Theta lifts to certain cohomological representations of indefinite orthogonal groups

慶應義塾大学/齋藤陽平
Yohei Saito
Keio Univesity

1 Introduction

本稿では RIMS 共同研究「保型形式の研究」において行われた著者の発表について概要をまとめる. 証明の詳細は [MS04] に委ねるものとし, ここでは結果と研究のアイデアについて解説したい.

$b^+ \geq 2$, $b^- \geq 1$ に対し, $V_{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の sigunature (b^+, b^-) の quadratic space とする. また, $\mathrm{O}(V)$ を $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ の直交群とし, $P \subset \mathrm{O}(V)$ を V の isotropic line を固定する maximal paraboilic subgroup とする. Howe と Tan は [HT93] において, P の指標から誘導される $\mathrm{O}(V)$ の退化主系列表現 $I_\varepsilon(\lambda+\rho)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = \pm$, $\rho = \frac{b^+ + b^-}{2} - 1$) について研究を行い, その組成列を完全に明らかにした (記号の詳細については本稿の Section 2 を参照). この研究から, 特に $k = \lambda - \frac{b^+ - b^-}{2} + 1 \in \mathbb{N}$ が十分に大きく $\varepsilon = (-1)^k$ が成り立つとき, $I_\varepsilon(\lambda+\rho)$ はただ一つの unitalizable な irreducible submodule $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ を含むことがわかる. ここで, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の性質を二つ列挙する.

- $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の underlying $(\mathfrak{g}, K)$-module は derived functor module $A_{\mathfrak{q}}(\lambda - \rho)$ と同型である ([Ko21, Section 2]). ここで, $\mathfrak{q}$ は $\mathrm{O}(V) \cong \mathrm{O}(b^+, b^-)$ の $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(b^+ - 2, b^-)$ と同型な部分群に対応する Levi subalgebra を考えている.

- $A_{\mathfrak{q}}(\lambda-\rho)$ すなわち $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ は reductive dual pair $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(b^+, b^-)$ における局所テータ対応のもとで, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ の holomorphic discrete series に対応する ([Li90, Section 6], [BMM17, Section 6]).

Li [Li92] は $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{O}(V_{\mathbb{Q}})$ の大域テータ対応が上述の局所テータ対応と整合することを示し, その帰結として $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ が $L^2(\varGamma\backslash \mathrm{O}(V))$ に現れることを示した. 本研究では, この結果を背景に, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ の正則保型形式の lifting として $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ に関係する保形形式の構成した. 具体的な lifting の構成には Bocherds[Bo98] の方法を用いた.

$\mathbb{R}^{b^+}$ 上の m 次斉次多項式 p で Laplacian $\Delta_{b^+} = \sum_{j=1}^{b^+} \partial^2/\partial x_j^2$ に対し, $\Delta_{b^+} p = 0$ を満たす元全体を $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^{b^+})$ とおく. すなわち, $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^{b^+})$ は調和多項式全体の空間である. よく知られているように, $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^{b^+})$ は $\mathrm{O}(b^+)$ の既約表現をなし, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の K-type 分解は次のように $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^{b^+})$ を用いて与えられる:

$$\bigoplus_{m,n \in \mathbb{N},\ m-n \in 2\mathbb{N}+k} \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^{b^+}) \boxtimes \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^{b^-}).$$

本研究ではこの分解における $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の minimal K-type $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{b^+}) \boxtimes \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^{b^-}) = \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{b^+}) \boxtimes \mathbf{1}$ に焦点を絞り, この空間に属するテータリフトの構成に取り組んだ. 特に, Poincaré series の lifting を計算することで, 等式 $\vartheta_L(f, g; p) = \vartheta_L(f, g; Hp)$ (Corollary 4.3) を示した. この等式は Borcherds の方法と組み合わせることにより, minimal K-type に属する lifting の計算を

単純化することができる．その結果として, $b^+ > 2$ の場合に, Fourer 展開の明示式 (Section 5 Theorem 5.3) を得た．これが本研究の主結果である．ここで $b^+ = 2$ の場合の lifting にも言及しておく．$b^+ = 2$ のとき, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ は $\mathrm{O}(2, b^+)$ の正則離散系列表現である．このとき, theta lift の Fourier 展開は Oda[Od77] や Rallis-Schiffmann [RS81] によって明示的に計算されており, cusp form となることが知られている．$b^+ > 2$ ときは, $b^+ = 2$ の場合とは異なり $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ は離散系列ではなく, この違いは Theorem 5.3 の Fourier 展開における, 定数項の存在に確認できる．

上述の通り, Li [Li90], [Li92] の結果から, 本研究で構成した lifting は $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ と関係することが予想される．本稿では最後に, その関係を議論するために, Theorem 5.3 の展開に現れる特殊関数と $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の minimal K-type の元の Bessel 積分との関係に関する結果を紹介する．その結果の証明は Pollack [Po22] や Kobayashi, Mano [KM11] の議論にならい特殊関数の Fourier 逆変換を計算することによって与えられる．

2 Degenerate principal series on $\mathrm{O}(V)$

この節では, $\mathrm{O}(b^+, b^-)$ 上の退化主系列表現を紹介し, その部分表現として $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ を定義する．本節の内容は [HT93] に基づく．

b^+, $b^- \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $b^+b^- > 0$ を満たす正整数とし, $b = b^+ + b^-$ とおく．$V = \mathbb{R}^{b^+,b^-}$ を次の双線型形式 (,) が定義された実ベクトル空間とする:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{b^+} x_j y_j - \sum_{j=b^++1}^{b} x_j y_j \quad (x = \sum_{j=1}^{b} x_j e_j, \quad y = \sum_{j=1}^{b} y_j e_j).$$

ここで $\{e_j\}_{0 \le j \le b}$ は V の標準基底である．$Q(x) = (x, x)/2$ をこの内積に付随する二次形式とし, (V, Q) の直交群を $\mathrm{O}(V)$ とかくことにする．

次に, $\mathrm{O}(V)$ の parabolic subgroup $P = MN$ を以下のように定義する．まず,

$$z_0 = \frac{e_1 + e_b}{2}, \ z_0^* = e_1 - e_b, \tag{2.1}$$

とする． この時 $(z_0, z_0) = (z_0^*, z_0^*) = 0$, $(z_0, z_0^*) = 1$ である． そのため, $\langle z_0, z_0^* \rangle$ は V の中で hyperbolic plane をなし, $V_1 = \langle e_j \rangle_{j=2}^{b-1}$ とおくと $V = \langle z_0, z_0^* \rangle \oplus V_1$ が成り立つ． ここで, hyperbolic plane $\langle z, z^* \rangle$ を固定する maximal parabolic subgroup を $P = MN$ とおく．このとき, 次のような同型が成り立つ:

$$n_0 : V_1 \simeq N, \quad m_0 : \mathrm{GL}(\langle z_0 \rangle) \times \mathrm{O}(V_1) \simeq M. \tag{2.2}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ と $\pm$ の符号に対し, P の指標 $\chi_\alpha^\pm$ を

$$\chi_\alpha^\pm\big(n_0(x) m_0(a, g_1)\big) = \begin{cases} a^\alpha, & a > 0, \\ \pm |a|^\alpha & a < 0 \end{cases}$$

と定義する．このとき, この指標に対応する誘導表現 $I_\pm(\alpha)$ は次のように定義される:

$$I_\pm(\alpha) = \big\{ f \in C^\infty(\mathrm{O}(V)) \mid f(pg) = \chi_\alpha^\pm(p) f(g), \quad p \in P, \ g \in \mathrm{O}(V) \big\} \tag{2.3}$$

直交群 $\mathrm{O}(V)$ は右変換 $g \cdot f(x) = f(xg)$ によってこの空間に作用している．

$V^+ = \langle e_j \rangle_{j=1}^{b^+}$, $V^- = \langle e_j \rangle_{j=b^++1}^{b}$ とおき, definite な空間による直和分解 $V = V^+ \oplus V^-$ を考える. このとき, この分解を保つ部分群として $\mathrm{O}(V)$ の maximal compact subgroup $K \cong \mathrm{O}(V^+) \times \mathrm{O}(V^-)$ が定まる. non-compact な Lie 群の無限次元表現においては maximal compact group への制限が一つの重要な情報となる. ここで, $I_\pm(\alpha)$ の K-module としての構造はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
I_+(\alpha) &\cong \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ m+n\colon \mathrm{even}}} \mathcal{H}^m(V^+) \boxtimes \mathcal{H}^n(V^-), \\
I_-(\alpha) &\cong \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ m+n\colon \mathrm{odd}}} \mathcal{H}^m(V^+) \boxtimes \mathcal{H}^n(V^-)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

となる. ただし, $\mathcal{H}^l(V^\pm)$ を $V^\pm$ 上の l 次調和多項式の空間としている. [HT93, Lemma 2.2] より, さらに精密に $\mathrm{O}(V^+)\times\mathrm{O}(V^-)$-equivalent な埋め込み $j_{\alpha,m,n} = j_\alpha : \mathcal{H}^m(V^+) \boxtimes \mathcal{H}^n(V^-) \to I_\pm(\alpha)$ が

$$
j_\alpha(h_1 \otimes h_2)(g) = h_1((g^{-1}z)^+)h_2((g^{-1}z)^-)\|(g^{-1}z)^+\|^{-\alpha-m-n}, \ g \in \mathrm{O}(V) \tag{2.5}
$$

と定義できる.

ここで, [HT93, Sections 2, 3] より次の命題が成り立つ.([Ko21, Proposition 2.4] も参照)

Proposition 2.1. $b^+ > 2$ とし, $k \in \mathbb{N}$ を $k - \frac{b^+-b^-}{2} > 1$ を満たすようにとる. このとき, $\varepsilon = (-1)^k$ とすると, $I_\varepsilon(k + b^+ - 2)$ はただ一つの既約部分表現 $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ を持つ. 特に, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ は *unitarizanble* であり, その $\mathrm{O}(V^+)\times\mathrm{O}(V^-)$*-types* は次のようになる*:*

$$
\bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N} \\ m-n\in 2\mathbb{N}+k}} \mathcal{H}^m(V^+) \boxtimes \mathcal{H}^n(V^-).
$$

本研究において焦点となるのは, 上の分解における K-module

$$
\mathcal{H}^{k,0}(V) = \mathcal{H}^k(V^+) \boxtimes \mathcal{H}^0(V^-) = \mathcal{H}^k(V^+) \boxtimes \mathbf{1} \tag{2.6}
$$

である. 本稿では, この K-module を $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の minimal K-type と呼ぶことにする. ここで, (2.5) より minimal K-type に属する元は $h \in \mathcal{H}^k(V^+)$ を用いて

$$
f(g;h) = h((g^{-1}z)^+)\|(g^{-1}z)^+\|^{-2k-b^++2}, \quad g \in \mathrm{O}(V), \tag{2.7}
$$

と表せることに注意しておく.

3 Theta liftings

本節では, ベクトル値の正則保形形式と Borcherds[Bo98] の theta seires を定義し, それらの paring として与えられる theta lift について解説する.

3.1 vector-valued modular form

(L, q) を signature (b^+, b^-) の even lattice とし, sig$(L)=b^+ - b^-$ とおく．ここで, L' で L の dual を表し, L に付随する discriminant group を $D_L = L'/L$ とおく．このとき, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbb{C}[D_L]$ 上の Weil 表現 ρ_L を以下で定義する．$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の非自明な二重被覆群とし, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の逆像を表すことにする．$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ の元は $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と正則関数 $\phi : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{C}$ で $\phi(\tau)^2 = c\tau + d$ を満たすもの対 (A, ϕ) で表される．任意の even lattice L に対し, $\mathfrak{e}_\gamma$ $(\gamma \in D_L)$ で $\mathbb{C}[D_L]$ の standard basis を表すことにする．このとき, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の Weil 表現 $\rho_L : \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}\ \mathbb{C}[D_L]$ は次の関係式で定義される:

$$\rho_L(T)\mathfrak{e}_\gamma = \mathbf{e}(q(\gamma))\mathfrak{e}_\gamma, \quad \rho_L(S)\mathfrak{e}_\gamma = \frac{\mathbf{e}(-\mathrm{sig}(L)/8)}{\sqrt{|D_L|}} \sum_{\delta \in D_L} \mathbf{e}(-(\gamma, \delta))\mathfrak{e}_\delta.$$

ここで, $S = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \sqrt{\tau}\right)$, $T = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1\right)$ は $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の生成元である．

半整数 $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を考え, $\nu > 3/2$ と仮定する．$\mathbb{H}_1$ 上の $\mathbb{C}[D_L]$ 値の正則関数 f が cusp $i\infty$ においても正則で, 任意の $(M, \phi) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に対して, $f(M\tau) = \phi(\tau)^{2\nu}\rho_L(M, \phi)f(\tau)$ を満たすとき, f を weight ν, type ρ_L の正則保型形式と呼ぶ．ここで, 正則保型形式は次のような Fourier 展開をもつことが知られている:

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in D_L} f_{L+\gamma}(\tau)\mathfrak{e}_\gamma = \sum_{\gamma \in D_L} \sum_{n \in q(\gamma)+\mathbb{Z}_{\geq 0}} c(n, \gamma)\mathbf{e}(n\tau)\mathfrak{e}_\gamma, \tag{3.1}$$

特に, f が任意の $\gamma \in D_L$ に対し, $c(0, \gamma) = 0$ を満たすとき, f をカスプ形式という．ここで, weight ν, type ρ_L の正則カスプ形式の空間を $S_\nu(D_L)$ で表すことにする．

weight ν, type ρ_L の正則保型形式 f, g に対し,

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_1} \langle f(\tau), g(\tau) \rangle_L y^\nu \frac{dxdy}{y^2} \tag{3.2}$$

が収束するとき, これを $(f, g)_\tau$ と表す．特に, f, g の少なくとも一方がカスプ形式であるときこの積分はつねに収束する．

3.2 Generalized theta series and theta lifts

L の自己同型群を $\mathrm{O}(L)$ と置く．これは $\mathrm{O}(L_\mathbb{R})$ の離散部分群をなす．$\mathrm{SO}(L_\mathbb{R})^+$ で $\mathrm{O}(L_\mathbb{R})$ の identity component を表し, $\mathrm{SO}(L) = \mathrm{O}(L) \cap \mathrm{SO}(L_\mathbb{R})^+$ とおく．このとき discriminant kernel $\mathit{\Gamma}_L$ を

$$\mathit{\Gamma}_L = \{g \in \mathrm{SO}^+(L) \mid g\lambda - \lambda \in L \text{ for all } \lambda \in L'\}. \tag{3.3}$$

と定義する．

$(L_\mathbb{R}, q)$ から前節の (V, Q) への同型 v_0 を一つ固定する．このとき, $V = V^+ \oplus V^-$ に伴い, $v_0(x) = v_0^+(x) + v_0^-(x \in L_\mathbb{R})$ と書くことにする．$\mathcal{P}^m(V)$ で V 上の m 次斉次多項式の空間を表す．$p \in \mathcal{P}^m(V)$ が V^+ の変数に対して m^+ 次斉次多項式であり, V^- の変数に対して m^- 次斉次多項式であるとき, p を degree (m^+, m^-) の斉次多項式と呼ぶことにする．また, そのような多項式全体の空間を $\mathcal{P}^{m^+, m^-}(V)$ で表す．このとき, $\Pi_{k,0}^{b^+, b^-}$ の minimal K-type に対応する空間 $\mathcal{H}^{k,0}(V) = \mathcal{H}^k(V^+) \boxtimes \mathbf{1}$ は $\mathcal{P}^{k,0}(V)$ の元であることに注意する．

ここで, $p(x)\in P^{k,0}(V)$ を一つ取り, $\tau=x+iy\in\mathbb{H}_1$, $g\in \mathrm{O}(L_{\mathbb{R}})$, $\gamma\in D_L$ に対し,

$$\theta_{L+\gamma}(\tau,g;p)=y^{\frac{b^-}{2}}\sum_{\lambda\in L+\gamma}\left[\exp\left(-\frac{\Delta_b}{8\pi y}\right)p\right]\left(v_0(g^{-1}\lambda)\right) \tag{3.4}$$
$$\times\,\mathbf{e}\left(\tau Q(v_0^+(g^{-1}\lambda))+\overline{\tau}Q(v_0^-(g^{-1}\lambda))\right),$$

と定義する. ここで, $\mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}(x\in\mathbb{C})$ であり, $\Delta_b=\sum_{j=1}^b\partial^2/\partial x_j^2$ は V 上の Laplacian である. さらに, $\mathbb{C}[D_L]$-valued theta function を

$$\Theta_L(\tau,g;p)=\sum_{\gamma\in D_L}\theta_{L+\gamma}(\tau,g;p)\,\mathfrak{e}_\gamma. \tag{3.5}$$

で定義する. このとき, [Bo98, Theorem 4.1] より $\Theta_L(\tau,g;p)$ は次の変換公式を満たすことが知られている.

Proposition 3.1. *$k\in\mathbf{N}$, $p(x)\in P^{k,0}(V)$ とする. このとき, $(M,\phi)\in\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ ($M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) に対し,*

$$\Theta_L(M\tau,g;p)=\phi(\tau)^{2k+\mathrm{sig}(L)}\rho_L(M,\phi)\Theta_L(\tau,g;p) \tag{3.6}$$

が成り立つ. ここで, $M\tau=(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$ は一次分数変換を表す.

Γ_L は D_L に自明に作用するため, 任意の元 $g\in\mathrm{O}(V)$, $\tau\in\mathbb{H}_1$, $\gamma\in\Gamma_L$ に対し, $\Theta_L(\tau,g\gamma;p)=\Theta_L(\tau,g;p)$ が成り立つ. すなわち, $\Theta_L(\tau,g;p)$ は discriminant kernel Γ_L に対し保形性をもつ関数である.

今, $\nu=k+\frac{\mathrm{sig}(L)}{2}$ とおき, $\nu>\frac{3}{2}$ と仮定する. このとき, Proposition 3.1 より, $\Theta_L(\tau,g;p)$ は正則ではないが weight ν, type ρ_L の保型形式と同様の変換公式を満たす. そのため, 任意の $f\in S_\nu(D_L)$ と $p(x)\in\mathcal{P}^{k,0}(V)$ に対し,(3.2) の積分を用いて

$$\vartheta_L(f;p)(g)=(f(\tau),\Theta_L(\tau,g;p))_\tau \tag{3.7}$$

を考えることができる. このようにして定義される $\mathrm{O}(V)$ の関数 $\vartheta_L(f;p)(g)$ を f の theta lift と呼ぶ. ここで $\Theta_L(\tau,g;p)$ の $g\in\mathrm{O}(L_{\mathbb{R}})$ に関する保形性から, $\vartheta_L(f;p)(g)$ は同様に Γ_L の左作用で不変な $\mathrm{O}(L_{\mathbb{R}})$ 上の保型形式を与える.

4 Theta lifts of Poincaré series

この節では, Poincaré series の lifting (3.7) の計算を行い, 正則保型形式の lifting における観察 Corollary 4.3 を証明する.

4.1 Representation of $\mathrm{O}(n)$

theta series $\vartheta_L(\tau,g;p)$ の定義 (3.4) より $\vartheta_L(\tau,g;p)$ への maximal compact group の作用は多項式 $p\in\mathcal{P}^{k,0}(V)$ により決定される. そこで, 以下では $\mathcal{P}^{k,0}(V)$ の $\mathrm{O}(n)$-module としての構造を紹介する（詳しくは [Vi68, Chapter IX] を参照).

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, 標準基底を $\{e_j\}_{1\le j\le n}$ とおく. $x=\sum_{j=1}^n x_je_j\in\mathbb{R}^n$ を ${}^t(x_1,\dots,x_n)$ と書き, $\|x\|=\sum_{j=1}^n x_j^2$ とする. このとき, $\mathbb{R}^n$ の Laplacian は $\Delta_n=\sum_{j=1}^n\partial^2/\partial x_j^2$

で与えられる．これは $g \in \mathrm{O}(n)$ の $f \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$ への作用 $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$ で不変な微分作用素である．非負整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n) \mid \Delta_n f = 0\}.$$

で $\mathbb{R}^m$ 上の k 次調和多項式全体の空間を表す．このとき $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{O}(n)$ の既約表現であり，$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{O}(n)$-module として 次のような既約分解をもつ:

$$\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{0 \leq j \leq \left[\frac{k}{2}\right]} \|x\|^{2j} \mathcal{H}^{k-2j}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

今, 任意の元 $p \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$Hp(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{n}{2}+k-j-1)}{4^j j! \Gamma(\frac{n}{2}+k-1)} \|x\|^{2j} \Delta_n^j p(x) \tag{4.2}$$

とおく．このとき, $Hp \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ であり, $H(Hp) = Hp$ が成り立つ．すなわち H は (4.1) における $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ への射影である ([Vi68, p.446, (15)]).

次に, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の基底を構成するために $\mathrm{O}(n-1) \subset \mathrm{O}(n)$ への制限分岐則を考える．${}^t(1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ の固定化部分群として $\mathrm{O}(n-1) \subset \mathrm{O}(n)$ を定義する．$0 \leq l \leq k$ なる $l \in \mathbb{Z}$ と $h \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{n-1})$ に対し, $H(x_1^k - 1h(x'))$ $(x' = {}^t(x_2,\ldots,x_n))$ という形の調和多項式を考える．このような多項式で張られる $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の部分空間を $\mathcal{H}^{nkl}$ とおく．このとき [Vi68, Chapter IX, §3.5] より,

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{l=0}^{k} \mathcal{H}^{nkl}, \tag{4.3}$$

は $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の $\mathrm{O}(n-1)$-module としての既約分解を与える．ここで (4.2) より, $\mathcal{H}^{nkl}$ の元は

$$H(x_1^{k-l}h(x')) = h(x')Hx_1^{k-l} = \frac{(k-l)!}{2^{k-l}} \|x\|^{k-l} C_{k-l}^{\frac{n-2}{2}+l}\left(\frac{x_1}{\|x\|}\right) h(x') \tag{4.4}$$

によって与えられる ([Vi68, p.465, (9)] 参照)．ただし, $n \in \mathbf{N}$, $\lambda > 0$ に対し, $C_n^\lambda(z)$ は Gegenbauer 多項式

$$C_n^\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda+n-j)}{j!(n-2j)!\Gamma(\lambda)} (2z)^{n-2j}$$

を表す．(4.4) と (4.3) より, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の任意の元は $h \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leq l \leq k)$ と Gegenbauer 多項式の積の和で表される．ここで, 上の議論を n に関して帰納的に用いることで以下の結果を得る．

Proposition 4.1. ([Vi68, p.466, (2)]) $n \geq 2$ とし, $\{e_j\}_{0 \leq j \leq n}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．このとき, $k = k_0 \geq k_1 \geq \ldots \geq k_{n-2} \geq 0$ を満たす $\kappa = (k_0, k_1, \ldots, k_{n-3}, \pm k_{n-2}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ に対し, $h_\kappa^n(x)$ を以下のように定義すれば, $\{h_\kappa^n(x)\}_\kappa$ は $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の基底をなす*:*

$$h_\kappa^n(x) = (x_{n-1} \pm i x_n)^{k_{n-2}} \prod_{j=0}^{n-3} \|x\|_j^{k_j - k_{j+1}} C_{k_j-k_{j+1}}^{k_{j+1}+\frac{n-j-2}{2}}\left(\frac{x_{j+1}}{\|x\|_j}\right).$$

ただし, $\|x\|_j^2 = x_{j+1} + \cdots + x_n^2$ である．

Remark 4.1. (4.2) の明示式より, H は Δ_n と $\|x\|$ の多項式として与えられ, $\mathrm{O}(n)$ の作用によって不変である．そのため, Proposition 4.1 では標準基底を用いた座標を固定して $h^n_\kappa(x)$ を構成したが, その議論は $\mathrm{O}(n)$ の作用によって, 任意の正規直交基底を用いた座標へとそのまま移すことができる．そこで以下では, $\mathbb{R}^n$ の基底の取り方によらず, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ の基底を $h^n_\kappa(x)$ と書き, そのとき考えている座標に対して構成した多項式を表すものとする．

4.2 Theta lifts of Poincaré series

$\mathbb{H}_1$ 上の $\mathbb{C}[D_L]$-値関数 $f(\tau)$ に対し, $(M,\phi)\in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の作用を

$$f|_{\nu,L}(M,\phi)(\tau)=\phi(\tau)^{-2\nu}\rho_L(M,\phi)^{-1}f(M\tau),\quad \nu=k+\frac{\mathrm{sig}(L)}{2}.$$

で定義する．以下では $\nu\geq\frac{3}{2}$ と仮定する．$\beta\in D_L$, $0<m\in Q(\beta)+\mathbb{Z}$ と $\tau\in\mathbb{H}_1$, に対して $\mathfrak{e}_\beta(m\tau)=\mathbf{e}(m\tau)\mathfrak{e}_\beta$ とおく．このとき, $\mathbb{C}[D_L]$-値 Poinacaré seires $P_{m,\beta}(\tau)$ を次のように定義する:

$$P_{m,\beta}(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{(M,\phi)\in\widetilde{\Gamma}_\infty\backslash\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})}\mathfrak{e}_\beta(m\tau)|_{\nu,L}(M,\phi). \tag{4.5}$$

ただし, $\widetilde{\Gamma}_\infty=\langle T\rangle$ である．Poincaré series は $S_\nu(D_L)$ の元であり, 任意の cusp form $f\in S_\nu(D_L)$ に対し,

$$(f(\tau),P_{m,\beta}(\tau))_\tau=\frac{2\Gamma(\nu-1)}{(4\pi m)^{\nu-1}}c(m,\beta)$$

を満たすことが知られている．また, この結果から $\{P_{m,\beta}(\tau)\}$ は $S_\nu(D_L)$ の生成元を成す.

今, $b^+>2$, $b^-\geq 1$, $k\in\mathbb{Z}_{0\leq 0}$ に対し以下の条件を仮定する:

$$b^->1 \text{ のとき } k>b^- \quad\text{または}\quad b^-=1 \text{ のとき } k>2. \tag{4.6}$$

この仮定のもとで Poincaré series の theta lift に対し次の結果が成り立つ.

Theorem 4.2. ([MS04, Theorem 4.2]) b^+, b^-, k は上の条件 *(4.6)* を満たすと仮定する．$p\in P^{k,0}(V)$ とする．このとき,

$$\vartheta_L(P_{m,\beta};p)(g)=\frac{2\Gamma\left(k+\frac{b^+}{2}-1\right)}{(2\pi)^{k+\frac{b^+}{2}-1}}\sum_{\substack{\lambda\in L+\beta\\ Q(\lambda)=m}}\frac{Hp\left(v_0^+(g^{-1}\lambda)\right)}{\|v_0^+(g^{-1}\lambda)\|^{2k+b^+-2}}, \tag{4.7}$$

が成り立つ．特に,

$$\vartheta_L(P_{m,\beta};p)(g)=\vartheta_L(P_{m,\beta};Hp)(g)$$

である．

Proof. まず, (4.5) と Proposition 3.1 より, $\vartheta_L(P_{m,\beta};p)(g)$ は形式的に (収束性を無視して)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_1}\sum_{(M,\phi)\in\tilde{\Gamma}_\infty\backslash\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})}\big\langle e_\beta(mM\tau),\rho_L(M,\phi)\Theta_L(\tau,g;p)\big\rangle_L\phi(\tau)^{-2\nu}y^\nu\,\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_1}\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\big\langle e_\beta(mM\tau),\Theta_L(M\tau,g;p)\big\rangle_L\mathrm{Im}(M\tau)^\nu\,\frac{dxdy}{y^2}\\
&=2\int_0^\infty\int_0^1\mathbf{e}(m\tau)\overline{\theta_{L+\beta}(\tau,g;p)}y^\nu\frac{dydx}{y^2}\\
&=2\sum_{\substack{\lambda\in L+\beta\\ Q(\lambda)=m}}\int_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{\Delta_{b^++b^-}}{8\pi y}\right)p\right](v_0(g^{-1}\lambda))\exp\big(-4\pi Q(v_0^+(g^{-1}\lambda))y\big)y^{k+\frac{b^+}{2}-1}\frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

と変形できる. ここで最後の式に

$$\left[\exp\left(-\frac{\Delta_{b^++b^-}}{8\pi y}\right)p\right](v_0(g^{-1}\lambda))=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{(-1)^j[\Delta_{b^+}^j p](v_0^+(g^{-1}\lambda))}{j!(8\pi y)^j}$$

を代入し, y に関する積分を計算すれば, (4.7) を得る. (4.7) の右辺の級数は条件 (4.6) を満たす任意の k に対して絶対収束し, これにより上の変形における和と積分の順序交換が正当化される. 最後に $H(Hp)=Hp$ より,

$$\begin{aligned}
\vartheta_L(P_{m,\beta};Hp)(g)&=\frac{2\Gamma\big(k+\frac{b^+}{2}-1\big)}{(2\pi)^{k+\frac{b^+}{2}-1}}\sum_{\substack{\lambda\in L+\beta\\ Q(\lambda)=m}}\frac{H(Hp)\big(v_0^+(g^{-1}\lambda)\big)}{\|v_0^+(g^{-1}\lambda)\|^{2k+b^+-2}}\\
&=\frac{2\Gamma\big(k+\frac{b^+}{2}-1\big)}{(2\pi)^{k+\frac{b^+}{2}-1}}\sum_{\substack{\lambda\in L+\beta\\ Q(\lambda)=m}}\frac{Hp\big(v_0^+(g^{-1}\lambda)\big)}{\|v_0^+(g^{-1}\lambda)\|^{2k+b^+-2}}=\vartheta_L(P_{m,\beta};p)(g)
\end{aligned}$$

が成り立ち, 後半の結果が証明された. □

ここで, Poincaré seires $P_{m,\beta}(\tau)$ は $S_\nu(D_L)$ の生成元をなすため, 定理 4.7 の系として次の等式を得る.

Corollary 4.3. 任意の $p\in P^{k,0}(V)$, $f\in S_\nu(D_L)$ に対し,

$$\vartheta_L(f;p)(g)=\vartheta_L(f;Hp)(g).$$

が成り立つ.

5 Fourier expansions of theta liftings

この節では, まず [Bo98], [Br02] の theta series の reduction formula を紹介し, 前節の Corollary 4.3 と reduction formula を組み合わせることで得られる $\vartheta_L(\tau,g;h_\kappa)$ の Fourier 展開について述べる. これが本稿の主結果である.

5.1 A smaller lattice and maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroup

まず, $\mathrm{O}(L_{\mathbb{R}})$ の maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgrop $P_z = M_z N_z$ と $L_{\mathbb{R}}$ の直交分解について述べる. isotropic vector $z \in L$ を任意にとり, それに対応して $(z, z') = 1$ を満たす $z' \in L'$ を一つ取り固定する. このとき, $L_1 = L \cap \langle z \rangle^{\perp} \cap \langle z' \rangle^{\perp}$ とおくと, L_1 は signature $(b^+ - 1, b^- - 1)$ の even lattice である. ここで直交分解 $L_{\mathbb{Q}} = (L_1)_{\mathbb{Q}} \oplus \langle z, z' \rangle_{\mathbb{Q}}$ が成り立ち, この分解における $x \in L_{\mathbb{Q}}$ の $(L_1)_{\mathbb{Q}}$ 成分を x_{L_1} と表記する.

次に, isotropic line $\langle z \rangle$ を固定する $\mathrm{O}(L_{\mathbb{R}})$ の maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroup を $P_z = M_z N_z$ とする. N_z は P_z の unipotent radical であり, M_z は $M_z = P_z \cap P_{z'-q(z')z}$ ($P_{z'-q(z')z}$ は $\langle z' - q(z')z \rangle$ を固定する maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroup) で定義される Levi subgroup である. このとき, 同型 $n_z : (L_1)_{\mathbb{R}} \simeq N_z$, $m_z : \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}((L_1)_{\mathbb{R}}) \simeq M_z$ が定義される:

$$n_z(u)z = z, \quad n_z(u)x = -(u, x)z + x, \quad n_z(u)z' = -q(u)z + u + z', \tag{5.1}$$

$$m_z(a, g_1)z = az, \quad m_z(a, g_1)x = g_1 x, \quad m_z(a, g_1)z' = a^{-1}z' + (a - a^{-1})q(z')z, \tag{5.2}$$

$$(u,\ x \in (L_1)_{\mathbb{R}},\ a \in \mathbb{R}^{\times},\ g_1 \in \mathrm{O}((L_1)_{\mathbb{R}})).$$

$v_0 : L_{\mathbb{R}} \to V$ を前節同様 $(L_{\mathbb{R}}, q)$ から (V, Q) への isometry とし, $L_{\mathbb{R}}^{\pm}$ で v_0 による $V^{\pm}$ の逆像とする. このとき, 任意の $x \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}$ を, $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{R}}^+ \oplus L_{\mathbb{R}}^-$ に応じて $x = x^+ + x^-$ と書くことにする. ここで, 上で固定した $z \in L$ に対し

$$z^* = \frac{z^+ - z^-}{2\|z^+\|^2} \in L_{\mathbb{R}} \tag{5.3}$$

とおく. このとき z^* は $q(z^*) = 0$, $(z, z^*) = 1$ を満たし, $\langle z, z^* \rangle = \langle z^+ \rangle \oplus \langle z^- \rangle$ は hyperbolic plane をなす. 今, 直交分解

$$L_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}} \oplus \langle z, z^* \rangle, \quad (W_{\mathbb{R}} = \langle z^+ \rangle^{\perp} \cap \langle z^- \rangle^{\perp}) \tag{5.4}$$

を考え, $x \in L_{\mathbb{R}}$ の $W_{\mathbb{R}}$ への orthogonal projection を x_W と表記する. このとき, $v_1 : L_{\mathbb{R}} \to V$ を

$$v_1(x) = v_0(x_W) \quad (x \in L_{\mathbb{R}})$$

と定義すると, v_1 の $(L_1)_{\mathbb{R}}$ への制限は $(L_1)_{\mathbb{R}}$ から $v_1((L_1)_{\mathbb{R}}) \subset V$ への isometry を与える.

Lemma 5.1. *$g_z = n_z(u)m_z(a, g_1) \in P_z$ を任意にとる. このとき $v_1(g_z^{-1}x) = v_1(g_1^{-1}x_{L_1})$ $(x \in (L_1)_{\mathbb{R}} \oplus \langle z \rangle)$, $(g_z^{-1}z^*)_{L_1} = g_1^{-1}(z^*) - u$ が成り立つ.*

5.2 Reduction to smaller lattice

v_1 を上で定義した isometry とする. このとき, $V = V^+ \oplus V^-$ に対応して $v_1(x) = v_1^+(x) + v_1^-(x)$ と書く. $v_1^+((L_1)_{\mathbb{R}})$ の正規直交基底を一つ取って固定し, そこへ $v_0^+(z)/\|v_0^+(z)\| \in V^+$ を加えてできる V^+ の基底を考える. このとき, この基底は $\{e_1, \ldots, e_{b^+}\}$ と $\mathrm{O}(V^+)$ の作用でうつりあうため, Remark 4.1 の議論から新しく取った基底に対応するように $h_{\kappa}^{b^+}(x) \in \mathcal{H}^{b^+,0}(V)$ を構成できる.

今, (4.3) と Proposition 4.1 を参照し, 補助的な多項式 p_{κ} を以下で定義する. $\kappa = (k_0, k_1, \ldots, \pm k_{b^+-2}) \in \mathbb{Z}^{b^+-1}$ を $k = k_0 \geq k_1 \geq \cdots \geq k_{b^+-2} \geq 0$ 満たすようにとる. このとき,

$$p_{\kappa}(v_0(x)) = \left(v_0(x), \frac{v_0^+(z)}{\|v_0^+(z)\|} \right)^{k_0 - k_1} h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1}(v_1^+(x)) \quad (x \in L_{\mathbb{R}}) \tag{5.5}$$

と定義する．ここで，$\kappa^{(1)} = (k_1, \ldots, \pm k_{b^+-2})$ としている．定義から，$p_\kappa(v_0(x)) = p_\kappa(v_0^+(x))$ であり $p_\kappa \in \mathcal{P}^{k,0}(V)$ である．また，(4.4) から

$$Hp_\kappa(v_0(x)) = \frac{(k_0-k_1)!}{2^{k_0-k_1}} h_\kappa^{b^+}(v_0(x)). \tag{5.6}$$

が成り立つ．

ここで [Bo98, Theorem 5.2], [Br02, Theorem 2.4] の議論を $\vartheta_L(f; p_\kappa^{b^+})(g)$ に適応した結果を紹介する．$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $(L, z) = N\mathbb{Z}$ によって定まる正整数とし，$M' = \{\lambda \in L' \mid (\lambda, z) \equiv 0 \bmod N\}$ とおく．このとき $\pi : M' \to L_1'$ を $\pi(\lambda) = \lambda_{L_1} - \frac{(\lambda,z)}{N}\zeta_{L_1}$, $\lambda \in M'$ と定義すると，π は M'/L から $L_1'/L_1 = D_{L_1}$ への全射準同型を誘導する．ここではその誘導される全射準同型も同様に π と表記することにする．

次に，$g_z = n_z(u)m_z(a, g_1) \in P_z$ に対し

$$\mu(g_z) = -z' + a g_z z^* = -z' + z^* + u - q(u)z. \tag{5.7}$$

とする．このとき，$\mu(g_z) \in \langle z\rangle^\perp = W_\mathbb{R} \oplus \langle z\rangle = (L_1)_\mathbb{R} \oplus \langle z\rangle$ である．今，このような記号のもとで次の reduction formula を得る．

Proposition 5.2. ([MS04, Proposition 5.3]) *$b^+ > 2$ と仮定する．$g_z = n_z(u)m_z(a, g_1) \in P_z$, $\gamma \in L'$ をとし，$p_\kappa \in \mathcal{P}^{k,0}(V)$ を (5.5) で定義した多項式とすると，次が成り立つ:*

$$\begin{aligned}
&\theta_{L+\gamma}(\tau, g_z; p_\kappa) \\
&= \frac{a^{k_0-k_1}|a|}{\sqrt{2}\|v_0^+(z)\|^{k_0-k_1+1}} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ c\equiv(\gamma,z) \bmod N}} \left(\frac{c\overline{\tau}+d}{-2iy}\right)^{k_0-k_1} \mathbf{e}\left(\frac{-a^2|c\tau+d|^2}{4iy\|v_0^+(z)\|^2} - d(\gamma, z') + \frac{cd(z',z')}{2}\right) \\
&\qquad \times \theta_{L_1+\pi(\gamma-cz')}\left(\tau, g_1; \begin{pmatrix} d\mu(g_z)_{L_1} \\ -c\mu(g_z)_{L_1}\end{pmatrix}; h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1}\right).
\end{aligned}$$

この reduction formula はその和の範囲から $(f(\tau), \Theta_L(\tau, g; p_\kappa))$ の unfolding を可能にし，lifting の計算において効果的にはたらく．詳しい議論については原論文 [Bo98] を参照いただきたい．

5.3 Fourier expansion fo theta lifts

$f(\tau) = \sum_{\gamma\in D_L} f_{L+\gamma}(\tau)\mathfrak{e}_\gamma \in S_\nu(D_L)$ と $r, t \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$f_{L_1+\lambda}\left(\tau; \begin{pmatrix} r \\ t\end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{\delta\in M'/L \\ \pi(\delta)=\lambda}} \mathbf{e}\left(-r(\delta, z') - rt\frac{(z',z')}{2}\right) f_{L+\delta+tz'}(\tau)$$

とおき，さらに

$$f_{L_1}\left(\tau; \begin{pmatrix} r \\ t\end{pmatrix}\right) = \sum_{\lambda\in D_{L_1}} f_{L_1+\lambda}\left(\tau; \begin{pmatrix} r \\ t\end{pmatrix}\right)\mathfrak{e}_\gamma$$

と定義する．このとき，$f_{L_1}(\tau; \binom{r}{t})$ は $\mathbb{H}_1$ 上の $\mathbb{C}[D_{L_1}]$-値関数であり，

$$f_{L_1}\left(M\tau; M\begin{pmatrix} r \\ t\end{pmatrix}\right) = \phi(\tau)^{2\nu}\rho_{L_1}(M,\phi) f_{L_1}\left(\tau; \begin{pmatrix} r \\ t\end{pmatrix}\right), \quad ((M,\phi) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})) \tag{5.8}$$

を満たす ([Bo98, Theorem 5.3], [Br02, Theorem 2.6]). 特に, $f_{L_1}(\tau;\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)) \in S_\nu(D_{L_1})$ であり, これを単に $f_{L_1}(\tau)$ と書くことにする.

ここで, 次の定理が本研究における主結果である

Theorem 5.3. ([MS04, Theorem 5.4]) *$b^+ > 2$, $b^- \geq 1$ とし, k は (4.6) を満たすと仮定する. $f(\tau) \in S_\nu(D_L)$, $\nu = k + \frac{\mathrm{sig}(L)}{2}$ をとり, Fourier 展開 (3.1) をもつと仮定する. このとき, $g_z = n_z(u)m_z(a, g_1) \in P_z$ に対し, $\vartheta_L(f; h_\kappa^{b^+})(g_z)$ 次の展開式をもつ:*

$$\frac{\delta_{kk_1}|a|}{\sqrt{2}\|v_0^+(z)\|}\big(f_{L_1}(\tau), \Theta_{L_1}(\tau, g_1; h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1})\big)_\tau$$

$$+ \frac{(-i)^{k-k_1}(a/|a|)^{k-k_1}|a|^{k+\frac{b^+-1}{2}}}{2^{k_1+\frac{b^+}{2}-3}(k-k_1)!\|v_0^+(z)\|^{k+\frac{b^+-1}{2}}} \sum_{\substack{\lambda\in L_1' \\ q(\lambda)>0}} \Bigg(\sum_{n|\lambda} n^{k+\frac{b^+-3}{2}} \sum_{\substack{\delta\in M'/L \\ \pi(\delta)=\lambda/n}} \mathbf{e}\big((n\delta, z')\big)c\Big(\frac{q(\lambda)}{n^2}, \delta\Big)\Bigg)$$

$$\times\, \mathbf{e}\big((\lambda, u + ag_1(z^*)_{L_1})\big)\frac{h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1}(v_1^+(g_1^{-1}\lambda))}{\|v_1^+(g_1^{-1}\lambda)\|^{k_1+\frac{b^+-3}{2}}} K_{k_1+\frac{b^+-3}{2}}\left(\frac{2\pi|a|\|v_1^+(g_1^{-1}\lambda)\|}{\|v_0^+(z)\|}\right).$$

ここで, $\sum_{n|\lambda}$ は $\lambda/n \in L_1'$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ を走り, $K_\alpha(z)$ は K-Bessel function である.

Proof. まず, b^+, b^-, k は (4.6) を満たすため, Corollary 4.3 と (5.6) より

$$\vartheta_L(f; h_\kappa^{b^+}) = \frac{2^{k_0-k_1}}{(k_0-k_1)!}\vartheta_L(f; p_\kappa)$$

が成り立つ. ここで, Proposition 5.2 の reduction formula を $\vartheta_{L+\gamma}(\tau, g; p_\kappa)$ に適応し, $\vartheta_L(f; p_\kappa)$ を計算すれば上記の Fourier 展開を得る. □

Remark 5.1. ここで, Theorem 5.3 において $\vartheta_L(f, h_\kappa^{b^+})$ の計算を補助的な多項式 $p_\kappa(x)$ を導入して行なった意義を述べておく. Borcherds[Bo98] は多項式 $p(x)$ を reduction に適した多項式の和に展開することで, 任意の $\vartheta_{L+\gamma}(\tau, g; p)$ に対し reduction formula を示した. すなわち, Borcherds の手法を用いれば, Corollary 4.3 を用いて p_κ を経由せずとも, $\vartheta_L(f; h_\kappa^{b^+})$ の展開式を計算できるということである. Theorem 5.3 の展開がこのような計算と異なる点は展開に現れる関数部分に調和多項式と K-Bessel 関数の積が現れている点である. Borcherds の方法をそのまま $\vartheta_L(f; h_\kappa^{b^+})$ に用いた場合, その過程で $h_\kappa^{b^+}$ を展開するため, Fourier 展開に現れる特殊関数の多項式部分の調和性を証明することが困難になる. 展開に現れる特殊関数が調和多項式と K-Bessel 関数との積で与えられているという結果は, 次の節で紹介する Proposition 6.2 の証明において本質的であり, $\vartheta_L(f; h_\kappa^{b^+})$ と $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ とを関係づける上で重要な役割を果たしている.

6 Archimedean Bessel integrals

最後に, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の minimal K-type の元の Bessel 積分を計算し, $\vartheta_L(\tau, g; h_\kappa)$ と $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ との関係について述べる.

$b^+ > 2$ とする. Theorem 5.3 の Fourier 展開から関数部分を抜き出し, 次のように W_λ^κ を定義する:

$$W_\lambda^\kappa(g_z) = \mathbf{e}\big((\lambda,u)\big)\frac{(-i)^{k-k_1}(a/|a|)^{k-k_1}|a|^{k+\frac{b^+-1}{2}}}{2^{k_1+\frac{b^+}{2}-3}(k-k_1)!\|v_0^+(z)\|^{k+\frac{b^+-1}{2}}} \tag{6.1}$$
$$\times\frac{h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1}(v_1^+(g_1^{-1}\lambda))}{\|v_1^+(g_1^{-1}\lambda)\|^{k_1+\frac{b^+-3}{2}}}K_{k_1+\frac{b^+-3}{2}}\left(\frac{2\pi|a|\|v_1^+(g_1^{-1}\lambda)\|}{\|v_0^+(z)\|}\right),$$
$$(\ g_z = n_z(u)m_z(a,g_1)\in P_z,\ \lambda\in(L_1)_{\mathbb{R}} \text{ with } Q(\lambda)>0\ ).$$

Section 1 の結果を思い出し, $I_\varepsilon(k+b^+-2)$ を $\mathrm{O}(V)$ の退化主系列表現とし, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ をその irreducible submodule とする. (2.1) の直和分解に対応し, $w\in\mathrm{O}(V)$ を $wz_0=z_0^*$, $wz_0^*=z_0$, $w|_{V_1}=\mathrm{id}_{V_1}$ を満たす元とする. 今, $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ の minimal K-type に属する任意の元 $f(g;h)$ (2.7) に対し Bessel 積分を

$$W_\lambda(g;h) = \int_{V_1}\mathbf{e}(-(\lambda,u))f(wn_0(u)g;h)du,\quad (g\in\mathrm{O}(V),\ \lambda\in V_1). \tag{6.2}$$

と定義する. 本研究では, [KM11], [Po22] の議論にならい, (6.1) の Fourier 逆変換を計算することで, Bessel 積分 (6.2) と (6.1) の等式を示した. 最後にこの結果を紹介する.

まず, 任意の $h_\kappa^{b^+}(x)\in\mathcal{H}^{k,0}(V)$ に対し, 次の関数を考える.

$$J^\kappa(\lambda) = \mathrm{char}(Q(\lambda)>0)\|\lambda\|^{2A}\frac{h_{\kappa^{(1)}}^{b^+-1}(\lambda^+)}{\|\lambda^+\|^{k_1+\frac{b^+-3}{2}}}K_{k_1+\frac{b^+-3}{2}}(4\pi\|\lambda^+\|),\quad (\lambda\in V_1). \tag{6.3}$$

$\mathrm{char}(Q(\lambda)>0)$ は $\{\lambda\in V\mid Q(\lambda)>0\}$ の特性関数を表し, $A=k+\frac{b^+-b^-}{2}-1$ とした. ここで, 次の積分を考える.

$$I^\kappa(u) = \int_{V_1}\mathbf{e}((\lambda,u))J^\kappa(\lambda)d\lambda,\quad u\in V_1.$$

ここで, $d\lambda$ は $V_1\cong\mathbb{R}^{b^+-2}$ の Lebesgue measure である.

Lemma 6.1. ([MS04, lemma 6.2]) $I^\kappa(u)$ は絶対収束する.

Proposition 6.2. ([MS04, Proposition 6.4]) $b^-\geq 1$ とする. このとき

$$I^\kappa(u) = \frac{i^{k_1}\Gamma(k-k_1+1)\Gamma(2k_1+b^+-2)\Gamma\big(k+\frac{b^+-b^-}{2}\big)}{2^{k_1+\frac{b^++b^-}{2}}(2\pi)^{2k+b^+-\frac{b^-+3}{2}}\Gamma\big(k_1+\frac{b^+-1}{2}\big)}f(wn_0(u);h_\kappa^{b^+})$$

が成り立つ.

Proposition 6.2 は $f(wn_0(u);h_\kappa^{b^+})$ が $J^\kappa(\lambda)$ の Fourier 逆変換であることを表している. ここで, Proposition 6.2 の系として $\vartheta_L(f;h_\kappa^{b^+})(g)$ と $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ との関係を記述する, 次の結果を得る.

Corollary 6.3. ([MS04, Corollary 6.5]) *関数* $W_\lambda^\kappa(g_z)$ *(6,1) は* $\Pi_{k,0}^{b^+,b^-}$ *の minimal* $\mathrm{O}(V^+)\times\mathrm{O}(V^-)$*-type* $\mathcal{H}^k(V^+)\boxtimes\mathbf{1}$ *に付随する Bessel 積分 (6.2) の値と定数倍を除いて一致する.*

Proof. まず, 定義より任意の $g_z=n_0(u)m_0(a^{-1},g_1)\in P_z$ と単位元 $1_b\in\mathrm{O}(V)$ に対し

$$W_\lambda(g_z;h_\kappa^{b^+}) = \mathbf{e}((\lambda,u))\psi_{k+b^+-2}^{\pm}\big(m_0(a^{-1},g_1)\big)|a|^{b-2}W_{a\cdot g_1^{-1}\lambda}(1_b;h_\kappa^{b^+})$$

が成り立つ. 一方で Proposition 6.2 より Fourier inversion theorem を用いれば $W_{a\cdot g_1^{-1}\lambda}(1_b;h_\kappa^{b^+})$ と $J^\kappa(a\cdot g_1^{-1}\lambda)$ が定数倍を除いて一致することがわかる. 以上より, (6.1) の定義と比較すれば $W_\lambda(g;h_\kappa)$ が $W_\lambda^\kappa(g_z)$ の定数倍であることが示された. □

参考文献

[BMM17] N. Bergeron, J. Millson, and C. Moeglin, *Hodge type theorems for arithmetic manifolds associated to orthogonal groups*, International Mathematics Research Notices, 2017, No.15, 4495-4624.

[Bo98] R. E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. math. 132 (1998) 491-562

[Br02] J. H. Bruinier, Borcherds products on $\mathrm{O}(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors, Lecture Notes in Math. 1780 (2002), Springer-Verlag

[HT93] R. Howe and E. Tan, *Homogeneous functions on light cones*, Bull. Am. Math. Soc. 28 (1993) 1-74

[Ko21] T. Kobayashi, *Branching laws of unitary representations associated to minimal elliptic orbits for indefinite orthogonal group* $\mathrm{O}(p,q)$, Adv. Math. 388 (2021)

[KM11] T. Kobayashi and G. Mano, *The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group* $\mathrm{O}(p,q)$, Mem. Am. Math. Soc. 213 (2011)

[Li90] J. -S. Li, *Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology*, Duke Math. J. 61 (1990) 913-937.

[Li92] J. -S. Li, *Non-vanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients*, J. Reine Angew. Math. 428 (1992) 177-217.

[MS04] T. Miyazaki and Y. Saito, *Theta lift to certain cohomological representations of indefinite orthogonal groups*, Res. Number Theory 10 (2) (2024)

[Od77] T. Oda, *On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature* $(2,n-2)$, Math. Ann. 231 (1977) 97-144

[Po22] A. Pollack, *Modular forms on indefinite orthogonal groups of rank three*, J. Number Theory 238 (2022) 611-675

[RS81] S. Rallis and G. Schiffmann, *On a relation between* $\widetilde{SL}_2$ *cusp forms and cusp forms on tube domains associated to orthogonal groups*, Trans. AMS 263 (1981) 1-58

[Vi68] N. J. Vilenkin, Special functions and the theory of group representations, Translated from the Russian by V. N. Singh, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 22 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968