

量子不変量と偽テータ関数の冪根での極限值

九州大学大学院数理学研究院 PD 村上友哉

Yuya Murakami, Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 序論

本稿は 2024 年 1 月 24 日の RIMS 共同研究（公開型）「保型形式の研究」における筆者の講演「種々の量子不変量と偽テータ関数の radial limits」に基づいた、筆者の論文 [Mur23a, Mur23b] および寺嶋郁二氏（東北大学）との共著論文 [MT23] の解説記事である。論文の内容は詳説せず、研究の背景や証明を理解する助けとなるトイモデルの解説を重点的に行う。

本稿の主題は 3 次元トポロジーにおける量子不変量という対象と整数論におけるモジュラー形式の間の神秘的な関係である。この関係の追及を通して、トポロジーにおける未解決問題の数論的手法による解決やトポロジーに由来する数論的な対象や現象の発見がこれまでなされてきた。本稿で考察するのは radial limit conjecture というトポロジーの未解決問題である。これは

$$(\text{3次元多様体の量子不変量}) = \lim_{\tau \rightarrow 1/k} (\text{偽テータ関数})$$

というタイプの予想であり、左辺のトポロジー的对象と右辺の数論的对象の関係性を主張している。筆者は近年その解決に取り組み ([MM22, Mur22]) 報告を行ってきたが ([村 22b, 村 22a, 村 23]), 本稿で報告する論文 [Mur23a, Mur23b, MT23] においてそれらの結果を大幅に拡張し、更にその応用として新しい偽テータ関数を発見することができた。これはまさしく上で述べた「トポロジーにおける未解決問題の数論的手法による解決」と「トポロジーに由来する数論的な対象の発見」である。以上の結果についてトイモデルを交えて紹介するのが本稿の目的である。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では本稿の結果のトイモデルを証明付きで紹介する。3 節では上で述べた radial limit conjecture について紹介する。4 節では本稿の主結果と例を述べる。

2 トイモデル

2.1 主定理のトイモデルの主張

非常に複雑な設定の主定理を述べる前に、まずトイモデルの場合にメカニズムを紹介する。早速だが、主定理のトイモデルは以下のように述べられる。

定理 2.1 (Lawrence–Zagier [LZ99]). 正整数 N と周期写像 $\chi: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) = \sum_{1 \leq n \leq N} n\chi(n) = 0 \quad (2.1)$$

を満たすとする。この χ と $\gcd(k, N) = 1$ を満たす正整数 k に対し

- 1 の冪根 $\zeta_k := e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$,
- 有限和

$$Z_k := \sum_{l \in (\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})/2k\mathbb{Z}} \frac{\zeta_{4k}^{l^2}}{1 - \zeta_k^{Nl}} \sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) \zeta_k^{nl},$$

- 周期写像 χ に付随する部分テータ関数

$$\hat{Z}(\tau; \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) q^{n^2}, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau},$$

- 周期写像 χ と k から定まる L 関数

$$L(s; \chi, k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \zeta_k^{n^2}}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

とおく. このとき

$$\frac{Z_k}{\zeta_8 \sqrt{2k}} = \lim_{\tau \rightarrow 1/k} \widehat{Z}(\tau; \chi) = L(0; \chi)$$

が成り立つ.

この主張に登場する奇妙な有限和 Z_k が量子不変量のトイモデルである. 3次元多様体の量子不変量は, 典型的にはこのような奇妙な有限和で表示されるのである. 気持ちとしては, この周期写像 χ はある固定した 3次元多様体 M から定まるもので, この χ を用いて M の量子不変量を記述したいという状況を考えている.

有限和 Z_k は 1 の冪根の平方数乗 $\zeta_{4Nk}^{l^2}$ の $l \bmod 2Nk\mathbb{Z}$ にわたる和なので Gauss 和の類似物と解釈することができる一方, 和が欠けた集合 $(\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})/2Nk\mathbb{Z}$ を走っていることと周期写像 χ に関する奇妙な重みが付いているという特徴がある. ここで l の走る集合として $k\mathbb{Z}$ を除いたものを考えているのは, 和の分母に登場する $1 - \zeta_k^{Nl}$ が $l \in k\mathbb{Z}$ のとき 0 になるためである.

定理 2.1 は, このように奇妙な有限和として定義された Z_k が部分テータ関数 (これは偽テータ関数の親戚である) の冪根への極限值と L 関数の特殊値という二つの表示を持つことを主張している. この等式は素朴に興味深く思われるものであり, また 3 節で後述するように Z_k として量子不変量を考えた場合にはトポロジーや数理物理においても有意義なものになっている. 主定理はこの表示式を 3次元多様体の量子不変量に対して幅広い場合に証明したものである.

定理 2.1 の証明を述べる前に, 周期写像 χ に関する注意を述べておく.

注意 2.2. 数論の立場からは χ として Dirichlet 指標を考えたいが, 3次元多様体から定まる χ はほとんど全ての場合において Dirichlet 指標ではない. それにもかかわらず数論的に興味深い現象が観察されるのである. 本稿で述べる現象以外にも, 偽テータ関数に関する様々な研究 [AJUO01, BFR12, BK10, Hik03, Hik05a, Hik06b, Hik07, HK03, HK06, HL15, HL17, LO03, LO21, LO19, Mat23, MZ23, Zag01] などでもそのような χ が秘める数論的に興味深い現象が研究されている (そのような研究の概観は [村 22a] で紹介した). これらの研究からは数論・トポロジー・数理物理の分野横断的研究の意義を窺い知ることができる.

注意 2.3. 式 (2.1) において二つ目の和が消えるという条件は幾分奇妙なものに思えるが, これは定理 2.1 が成り立つために必要な条件であり, χ として実際に 3次元多様体から定まるものを取った場合にも満たされている. 式 (2.1) について説明するために

$$G(q) := \frac{1}{1 - q^N} \sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) q^n$$

とおく. この有理関数 $G(q)$ を用いると Z_k は

$$Z_k = \sum_{l \in (\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2} G(\zeta_k^l)$$

と書けることに注意する. 周期写像 χ に対し, 式 (2.1) は $\sum_{1 \leq n \leq N} \chi(n) q^n$ の $q = 1$ での値と微分値が共に 0 になることと同値であり, 従って $G(q)$ は $q = 1$ で 1 位の零点を持つことと同値である. このように捉えると式 (2.1) がより自然な条件に思えるかもしれない. なおここでは数論の文脈で話が通りやすいように χ から議論を出発したが, トポロジーの立場からは χ よりも $G(q)$ の方が本質的で, 3次元多様体から $G(q)$ が定まって更にそれから χ が定まるという見方が自然なようである. 実際, この $G(q)$ は Gukov–Manolescu [GM21] により存在が予想されている結び目不変量 $F_K(x, q)$ によって解釈することができる.

例 2.4. $N = 4$ とし, mod 4 周期写像 χ を

$$\sum_{1 \leq n \leq 4} \chi(n)q^n := q(1-q)(1-q^2) = q - q^2 - q^3 + q^4$$

によって定める. つまり χ は表 1 に記述される周期写像である.

n	0 mod 4	1 mod 4	2 mod 4	3 mod 4
$\chi(n)$	1	1	-1	-1

表 1: mod 4 周期写像 χ の表.

この χ は式 (2.1) を満たしている. 実際 χ の定義式は $q = 1$ での値と微分値が共に 0 である.

例 2.5. 3 次元多様体として Poincaré ホモロジー球面と呼ばれるものを取る. この場合, $N = 60$ とし, 周期写像 χ として

$$\sum_{-1 \leq n \leq 58} \chi(n)q^n := q^{30}(q^6 - q^{-6})(q^{10} - q^{-10})(q^{15} - q^{-15})$$

によって定まるものを取ると, この χ によって Poincaré ホモロジー球面の WRT 不変量が記述できることが Lawrence–Zagier [LZ99] によって示されている. この χ も定義式の $q = 1$ での値と微分値が共に 0 なので

$$\sum_{-1 \leq n \leq 58} \chi(n) = \sum_{-1 \leq n \leq 58} \chi(n)n = 0$$

を満たしている. これは式 (2.1) とは少し異なる条件だが, この χ に対しても定理 2.1 と同様の等式が成り立つことが Lawrence–Zagier [LZ99] によって証明されている.

2.2 定理 2.1 の証明

それでは定理 2.1 の証明を与える. 証明は Lawrence–Zagier [LZ99] による (彼らは周期写像 χ が Poincaré ホモロジー球面から定まる場合を議論している).

定理 2.1 の証明. 注意 2.3 で準備した有理関数 $G(q)$ と Z_k の表示式を用いる. 複素変数 t に関する有理型関数

$$Z_k(t) := \sum_{l \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2} G(\zeta_k^l e^{-t})$$

を考える. これは Z_k とよく似た式で定義されているが, l の走る集合が $\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$ 全体であることが異なる. このような和を考えられるのは, 足す項として値 $G(\zeta_k^l)$ ではなく有理型関数 $G(\zeta_k^l e^{-t})$ を取っているからである. この有理型関数 $Z_k(t)$ と $Z_k, \widehat{Z}(\tau; \chi), L(s; \chi)$ を以下の 3 ステップで比較することで証明を行う.

Step A 有理型関数 $Z_k(t)$ が $t = 0$ で正則で $Z_k(0) = Z_k$ となることを示す.

Step B 偽テータ関数 $\widehat{Z}(\tau; \chi)$ の $\tau \rightarrow 1/k$ での漸近展開が $Z_k(t)$ の $t = 0$ での Laurent 係数で書けることを Euler–Maclaurin の和公式から示す. 特に **Step A** から $\tau \rightarrow 1/k$ での極限値が存在し, それが $Z_k(0) = Z_k$ で書けることが従う.

Step C 有理型関数 $Z_k(t)$ の $t = 0$ での Laurent 係数が L 関数 $L(s; \chi)$ の特殊値で書けることを Mellin 変換を用いて示す.

それでは各ステップを順に証明していく.

Step A 有理関数 $G(q)$ は 1 の N 乗根で極を持ちうるので、 $l \in k\mathbb{Z}$ のとき $G(\zeta_{Nk}^l e^{-t})$ は $t = 0$ で極を持ちうる。従って $Z_k(t)$ も $t = 0$ で極を持ちうることに注意する。

$$Z_k^*(t) := \sum_{l \in k\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2} G(\zeta_k^l e^{-t})$$

とおくと有理型関数 $Z_k(t) - Z_k^*(t)$ は $t = 0$ で正則で、その $t = 0$ での値は Z_k となることが分かる。そこで $Z_k^*(t)$ が $t = 0$ で零点を持つことを示せば良い。今

$$Z_k^*(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \zeta_4^{kl^2} G(e^{-t}) = (1 + \sqrt{-1}^{-k}) G(e^{-t})$$

と書ける。式 (2.1) の条件と注意 2.3 での考察から $G(q)$ は $q = 1$ で 1 位の零点を持つので $Z_k^*(t)$ も $t = 0$ で零点を持つことが従う。

Step B $|q| < 1$ に対し

$$G(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) q^n$$

と展開できるので、 $t > 0$ のとき

$$Z_k(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) (\zeta_k^l e^{-t})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-nt} \sum_{l \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2 + 4nl}$$

と書ける。ここで $l \mapsto l - 2n$ とすると

$$Z_k(t) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}} \zeta_{4k}^{l^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \zeta_k^{n^2} e^{-nt}$$

を得る。ここで先頭の有限和は Gauss 和そのものであり、 $\zeta_8 \sqrt{2k}$ に等しいことが分かる（例えば [DT07, Theorem 1] を用いれば良い。なお彼らの記述は煩雑だが、筆者による [村 22b, 命題 6.3] などでは整理した形で述べている）。従って

$$\frac{Z_k(t)}{\zeta_8 \sqrt{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \zeta_k^{n^2} e^{-nt}$$

が得られるが、この右辺の形は

$$\hat{Z}\left(\frac{1}{k} + \frac{t\sqrt{-1}}{2\pi}; \chi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \zeta_k^{n^2} e^{-n^2 t}$$

によく似ており、異なるのは e^{-t} の指数が n か n^2 かの部分のみである。この二つの無限級数の $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開は次の公式で与えることができる。

命題 2.6 ([Zag06, Equation (44)]). 正整数 M と周期写像 $\psi: \mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、ある複素数列 $(a_n)_{n=-1}^{\infty}$ が存在して任意の急減少関数 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) f(tn) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} a_n f^{(n)}(0) t^n \quad \text{as } t \rightarrow +0$$

が成り立つ。ただしここで $F(t) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n$ as $t \rightarrow +0$ は任意の正整数 R に対し $F(t) - \sum_{n=-1}^R b_n t^n = O(t^{R+1})$ as $t \rightarrow +0$ が成り立つことを表す Poincaré の記法で、

$$f^{(-1)}(0) := - \int_0^{\infty} g(x) dx$$

とおいた.

更に $(a_n)_{n=-1}^\infty$ の母関数は上式で $f(x) = e^{tx}$ として得られる関数である

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{1 - e^{Mt}} \sum_{1 \leq n \leq M} \psi(n) e^{nt}$$

によって与えられ,

$$L(s; \psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

とおくとき $a_n = L(-n, \psi)$ が成り立つ. 特に $a_{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}} \psi(n)$ が成り立つ.

この公式の前半部分は Euler–Maclaurin の和公式から従い, L 関数との関係は Mellin 変換の技法から従う.

さて **Step B** の証明に戻る. 命題 2.6 において $\psi(n) = \chi(n)\zeta_k^{n^2}$ とし $f(x) = e^{-x}$ と $f(x) = e^{-x^2}$ の場合を考えることでそれぞれ $Z_k(t)/\zeta_8\sqrt{2k}$ と $\widehat{Z}(1/k + t^2\sqrt{-1}/2\pi; \chi)$ の $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開が得られる. 前者の漸近展開は $t = 0$ での Laurent 展開に一致するので, **Step A** から負冪の項が現れないことが従う. 従って命題 2.6 の公式の形から後者の漸近展開にも負冪の項が現れず,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \widehat{Z}\left(\frac{1}{k} + \frac{t\sqrt{-1}}{2\pi}; \chi\right) = \frac{Z_k(0)}{\zeta_8\sqrt{2k}} = \frac{Z_k}{\zeta_8\sqrt{2k}}$$

が成り立つことが分かる. これで **Step B** の証明が完了した.

Step C 命題 2.6 の後半部分から $Z_k(t)/\zeta_8\sqrt{2k} = L(0; \chi, k)$ が従う. □

注意 2.7. 上の証明で **Step A** を示す部分は式 (2.1) の仮定からほとんど直ちに從っているが, 実際の量子不変量を扱う際には **Step A** が最も困難な部分である. また **Step A** では $\gcd(k, N) = 1$ という仮定を置いているがこれは Z_k の well-definedness を担保するための技術的なものであり, 実際の量子不変量では全ての $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して Z_k が定義されるようになっている. そのような χ が存在すること自体が大変不思議であり, また **Step A** の証明が困難となることを窺わせるものである.

注意 2.8. 上の証明の **Step B** で漸近展開に負冪の項が現れないことを示す部分は, 命題 2.6 から負冪の項が明示的に

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}/kN\mathbb{Z}} \chi(n)\zeta_k^{n^2} \tag{2.2}$$

と書けることからこれが 0 になることを直接示すことによっても得られる. このように漸近展開公式から負冪の項を明示的に記述してそれが 0 になることを示すという方法は [AM22, BMM20a, FIMT21, Hik05b, Hik05c, Hik06c, Hik06a, LZ99, Mur23b, MM22, MT21] などで広く用いられており, Seifert 多様体と呼ばれる多様体の量子不変量を考える上では負冪の項が複雑になりすぎないため有効な手法である. しかしながら, 負定値鉛管多様体と呼ばれる一般の複雑な多様体の量子不変量を考える上では負冪の項は非常に複雑になるため直接計算で 0 になることを示すのは絶望的と思われる. そこで上の証明のように有理型関数 $Z_k(t)$ の $t = 0$ での正則性に帰着するというやり方が有効となる. この方法は筆者が [Mur22] で開発したもので, [Mur23a, MT23] でもこの方法を用いて証明を行っている.

参考のため上の式 (2.2) が 0 に等しいことの直接的な証明を与えておく. 式 (2.2) は

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(n) \sum_{r \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \zeta_k^{(n+Nr)^2}$$

と変形できる．ここで $\gcd(N, k) = 1$ なので r が $\mathbb{Z}/Nk\mathbb{Z}$ を走るとき $n + Nr$ も $\mathbb{Z}/Nk\mathbb{Z}$ 全体を走る．よって上の和は

$$\left(\sum_{r \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \zeta_k^{r^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(n)$$

に等しい． χ に課した式 (2.1) の仮定からこの和は 0 である．

注意 2.9. 定理 2.1 を示す際に χ を線形結合で分解して各パーツごとに定まる

$$\widehat{Z}(\tau; a \bmod N) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) q^{(a+Nm)^2}, \quad L(s; a \bmod N) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_k^{(a+Nm)^2}}{(a+Nm)^s}$$

の考察に帰着させる方法は数論的立場からは筋が良いように思われる．しかしながらこの方法では χ が持つ 3 次元多様体のデータを破壊してしまっているためトポロジー的立場からは筋が良くないと思われる．

注意 2.10. 定理 2.1 は部分テータ関数 $\widehat{Z}(\tau; \chi)$ の代わりに**偽テータ関数 (false theta function)**

$$\widehat{Z}_{\text{false}}(\tau; \chi) := \frac{1}{2} \left(\sum_{n \geq 0} \chi(n) q^{n^2} - \sum_{n \leq -1} \chi(n) q^{n^2} \right)$$

を用いても成立することが同様の議論から従う．なおこの関数を偽テータ関数と呼ぶのは n の符号に応じて和の符号を変えているためである．偽テータ関数は元々 Rogers によって命名された用語で、今では様々な変種が考えられそれら全てが偽テータ関数と呼ばれている．しかしながら「偽テータ関数」という用語自体に対する数学的な定義は無い．これは ζ 関数や L 関数に数学的な定義が無いのと同様である．^{*1}

注意 2.11. 量子モジュラー性について補足しておく．定理 2.1 の設定の下で、 χ の離散 Fourier 変換 $\widehat{\chi}: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\widehat{\chi}(r) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(n) e\left(-\frac{nr}{N}\right)$$

によって定める．このとき部分テータ関数 $\widehat{Z}(\tau; \chi)$ は

$$\widehat{Z}(\tau; \chi) = \sqrt{\frac{\sqrt{-1}}{2N\tau}} \widehat{Z}\left(-\frac{1}{4N^2\tau}; \widehat{\chi}\right) + (\text{誤差項})$$

という形の歪んだモジュラー変換則を持つことを証明できる（例えば [LZ99, Section 4] や [HLSS21, Theorem 3]）．ここで誤差項は Eichler 積分と呼ばれるタイプの積分や Laplace 変換としての表示を持ち、 $\tau \in \mathbb{R}_{<0}$ 上に解析接続することができる．このようにモジュラー変換則の誤差項が上半平面を超えて実軸上に解析接続されるというのが Zagier [Zag10] によって発見・命名された**量子モジュラー性**という現象である．

量子モジュラー性は数論とトポロジー両方の観点から様々な設定の下で盛んに研究されており、例えば [AM22, BKM19a, BKM19b, BKM21, BMM20a, BMM20b, BN19, CCF⁺19, GZ21, HLSS21, Hik05b, Hik05c, Hik06c, Hik06a, HL15, LZ99, MM22, MT23, Zag10] などの研究がある．量子モジュラー形式については Zagier による原典 [Zag10] の他、[Ono04, Chapter 10] や [松 22], [村 22a] にサーベイがある．今回の我々の主結果の場合に量子モジュラー性がどのように記述されるかは非常に興味深いが、まだほとんど何も分かっていない．松坂 [松 22] が「まだまだ発展途上、見渡す限り千山万水である」と述べている通りである．

^{*1} この例えは松坂俊輝さんによる．

3 Radial limit conjectures

定理 2.1 は量子トポロジーにおいて **radial limit conjectures** と呼ばれる予想群のトイモデルである。本節ではこの予想の動機と主張を紹介する。

3.1 動機

1 節で述べたように, radial limit conjecture とは

$$(3 \text{ 次元多様体の量子不変量}) = \lim_{\tau \rightarrow 1/k} (\text{偽テータ関数})$$

というタイプの等式を予想するものである。この予想は数論とトポロジーの架け橋になっているという点で素朴に重要だが, 単にそれ以上の重要性があることを数論とトポロジーの両面から説明する。

• 数論からの動機

- **量子不変量の量子モジュラー性.** 量子モジュラー形式という新しい数論的対象について研究を深めるには豊富な具体例が必要不可欠である。しかしながら, 安直に数論的な発想で具体例を探すのはあまり実りが少ないようである。このことは注意 2.3 や注意 2.9 の考察からも窺える。そこで量子不変量という素性の良いことが分かっている対象に量子モジュラー形式の例を求めることが有効な戦略に思われる。量子不変量に対しては注意 2.11 と同様に

$$\begin{aligned} & (\text{radial limit conjecture}) + (\text{偽テータ関数のモジュラー変換則}) \\ & \rightsquigarrow (\text{量子不変量の量子モジュラー性}) \end{aligned}$$

という論法で量子不変量の量子モジュラー性を証明できることが期待できる。ここで radial limit conjecture が大きな役割を果たしている。なお注意 2.11 で述べたようにこの戦略による様々な研究があるものの, 一般的な状況では解明にはほど遠い。

- **偽テータ関数の性質の探求.** Radial limit conjecture により偽テータ関数と量子不変量が関係することに着想を得て mock v.s. false 現象や Zagier の strange identity といった偽テータ関数の新しい性質が発見・開拓されている。このことについては [村 22a, 3 節] に概説がある。
- **トポロジーからの動機**
 - **量子不変量の漸近展開.** 2 節では量子不変量のトイモデルとして Z_k という奇妙な有限和を考えた。このように量子不変量は典型的には複素数列となる。そこでその漸近挙動を考えることができるが, これに関して Witten の **漸近展開予想** や Kashaev–村上–村上の **体積予想** といった大予想がある。体積予想は近年 Garoufalidis–Zagier [GZ21] によって **量子モジュラー性予想** として精密化されている。これらの予想は量子不変量の量子モジュラー性から得られることが期待されている。そのため量子モジュラー性の証明に有効な radial limit conjecture がこれら大予想を示す上でも重要な役割を果たすのである。
 - **量子不変量の圏化.** 不変量に関手的な性質を持つより強い不変量で記述することを **圏化** と呼ぶ。例えば Betti 数をホモロジー群の次元として解釈することは Betti 数の圏化と言える。また結び目の量子不変量である色付き Jones 多項式は Khovanov ホモロジーと呼ばれる二重ホモロジーの Euler 標数として解釈することができるため, Khovanov ホモロジーは色付き Jones 多項式の圏化である。3 次元多様体の量子不変量である **Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量** を圏化できるかというのは重要な未解決問題である。WRT 不変量は複素数列に値を取るなのでそのままではホモロジーの Euler 標数として解釈することはできない。そのためともすれば圏化は存在しないようにも思われる。それにも拘わらず Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] は WRT 不変量の圏化を定式化することに成功した。彼らは

q 級数不変量の極限值で表せるという radial limit conjecture を提起し、その q 級数不変量が二重ホモロジーの Euler 標数となるという形で WRT 不変量の圏化を定式化したのである。この観点においても radial limit conjecture は重要な役割を果たしている。

3.2 主張

このように radial limit conjecture は様々な観点から重要である。本項ではその主張を述べる。

向き付け可能な閉 3 次元多様体 M 、正整数 k 、単純 Lie 群 G とそれに対応する単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対しレベル k の G **Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量**^{*2*}3 を本稿では $Z_k^{\mathfrak{g}}(M) \in \mathbb{C}$ と表すことにする。これが本稿で研究対象とする量子不変量である。

注意 3.1. WRT 不変量がどのように定義されるかを非常に大雑把に説明する。任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体は S^3 内の結び目に Dehn 手術というトポロジー的な操作を行うことで得られることが知られている (Lickorish–Wallace の定理)。また、異なる結び目がいつ同相な 3 次元多様体を定めるかも完全に分かっている (Kirby の定理)。そこで結び目不変量を適切に補正することで 3 次元多様体の位相不変量が得られると期待できる。そこで色付き Jones 多項式という結び目の量子不変量を補正して 3 次元多様体の位相不変量としたものが WRT 不変量である。色付き Jones 多項式は、結び目を射影図によって組合せ論的に解釈し各パーツに量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現を乗せて勘定することで定義される。ここで $U_q(\mathfrak{g})$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を q 変形して得られる非常に複雑な代数で、リボン Hopf 代数と呼ばれる代数構造を持つ。この代数構造が結び目図式の変形の組合せ論的な解釈と非常に良くマッチしているため、図式の各パーツに表現を乗せることが機能して結び目不変量が得られるのである。

なおここで述べたのは Reshetikhin–Turaev [RT91, Theorem 3.3.2] による構成法で、Witten [Wit89] による元々の構成では結び目の Dehn 手術を経由せず 3 次元多様体自体から自然に定まるデータを用いる。しかしながらその構成は経路積分を用いた物理的観点に基づくため数学的に厳密な定式化はまだ得られていない。

以上のことは [Tur10, Chapter II, Section 2] や [大 15] で詳しく説明されている。

一般の WRT 不変量に対する radial limit conjecture の正確な定式化はまだなされていないが、ラフな形としては以下のように述べられる。

予想 3.2 (Radial limit conjecture). 適切な仮定の下で $Z_k^{\mathfrak{g}}(M)$ はある q 級数の $q \rightarrow \zeta_k$ の極限として書ける。

SU(2) WRT 不変量に対する radial limit conjecture は以下のように定式化されている。

予想 3.3 (Hikami [Hik11, Equation (1.4)], Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Conjecture 2.1], Gukov–Manolescu [GM21, Conjecture 3.1]). 向き付け可能な閉 3 次元多様体 M が $H_1(M, \mathbb{Q}) = 0$ を満たすとする。Spin^c(M) を M の Spin^c 構造のなす集合とし、共役によって $\{\pm 1\}$ の作用を定める。このとき各 $b \in \text{Spin}^c(M)/\{\pm 1\}$ に対し位相不変量

$$\Delta_b^{\text{su}(2)} \in \mathbb{Q}, \quad c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M) \in 2^{-c} q^{\Delta_b^{\text{su}(2)}} \mathbb{Z}[[q]]$$

が存在し、 $\hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$ は $|q| < 1$ で収束し、無限個の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$Z_k^{\text{su}(2)}(M) = \lim_{q \rightarrow \zeta_k} \frac{1}{\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}} \sum_{a, b \in \text{Spin}^c(M)/\{\pm 1\}} e^{2\pi\sqrt{-1}k \text{lk}(a, a)} S_{ab} \hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$$

^{*2} ここでの「レベル」という用語は保型形式論における「レベル」とは無関係である。

^{*3} WRT 不変量は正規化を $Z_k(S^3) = 1$ と取るか $Z_k(S^1 \times S^2) = 1$ と取るかで二通りの流儀があるため注意が必要である。本稿では前者の流儀を採用している。

が成り立つ. ただしここで $\text{Stab}_{\{\pm 1\}}(a)$ を a の固定部分群とし,

$$S_{ab} := \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}k \text{lk}(a,b)} + e^{-2\pi\sqrt{-1}k \text{lk}(a,b)}}{|\text{Stab}_{\{\pm 1\}}(a)| |\text{Stab}_{\{\pm 1\}}(b)| \sqrt{|H_1(M, \mathbb{Z})|}}$$

とおいた.

Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] は**負定値鉛管多様体**と呼ばれるクラスの 3 次元多様体に対して予想 3.3 より精密な予想を与えている. 鉛管多様体とは大雑把に言うと整数で重み付けられた木 (閉路の無いグラフ) に対して定まる 3 次元多様体のことで, 特に隣接行列が負定値の木から定まる多様体を負定値鉛管多様体と呼ぶ. 定義の詳細は [村 23, 3 節] にある. 負定値鉛管多様体に対しては予想 3.3 における q 級数不変量 $\hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$ が Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] によって構成され, **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量, ホモロジカルブロック, $\hat{Z}$ 不変量**と呼ばれている. GPPV 不変量の定義は本節の最後に定義 3.5 で述べる.

GPPV 不変量によって予想 3.3 が実現するというのが Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] による予想 3.3 の精密版である.

予想 3.4 ([GPPV20, Equation (A.28)]). 頂点集合 V , 隣接行列 $W \in \text{Sym}(\mathbb{Z}^V)$ の重み付き木から定まる負定値鉛管多様体 M とその GPPV 不変量 $\hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$ に対し

$$Z_k^{\text{su}(2)}(M) = \frac{1}{2(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})\sqrt{|\det W|}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V), \\ b \in \mathbb{Z}^V / 2W(\mathbb{Z}^V)}} e^{2\pi\sqrt{-1}(-k^t a W^{-1} a - {}^t a W^{-1} b)} \lim_{q \rightarrow \zeta_k} \hat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$$

が成り立つ.

以上が本稿で扱う radial limit conjectures である.

なおここでは radial limit conjecture を WRT 不変量の場合に述べたが, 他にも Costantino–Geer–Patureau–Mirand 不変量という 3 次元多様体の量子不変量に対するバージョンが Costantino–Gukov–Putrov [CGP23, Conjecture 1.2] によって与えられている. この予想は現在 Mistegård 氏との共同研究で負定値鉛管多様体の場合の解決に向けて取り組んでいる.

3.3 Radial limit conjectures の先行研究

Radial limit conjectures は様々な場合に解決されている. それらの先行研究を紹介するためにまず様々な 3 次元多様体のクラスを紹介する. 既に述べたように, 整数で重み付けられた木から**鉛管多様体**と呼ばれる 3 次元多様体が定まる. 重み付き木の性質に応じて以下の鉛管多様体の部分クラスが知られている.

- 重み付き木の隣接行列が負定値のとき, 鉛管多様体は**負定値鉛管多様体**と呼ばれる.
- 重み付き木の隣接行列の行列式が ± 1 のとき, 鉛管多様体は**ホモロジー球面**と呼ばれる.
- 図 1 の重み付き木から定まる負定値鉛管ホモロジー球面は **Poincaré ホモロジー球面**と呼ばれる.
- 図 2 の重み付き木から定まる負定値鉛管ホモロジー球面は **Brieskorn ホモロジー球面**と呼ばれる.
- 図 3 の重み付き木から定まる負定値鉛管ホモロジー球面は **Seifert ホモロジー球面**と呼ばれる.

図から分かるように Poincaré ホモロジー球面は Brieskorn ホモロジー球面であり, Brieskorn ホモロジー球面は Seifert ホモロジー球面である. また H グラフと呼ばれる図 4 の重み付き木から定まる負定値鉛管ホモロジー球面は, $w_3, \dots, w_6 \leq -2$ のとき Seifert ホモロジー球面でない最も簡単な負定値鉛管多様体である.

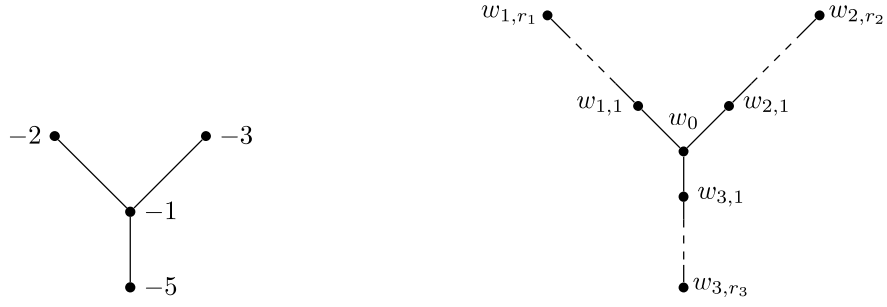


図 1: Poincaré ホモロジー球面を定める鉛管グラフ
図 2: Brieskorn ホモロジー球面を定める鉛管グラフ

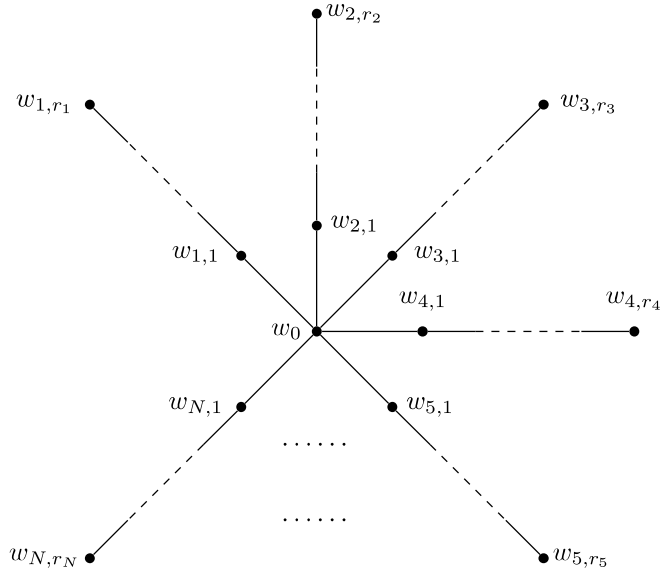


図 3: Seifert ホモロジー球面を定める鉛管グラフ. ただし $N \geq 3$ とする.

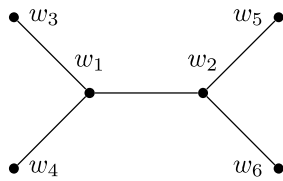


図 4: H グラフ

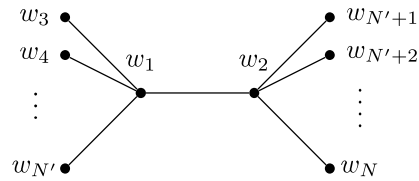


図 5: 村上 [Mur22] で扱われたグラフ

以上の 3 次元多様体に関する radial limit conjecture (予想 3.2–3.4) の先行研究を紹介する. まず radial limit conjecture は $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{su}(2)$ の場合には証明されている実例はこれまで無いことに注意する. そのため以下で挙げる先行研究は全て $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合である.

- Lawrene–Zagier [LZ99] は WRT 不変量の $k \rightarrow \infty$ での漸近展開を与えるという Witten の漸近展開予想を Poincaré ホモロジー球面に対して解決し, その証明の過程で実質的に Poincaré ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を定式化し解決した. 彼らの証明は後に radial limit conjecture (予想 3.3, 3.4) が定式化される契機となった.

- 樋上 [Hik05b] は Lawrene-Zagier [LZ99] の手法を発展させることで Witten の漸近展開予想を Brieskorn ホモロジー球面に対して解決し、証明に際して Brieskorn ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を定式化し解決した。
- 樋上 [Hik06a] は更に Witten の漸近展開予想を Seifert ホモロジー球面に対して解決し、証明に際して Seifert ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を定式化し解決した。
- 樋上 [Hik11] は有理ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を述べた。
- 藤-岩木-村上-寺嶋 [FIMT21, Theorem 1] は Seifert ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を樋上 [Hik06a] と独立に定式化し解決した。
- Gukov-Pei-Putrov-Vafa [GPPV20, Conjecture 2.1] は樋上 [Hik11] の予項項を修正し S 変換の項（予想 3.3 における S_{ab} ）を付け加えた。更に負定値鉛管多様体に対して GPPV 不変量を導入し、この場合の radial limit conjecture をより精密な予想 3.4 の形で述べ（[GPPV20, Equation (A.28)]）、予想の根拠として発散する極限の形式的な計算を示した（[GPPV20, Appendix A]）。
- Gukov-Manolescu [GM21, Conjecture 3.1] は Gukov-Pei-Putrov-Vafa [GPPV20, Conjecture 2.1] の radial limit conjecture に様々な技術的修正を施して予想 3.3 の形で述べた。
- Andersen-Mistegård [AM22] は Seifert ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を予想 3.4 の形で樋上 [Hik06a] や藤-岩木-村上-寺嶋 [FIMT21] とは独立に証明した。
- 森-村上 [MM22] は H グラフから定まる負定値鉛管ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を予想 3.4 の形で Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20a] に基づいて証明した。
- 村上 [Mur22] は図 5 のグラフから定まる負定値鉛管ホモロジー球面に対する radial limit conjecture を予想 3.4 の形で森-村上 [MM22] に基づいて証明した。

3.4 負定値鉛管多様体に対する様々な不変量の表示式

鉛管多様体 M は整数で重み付けられた木 Γ から定まるので、 M の不変量は原理的には Γ の情報のみで記述されるはずである。そのため予想 3.4 は 3 次元多様体の設定を忘れて純粋に Γ に関する主張と思うこともできる。そこで本項では予想 3.3, 3.4 に現れる様々な不変量を負定値鉛管多様体の場合に Γ の言葉で記述する。

まず記号を準備する。整数で重み付けられた木 Γ を固定し、 Γ から定まる鉛管多様体を M とおく。 Γ の頂点集合を V 、隣接行列を $W \in \text{Sym}(\mathbb{Z}^V)$ とおく。各頂点 $v \in V$ の次数を

$$\deg(v) := \{v' \in U \mid v' \text{ は } v \text{ と隣接する}\}$$

によって定義し、 $\delta := (\deg(v))_{v \in V} \in \mathbb{Z}^V$ とおく。

鉛管多様体 M の位相不変量の Γ による記述として以下が知られている。

- ホモロジー群 $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V)$ （証明は [村 22b, 補題 3.4] にある）。
- 交叉形式 $H_1(M, \mathbb{Z}) \times H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ は上の同型 $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V)$ を通して $\mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V) \times \mathbb{Z}^V / W(\mathbb{Z}^V) \rightarrow \mathbb{Z}$ と可換である。
- スピン c 構造のなす $H_1(M, \mathbb{Z})$ 上のアフィン空間 $\text{Spin}^c(M)$ は $(\delta + 2\mathbb{Z}^V) / 2W(\mathbb{Z}^V)$ と自然に全単射である（[GM21, Equation (34)]）。この全単射を通して共役による作用と -1 倍による作用は可換である。
- $\text{SU}(2)$ WRT 不変量は Gukov-Pei-Putrov-Vafa [GPPV20, Equation (A.12)] によって

$$Z_k^{\text{su}(2)}(M) = \frac{\zeta_8^{-\text{sgn}(W)} \zeta_{4k}^{-\text{tr}(W) - 3|V|}}{2\sqrt{2k}^{|V|} (\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})} \sum_{\mu \in (\mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z})^V / 2k\mathbb{Z}^V} e\left(\frac{1}{4k} t_\mu W \mu\right) \prod_{v \in V} (\zeta_{2k}^{\mu_v} - \zeta_{2k}^{-\mu_v})^{2 - \deg(v)}$$

と計算されている。ただしここで $\text{sgn}(W) := \#(W \text{ の正の固有値}) - \#(W \text{ の負の固有値})$ とおいた。

GPPV 不変量は以下のように定義される.

定義 3.5 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Subsection 3.4]). 負定値鉛管多様体 M の **Gukov–Pei–Putrov–Vafa (GPPV) 不変量** を $b \in (\delta + 2\mathbb{Z}^V)/2W(\mathbb{Z}^V) \cong \text{Spin}^c(M)$ に対し

$$\widehat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M) := q^{-(\text{tr}(W)+3|V|)/4} \text{v.p.} \int_{|z_v|=1, v \in V} \Theta_{-W, b}(q; z) \prod_{v \in V} (z_v - z_v^{-1})^{2-\deg(v)} \frac{dz_v}{2\pi\sqrt{-1}z_v}$$

によって定義する. ただし $|q| < 1$ とし, Cauchy の主値 v.p. とテータ関数 $\Theta_{-W, b}(q; z)$ を

$$\text{v.p.} := \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{|z|=1+\varepsilon} + \int_{|z|=1-\varepsilon} \right), \quad \Theta_{-W, b}(q; z) := \sum_{l \in 2\mathbb{Z}^V + b} q^{-lW^{-1}l/4} \prod_{v \in V} z_v^{l_v}$$

によって定義する.

なお GPPV 不変量は負定値鉛管多様体の位相不変量となることが Gukov–Manolescu [GM21, Proposition 4.6] によって証明されている. また GPPV 不変量はテータ関数を積分で変形したものであり, ある種の偽テータ関数と思うことができる. 例えば [AM22, Theorem 3] では Seifert ホモロジー球面と呼ばれる 3 次元多様体の GPPV 不変量を偽テータ関数として表示している.

注意 3.6. $b \in \mathbb{Z}^V/2W(\mathbb{Z}^V)$ に対しても上式を用いてそのまま $\widehat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M)$ を定義できるが, $b \notin (\delta + 2\mathbb{Z}^V)/2W(\mathbb{Z}^V)$ なら $\widehat{Z}_b^{\text{su}(2)}(q; M) = 0$ となることが計算から分かる.

4 主結果

主結果は以下のように述べられる.

定理 4.1 ([Mur23a, Theorem 1.2]). 負定値鉛管多様体の $\text{SU}(2)$ WRT 不変量に関する Gukov–Pei–Putrov–Vafa 予想 (予想 3.4) は真である.

定理 4.2 ([Mur23b, Theorem 1.1]). 隣接行列が不定値の H グラフ (図 4) から定まる鉛管ホモロジー球面の $\text{SU}(2)$ WRT 不変量に関する radial limit conjecture (予想 3.3) は真である. q 級数としては**不定値偽テータ関数**が取れる.

定理 4.3 ([MT23, Theorem 2.3]). Seifert ホモロジー球面に対し ADE 型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に関する WRT 不変量の radial limit conjecture (予想 3.2) は真である. q 級数としては**退化二次形式の偽テータ関数**が取れる.

系 4.4. 定理 4.1–4.3 の状況において WRT 不変量を単純な因子を除いて $q \rightarrow \zeta_k$ の極限値に持つ q 級数を $\widehat{Z}^{\mathfrak{g}}(q; M)$ とおくと, M の L 関数不変量を

$$L^{\mathfrak{g}}(s; M, k) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \widehat{Z}^{\mathfrak{g}}(\zeta_k e^{-t}; M) t^{s-1} dt$$

によって定めるとこれは $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続され $L^{\mathfrak{g}}(0; M, k) = (\text{単純な因子}) Z_k^{\mathfrak{g}}(M)$ が成り立つ.

以上の結果は定理 2.1 の拡張になっている. 証明の方針は 2 節で述べた定理 2.1 の証明と同じだが, 設定が遥かに複雑なことに起因する困難がある. 中でも定理 4.1 は一般の重み付き木を扱うため証明が非常に困難だったが, 「木の枝打ち (pruning trees)」という手法を新しく導入することで解決した.

最後に主定理に現れる偽テータ関数の例を紹介する.

例 4.5. 図 4 で表される H グラフで $(w_1, \dots, w_6) = (-1, 0, 2, 5, 3, 4)$ の場合を考える (これは [Mur23b, Table 1] の 3 行目最初のを -1 倍したものである). このとき隣接行列の行列式は -1 で符号数は $(5, 1)$ であり, 定理 4.2 の q 級数は

$$\widehat{Z}^{\mathfrak{su}(2)}(q; M) = q^{-\frac{137}{240}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \chi(n) \psi(n) q^{\frac{7}{40}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{17}{48}n^2}$$

で与えられる. ただしここで $\chi: \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \rightarrow \{0, \pm 1\}$ と $\psi: \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \rightarrow \{0, \pm 1\}$ はそれぞれ

$$\sum_{0 \leq m < 20} \chi(m) q^m := q^{10}(q^2 - q^{-2})(q^5 - q^{-5}), \quad \sum_{0 \leq n < 24} \psi(n) q^4 := q^{12}(q^3 - q^{-3})(q^4 - q^{-4})$$

で定義される周期写像である. 上式に現れる二次形式 $\frac{7}{40}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{17}{48}n^2$ は符号数 $(1, 1)$ の不定値二次形式である.

例 4.6 ([MT23, Example 4.2]). $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ のとき, Seifert ホモロジー球面 M に対する定理 4.3 の q 級数は

$$\widehat{Z}^{\mathfrak{su}(3)}(q; M) = q^{-3\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \chi(m) q^{t_m S m / 8P}, \quad S := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられる. ただしここで $\phi \in \mathbb{Q}$, $P \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\chi(m)$ は Seifert ホモロジー球面 M から定まる量であり, $\chi(m)$ は m の各成分に関する周期写像と二項係数の積として表される. ここで行列 S は固有値として $3, 3, 0$ を持つため, $t_m S m$ は退化二次形式である.

謝辞

金子昌信先生 (九州大学) と山内卓也先生 (東北大学) には様々なご助言を頂きました. 寺嶋郁二先生 (東北大学), 樋上和弘先生 (九州大学), 松坂俊輝さん (九州大学), 佐野岳人さん (理研), William Mistegård さん (南デンマーク大学) には本稿に関する沢山のことを教わりました. 青木宏樹先生 (東北理科大学) と並川健一先生 (東京電機大学) には 2024 年 1 月の研究集会「RIMS 共同研究 (公開型) 保型形式の研究」にて大変お世話になりました. また本研究は JSPS 科研費 23KJ1675 の助成を受けたものです. ここに深く感謝いたします.

参考文献

- [AJU01] G. E. Andrews, J. Jiménez-Urroz, and K. Ono. q -series identities and values of certain L -functions. *Duke Math. J.*, 108(3):395–419, 2001.
- [AM22] J. E. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. *Journal of the London Mathematical Society*, 105(2):709–764, 2022.
- [BFR12] K. Bringmann, A. Folsom, and R. C Rhoades. Partial theta functions and mock modular forms as q -hypergeometric series. *The Ramanujan Journal*, 29(1):295–310, 2012.
- [BK10] K. Bringmann and B. Kane. New identities involving sums of the tails related to real quadratic fields. *Ramanujan J.*, 23(1-3):243–251, 2010.
- [BKM19a] K. Bringmann, J. Kaszian, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20, 41, 2019.
- [BKM19b] K. Bringmann, J. Kaszian, and A. Milas. Vector-valued higher depth quantum modular forms and higher Mordell integrals. *J. Math. Anal. Appl.*, 480(2):123397, 22, 2019.
- [BKMN21] K. Bringmann, J. Kaszian, A. Milas, and C. Nazaroglu. Higher depth false modular forms. *arXiv preprint arXiv:2109.00394*, 2021.

- [BMM20a] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.
- [BMM20b] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas. Quantum modular forms and plumbing graphs of 3-manifolds. *J. Combin. Theory Ser. A*, 170:105145, 32, 2020.
- [BN19] K. Bringmann and C. Nazaroglu. A framework for modular properties of false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 30, 23, 2019.
- [CCF⁺19] M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov, and S. M. Harrison. 3d modularity. *Journal of High Energy Physics*, 2019(10):1–95, 2019.
- [CGP23] F. Costantino, S. Gukov, and P. Putrov. Non-semisimple tqft’s and bps q -series. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 19:010, 2023.
- [DT07] F. Deloup and V. Turaev. On reciprocity. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(1):153–158, 2007.
- [FIMT21] H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami, and Y. Terashima. Witten – Reshetikhin – Turaev function for a knot in Seifert manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 2021.
- [GM21] S. Gukov and C. Manolescu. A two-variable series for knot complements. *Quantum Topology*, 12(1), 2021. arXiv:1904.06057.
- [GPPV20] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.
- [GZ21] S. Garoufalidis and D. Zagier. Knots, perturbative series and quantum modularity. *arXiv preprint arXiv:2111.06645*, 2021.
- [Hik03] K. Hikami. Volume conjecture and asymptotic expansion of q -series. *Experiment. Math.*, 12(3):319–337, 2003.
- [Hik05a] K. Hikami. Mock (false) theta functions as quantum invariants. *Regul. Chaotic Dyn.*, 10(4):509–530, 2005.
- [Hik05b] K. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6):661–685, 2005.
- [Hik05c] K. Hikami. Quantum invariant, modular form, and lattice points. *Int. Math. Res. Not.*, (3):121–154, 2005.
- [Hik06a] K. Hikami. On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 268(2):285–319, 2006.
- [Hik06b] K. Hikami. q -series and L -functions related to half-derivatives of the Andrews–Gordon identity. *Ramanujan J.*, 11(2):175–197, 2006.
- [Hik06c] K. Hikami. Quantum invariants, modular forms, and lattice points. II. *J. Math. Phys.*, 47(10):102301, 32, 2006.
- [Hik07] K. Hikami. Hecke type formula for unified Witten–Reshetikhin–Turaev invariants as higher-order mock theta functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):Art. ID rnm 022, 32, 2007.
- [Hik11] Kazuhiro Hikami. Decomposition of Witten–Reshetikhin–Turaev invariant: linking pairing and modular forms. In *Chern–Simons gauge theory: 20 years after*, volume 50 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 131–151. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [HK03] K. Hikami and A. N. Kirillov. Torus knot and minimal model. *Physics Letters B*, 575(3-4):343–348, 2003.
- [HK06] Kazuhiro Hikami and A. N. Kirillov. Hypergeometric generating function of L -function, Slater’s identities, and quantum invariant. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 17(1):143–156, 2006.
- [HL15] K. Hikami and J. Lovejoy. Torus knots and quantum modular forms. *Research in the Mathematical Sciences*, 2(1):1–15, 2015.
- [HL17] K. Hikami and J. Lovejoy. Hecke-type formulas for families of unified Witten–Reshetikhin–Turaev invariants. *Commun. Number Theory Phys.*, 11(2):249–272, 2017.
- [HLSS21] L. Han, Y. Li, D. Sauzin, and S. Sun. Resurgence and partial theta series. *arXiv preprint arXiv:2112.15223*, 2021.
- [LO03] J. Lovejoy and K. Ono. Hypergeometric generating functions for values of Dirichlet and other L functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100(12):6904–6909, 2003.
- [LO19] Jeremy Lovejoy and Robert Osburn. The colored Jones polynomial and Kontsevich–Zagier series for

- double twist knots, II. *New York J. Math.*, 25:1312–1349, 2019.
- [LO21] Jeremy Lovejoy and Robert Osburn. The colored Jones polynomial and Kontsevich-Zagier series for double twist knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 30(5):Paper No. 2150031, 28, 2021.
- [LZ99] R. Lawrence and D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. *Asian J. Math.*, 3(1):93–107, 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.
- [Mat23] T. Matsusa. Hikami’s observations on unified wrt invariants and false theta functions. “*Low dimensional topology and number theory*” *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2023.
- [MM22] A. Mori and Y. Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev invariants, homological blocks, and quantum modular forms for unimodular plumbing H-graphs. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 18:034, 2022.
- [MT21] T. Matsusaka and Y. Terashima. Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres. *arXiv:2112.06210*, 2021.
- [MT23] Y. Murakami and Y. Terashima. Homological blocks with simple Lie algebras and Witten–Reshetikhin–Turaev invariants. *arXiv preprint arXiv:2308.04010*, 2023.
- [Mur22] Y. Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev invariants and homological blocks for plumbed homology spheres. 2022. *arXiv:2205.01282*.
- [Mur23a] Y. Murakami. A proof of a conjecture of Gukov–Pei–Putrov–Vafa. 2023. *arXiv:2302.13526*.
- [Mur23b] Y. Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev invariants and indefinite false theta functions for plumbing indefinite H-graphs. *arXiv preprint arXiv:2212.09972v2*, 2023.
- [MZ23] E. Mortenson and S. Zwegers. The mixed mock modularity of certain duals of generalized quantum modular forms of Hikami and Lovejoy. *Adv. Math.*, 418:Paper No. 108944, 27, 2023.
- [Ono04] K. Ono. *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*, volume 102 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.
- [Tur10] V. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, revised edition, 2010.
- [Wit89] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.
- [Zag01] D. Zagier. Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function. *Topology*, 40(5):945–960, 2001.
- [Zag06] D. Zagier. The mellin transform and other useful analytic techniques. In *Appendix to E. Zeidler, Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics. A Bridge Between Mathematicians and Physicists*, pages 305–323. Springer, Berlin, 2006.
- [Zag10] D. Zagier. Quantum modular forms. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 659–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [大 15] 大槻知忠. **結び目の不変量**. 共立講座 数学の輝き. 共立出版, 2015.
- [村 22a] 村上友哉. 量子モジュラー形式について. 第 14 回福岡数論研究集会報告集, 2022.
- [村 22b] 村上友哉. 非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性. *数理解析研究所講究録*, (2230):126–142, 10 2022.
- [村 23] 村上友哉. 鉛管ホモロジー球面のホモロジカルブロック. *数理解析研究所講究録*, (2259), 2023.
- [松 22] 松坂俊輝. 量子モジュラー形式と Seifert 多様体に対する homological block の保型変換則. In *RIMS 講究録 別冊「保型形式, 保型 L 関数とその周辺*, 2022.