は気まぐれ屋ではない」ことを意味する．

これらを用いて Y=Da の場合の入れ子状の質問は以下の式で表せる．

$$((X \leftrightarrow A) \leftrightarrow Y) \leftrightarrow A \leftrightarrow Y$$

ここで，この式は以下のように表せる．

$$((X \leftrightarrow A) \leftrightarrow Y) \leftrightarrow A \leftrightarrow Y \Leftrightarrow X$$

よって回答 Da が得られると, X=True であることが分かる．

また，仮に回答が Ja である場合の入れ子状の質問は以下の式で表せる．

$$((X \leftrightarrow A) \leftrightarrow Y) \leftrightarrow A \leftrightarrow \neg Y$$

ここで，この式は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} ((X \leftrightarrow A) \leftrightarrow Y) \leftrightarrow A \leftrightarrow \neg Y &\Leftrightarrow X \leftrightarrow \bot \\ &\Leftrightarrow \neg X \end{aligned}$$

よって回答 Ja が得られると, X=False であることが分かる．

Y の値は必ず True/False のどちらか必ず一方になるが，どちらかは定まっていない．しかし式を簡単にしていくと Y が消去されることから, Y の意味に関わらず X の真偽を判定できる．

4.5　まとめ

iff 形式の質問と入れ子の質問は，形式化すると同じ同値な論理式に形式化できる．しかし，この形式化は回答者の属性が正直者または嘘つきの場合のみである．任意の割り振りに対して自然言語で表されたものを命題論理を用いた式で書き，規則を用いてその式を簡単にしていくと，命題変数やその否定が得られる. Da/Ja の意味が分からなくても，回答者の属性や質問の真偽を判定できることが重要である．このように，最強のパズルは論理式を解くことでパズルが解ける．

5　必要な質問数の最小値

ブーロスの最強のパズルを合わせた 3 つの変種を用いて，最低限必要な質問数を考察した．なお，変種の設定は『A general form on the logic puzzles of Boolos』[4]から引用した．

5.1　最強のパズルの最小質問数

A, B, C が取りうる属性のパターンをすべて列挙すると，以下の表 3 で表す通り全部で 6 パターンある．

また，回答の Da と Ja をそれぞれ Da = 0, Ja = 1 とみなし，その各パターンを得るための回答を 0 と 1 で表す．例えば表 3 より, A = T, B = F, C = R の場合は, 3 問とも Ja を得ることで特定できるため, 111 で表現できる．

表 3：最強のパズルの回答の置き換え

	A	B	C	Q1	Q2	Q3	Da=0, Ja=1
1	T	F	R	Ja	Ja	Ja	111
2	T	R	F	Da	Ja	Ja	011
3	F	T	R	Ja	Da	Ja	101
4	R	T	F	Ja	Da	Da	100
5	F	R	T	Da	Da	Ja	001
6	R	F	T	Ja	Ja	Da	110

0, 1 の回答の系列で区別するには例えば 2bit あれば 4 通りの系列を生成できる．このように 6

パターンの属性を 0, 1 の回答で表すのに最低限必要な bit 数は 3 である．

なお，属性 6 パターンに対して 2 つが冗長であるが，ランダムで用いられる．

5.2　R=1 人, T=2 人または F=2 人の場合の最小質問数

登場する属性を R=1 人, T=2 人または R=1 人, F=2 人の場合を考える．今回は T=2 人とする．

この設定における A, B, C が取りうる属性のパターンをすべて列挙すると，以下の表 4 で表す通り全部で 3 パターンある．

表 4：R=1 人, T または F=2 人の場合の回答の置き換え

	A	B	C	Q1	Q2	Da=0, Ja=1
1	R	T	T	Da	Da	00
2	T	R	T	Da	Ja	01
3	T	T	R	Ja	Ja	11

3 パターンの属性を 0, 1 の回答の系列で区別するのに最低限必要な bit 数は 2 である．

なお，属性 3 パターンに対して 1 つが冗長であるが，ランダムで用いられる．

5.3　R=1 人, T + F=2 人の場合の最小質問数

登場する属性を R=1 人, T+F=2 人(正直者と嘘つきの合計が 2 人)の場合を考える．

この設定における A, B, C が取りうる属性のパターンをすべて列挙すると，以下の表 5 で表す通り全部で 12 パターンある．

表 5：R=1 人, T+F=2 人の場合の回答の置き換え

	A	B	C	Q1	Q2	Q3	Q4	Da=0, Ja=1
1	R	T	T	Ja	Da	Da	Da	1000
2	R	F	F	Ja	Da	Da	Ja	1001
3	R	T	F	Ja	Ja	Da	Da	1100
4	R	F	T	Ja	Ja	Da	Ja	1101
5	T	R	T	Da	Da	Ja	Da	0010
6	F	R	F	Da	Ja	Ja	Ja	0111
7	T	R	F	Da	Ja	Ja	Da	0110
8	F	R	T	Da	Da	Ja	Ja	1100
9	T	T	R	Ja	Da	Ja	Da	1010
10	F	F	R	Ja	Ja	Ja	Da	1110
11	T	F	R	Ja	Da	Ja	Ja	1011
12	F	T	R	Ja	Ja	Ja	Ja	1111

12 パターンの属性を 0, 1 の回答の系列で区別するのに最低限必要な bit 数は 4 である．

なお，属性 12 パターンに対して 4 つが冗長であるが，ランダムで用いられる．

5.4　まとめ

パズルの全属性パターンは，適切な bit 数を用いて 0, 1 の回答の系列で区別できる．例えば，最強のパズルの全属性パターンを区別するには 5.1 で述べた通り 3bit を要する．このことから，最強のパズルを解くのに必要な最小質問数は, 3 問であることが分かる．

したがって R=1 人の場合，最強のパズルおよび 3 つの変種の最小質問数は以下の式(1)を満たす最小の n 問である．

$$2^n \geq \text{全属性パターン数} \tag{1}$$

6　まとめと今後の課題

ブーロスの最強のパズルを一般化し考察することで，iff と入れ子状の質問を形式化すると両者の間には同値関係があることが分かった．また，Da/Ja の意味が分からなくても，質問の真偽判定ができることが分かった．

次に，気まぐれ屋が1人の場合，登場人物が取りうる属性の全パターンを列挙することで，情報量的な観点から各パターンの特定に必要な質問数を予測することができた．

今後の課題としては，最強のパズルにおいてスマリヤンが提唱する"natural sounding question"に当たる質問手法のアイデアを探りたい．iff と入れ子状の質問には同値関係があったため，この新しい質問手法も両者と同値関係を持つものと考える．また，最強のパズルの形式化において"Answerer=Random"の場合も含んだ形式化は，True, False, Random の値を用いた三値論理や多値論理の手法が考えられる．

参考文献

[1] G. Boolos. The Hardest Logic Puzzle Ever. The Harvard Review of Philosophy. vol.6. p.62-65. 1996

[2] B. Rabern & L. Rabern. A simple solution to the hardest logic puzzle ever. ANALYSIS 68.2. p.105-112. 2008

[3] K. Fujita. On formalization of logic puzzles *a' la* Smullyan. 京都大学数理解析研究所講究録 2193. 2021

[4] K. Fujita & T. Kurata. A general form on the logic puzzles of Boolos. 京都大学数理解析研究所講究録 2229. pp. 21-29. 2022

[5] K. Fujita & T. Kurata. Boolos' "The hardest logic puzzle ever" and coinduction. 京都大学数理解析研究所講究録 2265. pp. 47-57. 2023

[6] K. Fujita. 数理パズルで楽しく学べる論理学. コロナ社. 2022

[7] R. Smullyan. What Is the Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles. Prentice Hall Publications. 1976