GL_n の共役自己双対表現の捻った跡の漸近挙動

金沢大学 数物科学系　若槻 聡
Satoshi Wakatsuki
Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University

Abstract

高梨悠吾氏との共同研究 [10] において, 主合同部分群のレベルに関する GL_n の自己双対および共役自己双対表現の捻った跡の漸近公式を証明し, 自己双対および共役自己双対の局所表現の大域化を示し, 共役自己双対表現に対する保型密度定理を得た．この原稿では共役自己双対表現に話を限定して [10] の結果を紹介する.

1　離散スペクトルと共役自己双対表現

この節では, いくつかの記号を導入して, 基本的な事実を復習する.

n を 2 以上の自然数とし, F を代数体として, E を F の 2 次拡大とする．そして, F 上の代数群

$$G := \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$$

を考える．ただし, $\mathrm{Res}_{E/F}$ は Weil restriction を意味する．n 次正方行列 J_n を

$$J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_{m+1} := \begin{pmatrix} & J_m \\ (-1)^{m+1} & \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定義する．そして, E/F のガロワ群の非自明な元 ι を使って, G 上の F-対合 θ を

$$\theta(g) = J_n\, \iota\left({}^t g^{-1}\right)\, J_n^{-1} \qquad (g \in G)$$

によって定義する．ただし, ${}^t g$ は g の転置を意味する.

群 G の拡張である非連結群 $G^+ := G \rtimes \langle\theta\rangle$ の演算を

$$(g_1 \rtimes \theta^{j_1}) \cdot (g_2 \rtimes \theta^{j_2}) = g_1\, \theta^{j_1}(g_2) \rtimes \theta^{j_1+j_2}, \quad g_1,\ g_2 \in G,\ \ j_1,\ j_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

により定める．F の素点 v について F_v を v における F の完備化とする．$G(F_v)$ の既約許容表現 π_v は θ 安定（共役自己双対）とする, つまり $\pi_v \circ \theta \simeq \pi_v$ とする．このとき, $G(F_v)$ への制限が π_v と同値になるような $G^+(F_v)$ の既約表現は（同値を除いて）二つ存在する．それらを π_1^+, π_2^+ と書くと, 関係式 $\pi_1^+(\theta) = -\pi_2^+(\theta)$ が成り立つ．ただし, θ は $1 \rtimes \theta$ を意味する．従って, π_v の $G^+(F_v)$ の既約表現への拡張は 2 通り存在する.

$\mathbb{A}$ を F 上のアデール環とし, $|\ |$ を $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルム, そして

$$G(\mathbb{A})^1 := \{g \in G(\mathbb{A}) \mid |\det(g\, \iota(g))| = 1\}$$

とする．L^2 空間 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の離散スペクトルを $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と記し，$L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上の右正則表現を R_{disc} で記述する．各素点 v について θ 安定な極大コンパクト群 K_v が次のように与えられる．

$$K_v \simeq \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_{E,v}) & v<\infty \text{ のとき}, \\ \mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n) & E_v=\mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ のとき}, \\ \mathrm{U}(n) & E_v=\mathbb{C} \text{ のとき}, \\ \mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n) & E_v=\mathbb{C}\times\mathbb{C} \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき，$K=\prod_v K_v$ は標準的な $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト群であり，θ-安定にもなっている．$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ を両側 K-有限なコンパクトサポートを持つ滑らかな $G(\mathbb{A})^1$ 上の複素数値関数全体の空間とする．テスト関数として $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ を取ると，$L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上の積分作用素 $R_{\mathrm{disc}}(f)$ が

$$(R_{\mathrm{disc}}(f)\phi)(x)=\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\phi(xg)\,\mathrm{d}g, \qquad \phi\in L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$$

により定まる．

空間 $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上の線形作用 $R_{\mathrm{disc}}(\theta)$ を $(R_{\mathrm{disc}}(\theta)\phi)(g)\coloneqq\phi(\theta(g))$ によって定義する．この作用によって $G(\mathbb{A})$ の表現 R_{disc} は $G^+(\mathbb{A})$ の表現として自然に拡張される．そして，$L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は次のような可算個の保型表現のヒルベルト直和に分解する．

$$L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)\simeq\bigoplus_{\pi\in\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A})^1)} m(\pi)\cdot\pi.$$

ただし，$m(\pi)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は R_{disc} における π の重複度とし，$\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A})^1)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合とする．

F の無限素点 $v_{\infty,1}$ を一つ固定しよう．埋め込み $\mathbb{R}_{>0}\hookrightarrow F^{\times}_{v_{\infty,1}}$ も固定しておく．そして，群 $\mathbb{R}_{>0}$ は $\mathrm{GL}_n(F_{v_{\infty,1}})$ の部分群 $\{a1_n\mid a\in\mathbb{R}_{>0}\}$ と同一視され，同型 $G(\mathbb{A})^1\times\mathbb{R}_{>0}\cong G(\mathbb{A})$ を得る．$\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A}))$ (resp. $\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A})^1)$) によって，$G(\mathbb{A})$ (resp. $G(\mathbb{A})^1$) の θ 安定な既約ユニタリ表現の同値類の集合を記述する．任意の表現 $\pi\in\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A}))$ について θ 安定の条件より π の $\mathbb{R}_{>0}$ への制限は自明となる．つまり，$\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A}))$ と $\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A})^1)$ は同一視される．

F の各有限素点 v について，$\mathfrak{o}_{F,v}$ は F_v の整数環とし，$E_v\coloneqq\prod_{w|v}E_w$，$\mathfrak{o}_{E,v}\coloneqq\prod_{w|v}\mathfrak{o}_{E,w}$ と定める．F の整数環を $\mathfrak{o}_F$ と記述し，埋め込み $\mathfrak{o}_E\hookrightarrow\mathrm{M}_2(\mathfrak{o}_F)$ を一つ固定しよう．この埋め込みから射 $\nu\colon G\hookrightarrow\mathrm{GL}_{2n}$ が自然に得られ，G は GL_{2n} の閉部分群と見做せる．そして，$\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ を考える．各有限素点 v について，レベル $\mathfrak{n}$ の主合同部分群 $K_v(\mathfrak{n})$ を

$$K_v(\mathfrak{n})\coloneqq\{k\in K_v\mid\nu(k)\equiv I_{2n}\mod\mathfrak{n}\otimes\mathfrak{o}_{F,v}\}$$

によって定義する．表現 $\pi\simeq\otimes_v\pi_v\in\mathrm{Irr}^{\theta}_{\mathrm{u}}(G(\mathbb{A}))$ に対して，

$$\pi_S\coloneqq\bigotimes_{v\in S}\pi_v, \qquad \pi^S\coloneqq\bigotimes_{v\notin S}\pi_v$$

と記号を定める．ただし, π_v は $G(F_v)$ のユニタリ表現とする．局所表現 π_v の表現空間 V_{π_v} について $V_{\pi^S} := \otimes_{v\notin S} V_{\pi_v}$ とおく．開コンパクト部分群 $K^S(\mathfrak{n}) := \prod_{v\notin S} K_v(\mathfrak{n})$ に対して,

$$V_{\pi^S}(\mathfrak{n}) := \{\phi \in V_{\pi^S} \mid \pi(k)\phi = \phi \ \ (\forall k \in K^S(\mathfrak{n}))\}$$

とおく, つまり, $V_{\pi^S}(\mathfrak{n})$ は V_{π^S} 内の $K^S(\mathfrak{n})$ 固定ベクトルから成る部分空間である．

2 漸近公式

この節では我々の主結果について述べる．以下では, F の素点の有限集合 S を一つ固定する．さらに, S は F の全ての無限素点を含み, E_v が F_v 上分岐しているような素点 v も全て含むものとする．$K_S := \prod_{v\in S} K_v$ は $G(F_S)$ の極大コンパクト群となる．

$F_S := \prod_{v\in S} F_v$, $G(F_S)^1 := G(F_S) \cap G(\mathbb{A})^1$ とおく．このとき, $G(F_S)^1 \times \mathbb{R}_{>0} \cong G(F_S)$ が成り立つ．Fell 位相を持つ θ 安定な既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))$ と書く．先ほどと同様, $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))$ と $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S)^1)$ は同一視される．次に $\mathcal{H}(G(F_S))$ をコンパクトサポートを持つ K_S 有限な $G(F_S)$ 上の関数から成る空間としよう．関数 $f \in \mathcal{H}(G(F_S))$ に対して, $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))$ 上の関数 $\hat{f}^{\theta}$ を次の等式で定義する．

$$\hat{f}^{\theta}(\pi) = \mathrm{tr}(\pi(\theta) \circ \pi(f^{\vee})) \quad (\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))), \quad \text{ただし } f^{\vee}(g) := f(g^{-1}).$$

有限素点 v について $\mathfrak{p}_v$ は v に対応する $\mathfrak{o}_F$ の素イデアルとし, $\mathrm{Nm}(\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{o}_F$ における $\mathfrak{n}$ のノルムとする．ここで, $\mathfrak{o}_F$ のイデアルの減少列

$$\mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}_j \supset \cdots$$

を一つ取ろう．そして, この減少列 $\{\mathfrak{n}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は次の性質を満たすものとする．

$$\text{全ての } j \in \mathbb{N} \text{ について } \mathfrak{n}_j \text{ と } \prod_{\substack{v\in S\\ v<\infty}} \mathfrak{p}_v \text{ は互いに素, かつ } \lim_{j\to\infty} \mathrm{Nm}(\mathfrak{n}_j) = \infty.$$

以上の設定の下, $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))$ 上の測度 $\mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}$ が次のように定義される．

$$\mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)} = \mathrm{vol}(K^S(\mathfrak{n}_j)) \sum_{\pi\cong\pi_S\otimes\pi^S\in\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(\mathbb{A})^1)} m(\pi)\,\mathrm{tr}\left(\pi^S(\theta)|_{V_{\pi^S}(\mathfrak{n}_j)}\right)\,\delta_{\pi_S}.$$

ただし, δ_{π_S} は $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^{\theta}(G(F_S))$ 上の π_S のディラック測度とする．さらに, $\pi_v(\theta)$ は [1, §2.2] に沿って正規化する, このとき, $\pi(\theta)$ とこの正規化は両立する関係となることに注意されたい (cf. [1, Lemma 4.2.3]).

$F\backslash\mathbb{A}$ 上の加法的指標 $\psi = \otimes_v \psi_v$ を一つ固定しよう．主結果の漸近公式の記述では Shahidi の定理 [7, Theorem 3.5] の γ 因子 $\gamma(s, \pi_v, r, \psi_v)$ を使う．ただし, r は L 群の表現を意味し, この原稿では Adjoint 表現 Ad と Asai 表現 $\mathrm{As}^{\pm}$ が用いられる．Shahidi の γ 因子は絡作用

素で定義されるので, その γ 因子と L パラメータとの関係については [3, 8] を参照されたい. 整数 $n_{\pi_v,r}$ は $s=0$ における $\gamma(s,\pi_v,r,\psi_v)$ の零の位数とし,

$$\gamma^*(0,\pi_v,r,\psi_v) \coloneqq \lim_{s\to 0} \zeta_{F_v}(s)^{n_{\pi_v,r}}\gamma(s,\pi_v,r,\psi_v)$$

とおく. ただし, $\zeta_{F_v}(s)$ はデデキントゼータ関数の v での局所因子とする.

我々の主結果と先行研究を比較するために, $G=\mathrm{GL}_n/F$, θ は自明として, [4] の結果を述べておこう. 特に $v\in S$, $E_v=F_v\times F_v$ の場合に同じ測度が現れることになる. ただ, 少し注意すべき点は [4] の測度 $\mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}$ は $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_S))$ ではなく $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_S)^1)$ 上の測度になっていることである. $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_v))$ によって $G(F_v)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を表し, $\mathrm{Temp}(G(F_v))$ によって $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_v))$ の緩増加元から成る部分集合を記述する. ここで詳細について説明しないが, $\mathrm{Temp}(G(F_v))$ のパラメータに沿って $\mathrm{Temp}(G(F_v))$ 上の測度 $\mathrm{d}_{\mathrm{Temp}(G(F_v))}(\pi_v)$ と有限群 S_{π_v} が定義される. 定義の詳細については [10, §6] を参照されたい. [2, Proof of Proposition 2.132] によると, $\mathrm{Temp}(G(F_v))$ 上の Harish-Chandra の Plancherel 測度 $\mu_{G(F_v)}$ は, ある定数 $c_v\in\mathbb{C}^\times$ について

$$\mu_{G(F_v)}(\hat{f}) = c_v \int_{\mathrm{Temp}(G(F_v))} \hat{f}(\pi_v)\,\frac{\chi_{\pi_v}(-1)^{n-1}\gamma^*(0,\pi_v,\mathrm{Ad},\psi_v)}{|S_{\pi_v}|}\,\mathrm{d}_{\mathrm{Temp}(G(F_v))}(\pi_v)$$

と表される. ただし, $\hat{f}$ は $\mathrm{Temp}(G(F_v))$ 上のテスト関数で, χ_{π_v} は π_v の中心指標とする. $\mathrm{Temp}(G(F_S)^1)$ 上の Plancherel 測度 μ は $G(F_S)\cong G(F_S)^1\times\mathbb{R}_{>0}$ によって $v\in S$ 上の $\mu_{G(F_v)}$ の直積から得られる. ある定数 $c\in\mathbb{C}^\times$ が存在して, 任意のテスト関数 $f_S\in\mathcal{H}(G(F_S)^1)$ について, 極限重複度公式

$$\lim_{j\to\infty}\mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}\left(\hat{h}_S^\theta\right) = c\times\mu\left(\hat{f}_S^\theta\right)$$

が成り立つことが, Finis-Lapid-Müller [4] によって証明された. ただし, $h_S(g)\coloneqq f_S(g^{-1})$ $(g\in G(F_S))$ とした. 我々が以下で述べる公式は, この極限重複度公式の捻り類似となる.

さて, これより我々の主結果に必要とされる条件を与える. 主結果の証明では捻った跡公式を用いたが, スペクトルサイドに現れる連続スペクトルからの寄与のレベルに対する増大度を評価する方法が見つからなかったので, テスト関数に条件を付けることでスペクトルサイドの評価を回避することにした. (そのようなテスト関数への条件を外すことが今後の課題になっている.)

一つの素点 $v_0\in S$ を固定しよう. ただし, E_{v_0} は F_{v_0} 上分裂しないとする. そして,

$$S_0\coloneqq S\setminus\{v_0\},\quad S_j\coloneqq S\sqcup\{v<\infty\mid \mathfrak{p}_v \text{ は } \mathfrak{n}_j \text{ を割る }\}$$

と記号を定める. $S_j\subset S_{j+1}$ $(j\in\mathbb{N})$ に注意する. さらに $\sigma_{v_0}\in\mathrm{Temp}^\theta(G(F_{v_0}))$ を一つ取ろう. 次の条件 *(A1)* または *(A2)* のうちの一つを仮定する.

(A1) $\lim_{j\to\infty} |S_j| < \infty$ かつ σ_{v_0} は θ-discrete series とする.
(A2) $v_0 < \infty$ かつ σ_{v_0} は supercuspidal とする.

仮定 *(A1)* における σ_{v_0} が θ-discrete series であるとは, 現在の条件下においては σ_{v_0} が $\mathrm{Temp}^\theta(G(F_{v_0}))$ の離散位相を持つ部分集合に属することを意味する.

仮定 *(A1)* (resp. *(A2)*) の下で, テスト関数 $f_{v_0} \in \mathcal{H}(G(F_{v_0}))$ は σ_{v_0} の pseudo-coefficient (resp. matrix coefficient) とする. テスト関数 $f_{S_0} \in \mathcal{H}(G(F_{S_0}))$ を取り,

$$f_S \coloneqq f_{v_0} \otimes f_{S_0} \in \mathcal{H}(G(F_S)).$$

と設定する. 次の二つうちの一つを仮定する.

(+) $\gamma(0, \sigma_{v_0}, \mathrm{As}^+, \psi_{v_0}) = 0$ かつ $\gamma(0, \sigma_{v_0}, \mathrm{As}^-, \psi_{v_0}) \neq 0$.
(−) $\gamma(0, \sigma_{v_0}, \mathrm{As}^-, \psi_{v_0}) = 0$ かつ $\gamma(0, \sigma_{v_0}, \mathrm{As}^+, \psi_{v_0}) \neq 0$.

素点 $v \in S_0$ について, $E_v = F_v \times F_v$ のとき $r_v = \mathrm{Ad}$, $E_v \neq F_v \times F_v$ のとき (+) を仮定したなら $r_v = \mathrm{As}^+$, (−) を仮定したなら $r_v = \mathrm{As}^-$ と定める. 各素点 $v \in S_0$ について, $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}^\theta(G(F_v))$ の部分空間 $\mathrm{EL}(G(F_v), r_v)$ が存在し, 上述の $\mu_{G(F_v)}$ の類似として空間 $\mathrm{EL}(G(F_v), r_v)$ 上の測度 $\mu_{\mathrm{EL}(G(F_v),r_v)}$ も存在する. ここでは説明しないが, 詳しくは [10, §6] を参照されたい. $E_v = F_v \times F_v$ のときは $\mu_{G(F_v)}$ と $\mu_{\mathrm{EL}(G(F_v),r_v)}$ は同一視される. そうでない場合, $\mu_{\mathrm{EL}(G(F_v),r_v)}$ は $\gamma^*(0, \pi_v, \mathrm{Ad}, \psi_v)/\gamma^*(0, \pi_v, r_v, \psi_v)$ によって記述される. そして, μ_0 は $v \in S_0$ 上の $\mu_{\mathrm{EL}(G(F_v),r_v)}$ の直積とする. 主要項のレベルに関する増大度は

$$\mathfrak{m}^S(\mathfrak{n}_j) \coloneqq \mathrm{Nm}(\mathfrak{n}_j)^{-n^2} \times \prod_{v \in S_j \setminus S} (1 - q_v^{-1})^{-1} \times \prod_{v \notin S_j} \prod_{j=2}^{n} (1 - \eta_v(\varpi_v)^{j-1} q_v^{-j})$$

と与えられる. ただし, q_v は $\mathfrak{o}_{F,v}$ の剰余体の位数, η_v は E_v に対応する $F_v^\times$ 上の 2 次指標とする. 次の定理が我々の主結果である.

定理 2.1　素点 $v_0 \in S$ を一つ取り, *(A1)* もしくは *(A2)* のどちらか一つを仮定し, さらに (+) もしくは (−) のどちらか一つを仮定する. このとき, ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, 任意の $f_S \in \mathcal{H}(G(F_S))$ について極限公式

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{m}^S(\mathfrak{n}_j)} \mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}\left(\hat{h}_S^\theta\right) = c \times \mu_0\left(\hat{f}_{S_0}^\theta\right)$$

が成立する. ただし, $h_S \in \mathcal{H}(G(F_S))$ は $h_S(g) = f_S(\theta(g^{-1}))$ により定義される.

この定理を捻った跡公式で証明するとき, 幾何サイドに二つの主要項が現れる. (+) と (−) は幾何サイドにある主要項の片方のみを残すための条件となっており, どちらかを仮定することで測度 $\mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}$ の極限の意味を明確にすることができている.

この原稿では証明について説明しないので, 証明の詳細については [10] を参照されたい.

3 大域化

定理 2.1 の応用について述べよう．この研究を行った一つの動機は, [9] で Endoscopic classification を用いて証明された共役自己双対大域化に対して, Endoscopic classification を使用しない別証明を与えることであった．与えられた共役自己双対な局所表現に対して, それらを局所成分に持つような共役自己双対なカスピダル保型表現の存在を示すことを, 共役自己双対大域化と呼んでいる．

以下, 定理 2.1 の仮定をそのまま継続する．$|\ |_{v_0}$ を E_{v_0} の正規付値とする．$\mathrm{Irr}^\theta_{\mathrm{u,res}}(G(F_{v_0}))$ によって $\mathrm{Irr}^\theta_{\mathrm{u}}(G(F_{v_0}))$ の元 σ で次のように表されるもの全体を記述する．

$$\mu|\det|_{v_0}^{\frac{m-1}{2}} \boxplus \mu|\det|_{v_0}^{\frac{m-3}{2}} \boxplus \cdots \boxplus \mu|\det|_{v_0}^{\frac{-m+1}{2}}.$$

ただし, $m\,(>1)$ は n の約数とし, μ は $\mathrm{GL}_{n/m}(E_{v_0})$ の既約 generic ユニタリ表現とする．集合 $\mathrm{Irr}^\theta_{\mathrm{u,res}}(G(F_{v_0}))$ は $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 内の留数保型表現の局所成分に現れるクラスをすべて含んでいることが知られている (cf. [5])．次の条件を仮定しよう．

$$\hat{f}^\theta_{v_0} \text{ は } \mathrm{Irr}^\theta_{\mathrm{u,res}}(G(F_{v_0})) \text{ 上で } 0 \text{ となる．} \tag{3.1}$$

(A2) の下であればこの条件は自動的に成立する．$\mathrm{Irr}^\theta_{\mathrm{gen,u}}(G(F_{S_0}))$ によって $G(F_{S_0})$ の θ 安定な既約 generic ユニタリ表現の同値類の集合を記述する．定理 2.1 から次の共役自己双対大域化が導かれる．

定理 3.1 S_0 の部分集合 $\mathbf{S}$ を一つ取る．各 $v \in \mathbf{S} \sqcup \{v_0\}$ について $\tilde{\sigma}_v$ は $G(F_v)$ の θ-discrete series とする．そして, 各 $v \in \mathbf{S} \sqcup \{v_0\}$ について σ_v は $\tilde{\sigma}_v$ の反傾表現とする．定理 2.1 と同じ条件を仮定し, σ_{v_0} は (3.1) を満たすと仮定する．加えて, $v \in \mathbf{S}$ について E_v は F_v 上分裂しないとする．σ_{v_0} が $(+)$ (resp. $(-)$) を満たすなら, すべての $v \in \mathbf{S}$ について $\gamma(0, \sigma_v, \mathrm{As}^+, \psi_v) = 0$ (resp. $\gamma(0, \sigma_v, \mathrm{As}^-, \psi_v) = 0$) を仮定する．このとき, 十分大きな $j \in \mathbb{N}$ と $G(\mathbb{A})$ の θ 安定なカスピダル保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ が存在して, すべての $v \in \mathbf{S} \sqcup \{v_0\}$ について $\pi_v \cong \tilde{\sigma}_v$ であり, かつ $\mathrm{tr}\left(\pi^S(\theta)|_{V_{\pi^S}(\mathfrak{n}_j)}\right) \neq 0$ が成立する．

4 保型密度定理

最後に定理 2.1 から導かれる保型密度定理について説明しよう．保型密度定理とは極限重複度公式の適用範囲を $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_S))$ 上のリーマン可積分関数にまで拡張したものをいう．この定理を証明するためには Sauvageot [6] の $\mathrm{Irr}_{\mathrm{u}}(G(F_S))$ 上の密度定理の捻り類似が必要とされる．[10, Part 3] においては, その密度定理の捻り類似を GL_n に限定して証明している．

各イデアル $\mathfrak{n}_j$ の素イデアル分解が次のように与えられるとする.

$$\mathfrak{n}_j = \prod_{v<\infty} \mathfrak{p}_v^{r_{v,j}}, \quad r_{v,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

定理 4.1　定理 2.1 と同じ条件を仮定する. さらに, σ_{v_0} は (3.1) を満たし, 各有限素点 $v \notin S$ に対して $r_{v,j} > 0$ となる $j \in \mathbb{N}$ が存在するなら $E_v = F_v \times F_v$ となることを仮定する. このとき, 次の二つの主張が成立する.

- ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $\mathrm{Temp}^\theta(G(F_{S_0}))$ における任意のジョルダン可測部分集合 A について

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{m}^S(\mathfrak{n}_j)} \mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}(A \times \{\sigma_{v_0}\}) = c \times \mu_0\left(\bar{A}\right)$$

  が成り立つ. ただし, $\bar{A}$ は A の元の反傾表現から成る集合とする.
- $\mathrm{Irr}_\mathrm{u}^\theta(G(F_{S_0})) \setminus \mathrm{Temp}^\theta(G(F_{S_0}))$ における任意の双対コンパクト部分集合 B について

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{m}^S(\mathfrak{n}_j)} \mu_{K^S(\mathfrak{n}_j)}(B \times \{\sigma_{v_0}\}) = 0$$

  が成り立つ.

参考文献

[1] James Arthur, *The endoscopic classification of representations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Orthogonal and symplectic groups. MR 3135650

[2] Raphaël Beuzart-Plessis, *Plancherel formula for* $\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, Invent. Math. **225** (2021), no. 1, 159–297. MR 4270666

[3] J. W. Cogdell, F. Shahidi, and T.-L. Tsai, *Local Langlands correspondence for* GL_n *and the exterior and symmetric square* ε*-factors*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 11, 2053–2132. MR 3694565

[4] Tobias Finis, Erez Lapid, and Werner Müller, *Limit multiplicities for principal congruence subgroups of* $\mathrm{GL}(n)$ *and* $\mathrm{SL}(n)$, J. Inst. Math. Jussieu **14** (2015), no. 3, 589–638. MR 3352530

[5] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), no. 4, 605–674. MR 1026752

[6] François Sauvageot, *Principe de densité pour les groupes réductifs*, Compositio Math. **108** (1997), no. 2, 151–184. MR 1468833

[7] Freydoon Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273–330. MR 1070599

[8] Daniel Shankman, *Local Langlands correspondence for Asai L-functions and epsilon factors*, arXiv e-prints (2018), arXiv:1810.11852.

[9] Yugo Takanashi, *Parity of conjugate self-dual representations of inner forms of* GL_n *over p-adic fields*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2204.08830.

[10] Yugo Takanashi and Satoshi Wakatsuki, *Asymptotic behavior for twisted traces of self-dual and conjugate self-dual representations of* GL_n, arXiv:2402.11945 (2024).