実数の計算可能性

Computability of Real Numbers

明治大学理工学部数学科　宮部賢志 *1
Kenshi Miyabe
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
Meiji University

Abstract

This tutorial discusses the computability of real numbers. In particular, it provides definitions and properties of computable reals, weakly computable reals, and computably approximable reals.

1 はじめに

本稿では計算可能実数およびその変種について解説する[1)].

計算可能実数とは，(原理的には) アルゴリズムにより任意の精度で近似可能な実数をいう．解析学の基礎である実数論においては，非構成的もしくは計算不可能な手続きが頻繁に登場する．そこで計算可能性を導入することにより，実数や定理の計算論的な複雑さを調べることができる．それにより計算という観点において簡潔な理論を構築することができる．また理論と実装をつなぐ基盤にもなる．

計算可能性 (computability) という概念は，1930 年代に Church や Turing らによって確立された．今日，**計算可能性理論** (計算論，computability theory) と呼ばれ，主に Cantor 空間 (2 進無限列の空間) に対する計算可能性を考察する．この分野の教科書としては Sipser[9] や Soare[10] などがあげられる．

実関数に対する計算可能性の理論は，**計算可能解析学** (computable analysis) と呼ばれている．この分野の教科書・解説としては，Weihrauch[12] や Brattka et al.[2] などがあげられる．

本稿は主に計算可能性理論の基礎知識を前提に，計算可能解析学へのつなぎとして，実数の計算可能性を解説する．構成は以下の通りである．第 2 節では計算可能実数の定義を与え，実数の公理との関係を見る．第 3 節では計算可能実数が実閉体をなすこと，計算可能に数え上げることができないことを述べる．第 4 節では極限計算可能実数および弱計算可能実数を導入し，それらの分離を行う．

2 計算可能実数

本節では，計算可能実数の定義とその基本的性質を説明する．計算可能実数は，解析学の基礎を計算論的観点から見直すのに重要な概念である．

微積分学の具体的な計算においては， 有理数， e, π などから四則演算や累乗を適当に組み合わせた数しか出てこないことが多い．一方，解析学として実数論を構築するときは，連続の公理などを使って抽象的な数を考察する必要がある．通常の議論で具体的に出てくる実数のほとんどは計算可能実数であり，様々な定

*1 〒 214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1　E-mail: `research@kenshi.miyabe.name`

1) 本原稿は数学基礎論サマースクール 2023 の筆者の講義スライドを元に再構成したものである．

理を証明する上でも計算可能実数があれば十分なことが多い．もちろん十分でないこともある．計算可能実数を定義し，具体的にどの定理の証明において計算不可能な実数が必要になるのかを見ていく．

注意として，日常用語では「$2+3$ は計算できる」などの表現をすることがある．計算論においては「計算できる」(computable) と表現するのは基本的に何らかの関数である．

2.1 可算集合の表現

$\{0,1\}^*$ で 2 進有限列の集合を表す．Turing 機械は何らかのアルゴリズムを計算する計算装置の数理モデルである．ここでは，入力に対して出力を返す関数とみて，

$$\Phi :\subseteq \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$

と書く．出力が存在しないときには，定義されないと考える．部分関数であることを強調して $:\subseteq$ を使っている．対応する Turing 機械が存在するとき，その関数は**計算可能** (computable) であるという．素朴には，何らかのプログラミング言語で書ける関数と思って良い．

何らかの集合 X に $\{0,1\}^*$ を対応させることにより，X 上の計算可能性を定義できる．X の計算可能性がこの対応にも依存することになるが，自然で単純なものであれば同じ計算可能性を導くことになる．

例 1
2 進有限列 $\{0,1\}^*$ と自然数 ω の全単射，ϵ は空列：

2 進有限列	ϵ	0	1	00	01	10	11	000	$\cdots$
自然数	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$

定義 1
自然数の列 $(a_n)_{n\in\omega}$ が計算可能であるとは，ω から ω への関数

$$n \mapsto a_n$$

が計算可能であることをいう．

定義 2
自然数の集合 $A \subset \omega$ が計算可能であるとは，ある *Turing* 機械 $\Phi :\subseteq \omega \to \{0,1\}$ が存在して，

$$\Phi(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

が成り立つことをいう．

カントールの対関数 (paring function)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y$$

により,「自然数の組」も自然数で表現できる．3 個以上の自然数の組も $\langle x,y,z\rangle = \langle\langle x,y\rangle, z\rangle$ などとすることで，表現できる．

有理数は

$$q = \pm\frac{n}{m}$$

として，符号と自然数 2 つで表現できる．有理数と自然数の全単射を与えることもできるが，余分な計算を避けて，自然数の組から有理数への全射 (surjective) により表現していると思うことにする．

これらの表現により，有理数の数列の計算可能，有理数の集合の計算可能などの概念が自然に定まる．つまり，対象の表現を与えることで，自然数上の計算可能性から，様々な数学的対象の計算可能性が導かれる．

2.2　実数の 2 進表現

自然数や有理数は有限の情報で表されるのに対し，実数を表現するには無限の情報が必要である．0 と 1 の 2 進無限列 $p \in 2^\omega$ に対し，

$$\rho_{bin}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)2^{-n-1} \in [0,1]$$

により対応する実数を表現する．この ρ_{bin} を 2 **進表現** (binary representation) と呼び，p を ρ_{bin} によるその実数の**名前** (name) という．整数部分を加えることで，任意の実数を表現できる．

定義 3 (Turing [11])
ρ_{bin} による計算可能な名前を持つ実数を計算可能実数 *(computable real)* と呼ぶ．

自然数や有理数が有限列で名前を持っていると思うときには計算可能という言い方はしない．しかし実数の ρ_{bin} による名前は 2 進無限列であり，関数とみなすことができ，計算可能かどうかを議論できる．

例 2
有理数は実数として ρ_{bin} による計算可能な名前を持ち，計算可能実数である．e，π の 2 進表現を計算できるので，どちらも計算可能実数．

計算可能実数であるためには，ρ_{bin} による計算可能な名前が 1 つあれば良い．2 進有理数 (dyadic rational) とは $\pm k \cdot 2^{-n}$, $(k, n \in \mathbb{N})$ の形で表される有理数のことである．2 進有理数には ρ_{bin} による名前が可算無限あるが，すべての名前が計算可能である．

2.3　符号付き桁数表現

実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，入力 x の実数としての名前を，出力 x の実数としての名前に，計算可能に変換できることを意味する．神託つき Turing 機械 Φ で入力が自然数 $n \in \omega$，出力が $\{0,1\}$ であるとする．このとき，神託を入力とし，$2^\omega = \{0,1\}^\omega$ の元を出力とする Turing 還元 (Turing functional)$\Phi :\subseteq 2^\omega \to 2^\omega$ と思うことができる．

少なくとも，$f(x) = 3x$ は計算可能であってほしい．しかし，表現 ρ_{bin} に対して，$f(x) = 3x$ は計算可能ではない．$f(1/6) = 1/2$ である．$\frac{1}{6}$ の 2 進無限展開は $0.00101010101\cdots$ である．入力の有限桁を見ても，出力が 1/2 より大きいか小さいか分からない．つまり，出力の表現の最初の桁が 0 なのか 1 なのか分からない．

$\bar{1}$ で -1 を表すとする．$p \in \{0,1,\bar{1}\}^\omega$ に対して，

$$\rho_{sd}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)2^{-n-1} \in [-1,1]$$

により実数を表現する．これを**符号付き桁数表示** (signed-digit representation) と呼ぶ．適当に整数部分を加えることにより，実数全体を表現することができる．

例えば，$\frac{1}{6}$ の符号付き桁数表示による名前はいくつかありうるが，最初の 001 となっている部分を $01\bar{1}$ に置き換えても同じ値 $\frac{1}{6}$ を表す．

$$1 \cdot 2^{-3} = 1 \cdot 2^{-2} + (-1) \cdot 2^{-3}$$

であるからである．

実数が計算可能な ρ_{bin} 表現を持つことと，計算可能な ρ_{sd} 表現を持つことは同値である．よって，ρ_{bin} による計算可能な実数と，ρ_{sd} による計算可能な実数は同じである．しかし，名前を変換する一様性の観点から，符号付き桁数表示の方が優れている．

定理 4
$f(x,y)=x+y$ は ρ_{sd} に対し計算可能な関数である．

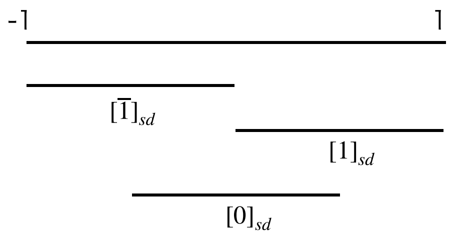

図 1: 柱状集合

証明　柱状集合 (cylinder set) を

$$[\sigma]_{sd}=\{\rho_{sd}(p)\ :\ \sigma\prec p\in\{0,1,\bar{1}\}^{\omega}\}$$

で定義する．$p\in\{0,1,\bar{1}\}^{\omega}$ に対し，$p\restriction n$ を固定すると，$\rho_{sd}(p)$ が取りうる範囲は長さ 2^{-n+1} の閉区間になる．逆に長さ 2^{-n} 以下の閉区間 I に対して，$I\subseteq[\sigma]_{sd}$ となる長さ n の σ が存在する．ρ_{bin} ではこれが成り立たない．

$x,y\in\mathbb{R}$ の ρ_{sd} 表現 $X,Y\in\{0,1,\bar{1}\}^{\omega}$ が任意に与えられたときに，$x+y$ の ρ_{sd} 表現 Z を計算するアルゴリズムを与える．$Z\restriction n$ が定まっているとして，その延長である $Z\restriction(n+1)$ を帰納的に定める．$m=n+3$ として，

$$I=[X\restriction m]_{sd}+[Y\restriction m]_{sd}$$

とおくと，I は長さ $2^{-m+2}=2^{-n-1}$ の閉区間．帰納法の仮定で $I\subseteq[Z\restriction n]_{sd}$ として良い．上で述べた事実から $I\subseteq[Z\restriction(n+1)]_{sd}$ と延長することができる．すべての $n\in\omega$ に対し，

$$x+y\in I\subseteq[Z\restriction n]_{sd}$$

であるから，Z は $x+y$ の ρ_{sd} 表現である．∎

同様に $x\times y$ および $1/x$ も ρ_{sd} に関して計算可能であることを示すことができる．このことから，以下が分かる．

定理 5
計算可能実数は通常の四則演算に関して体を成す．

この定理は，計算可能実数が数学的にも自然な構造を持つことを意味する．実際，解析学の多くの部分が計算可能実数に限定できる．

2.4　コーシー列による表現

実数列 $(a_n)_n$ が**コーシー列**であるとは，

$$(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\omega)(\forall n,m\geq N)|a_n-a_m|<\epsilon$$

であることをいう．コーシー列を「同じ値に収束する」関係からなる同値類で割った商体として実数を定義することができる．ならばコーシー列を実数の表現として使ってはどうだろう．

有理数の列 $(a_n)_n$ で,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n-1} \text{ for all } n \in \omega$$

を満たすものに対し,

$$\rho_c((a_n)_n) = \lim_n a_n$$

で定義される表現 ρ_c を *(***速い***)* **コーシー表現** ((fast) Cauchy representation) と呼ぶ.

通常のコーシー表現では，最初の n 項が分かっても，収束先の実数について何の情報も得られない．上で定義したコーシー表現では,

$$|a_n - \rho_c((a_n)_n)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < 2^{-n}$$

なので，a_n が収束先の 2^{-n} 近似になっている．符号付き桁数表現と同値になるようにするためには，この制限が必要である．符号付き桁数表示の方が圧縮された形で表現している．コーシー表現は冗長な表現だが，証明には便利なことが多い.

定理 6
ρ_{sd} と ρ_c は計算同値 *(computably equivalent)*．すなわち一方の表現からもう一方の表現を一様に計算できる.

どちらの表現を使っても同じ計算可能性が導かれる．ρ_{bin} や通常のコーシー表現は同値にならない.

ρ_{sd} 表現から ρ_c 表現を作る方だけ示す．$x \in \mathbb{R}$ とその ρ_{sd} 表現 $p \in \{0, 1, \overline{1}\}^\omega$ に対し,

$$a_n = 0,\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} p(k) 2^{-k-1}$$

とすると，$|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n-1}$ であり，$\lim_n a_n = x$ なので，$(a_n)_n$ は x の ρ_c 表現.

もう一度，これまでの結果を整理する.「計算可能な実数」を定義するときには，どの表現を使っても良い．すなわち計算可能な名前を持つ実数の集合としては，どの表現でも同じである．計算可能な実数とは任意の精度の近似が計算できる実数のことをいう．特に，$x \in \mathbb{R}$ に関して以下は同値である.

(i) 計算可能な ρ_{bin} 表現を持つ.

(ii) 計算可能な ρ_{sd} 表現を持つ.

(iii) 計算可能な ρ_c 表現を持つ.

(iv) 計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在して，すべての n で $|a_n - x| < 2^{-n}$ となる.

ここで 2^{-n} の部分は上から単調に 0 に収束する計算可能な列なら何でも良い.

ρ_{sd} と ρ_c は，一方の表現からもう一方の表現を一様に計算でき，自然な表現であるのに対し，ρ_{bin} には一様には計算できず，自然な表現とは言えない．これらのことを踏まえて，実数の表現として ρ_{sd} や ρ_c を使う.

2.5　デデキント切断

実数の構成の 1 つがデデキント切断 (Dedekind cut) である．有理数 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A で,

- $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, (空でも全体でもない)

- $x \in A, y < x \Rightarrow y \in A$, (下に閉じている)
- $x \in A \Rightarrow \exists y \in A. x < y$. (最大限が存在しない)

となるものを実数と思う．すなわち，実数 $r \in \mathbb{R}$ と有理数の集合 $\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ を同一視する．

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ を x の**左切断** (left-cut) と呼ぶ．$\{q \in \mathbb{Q} : q > x\}$ を**右切断** (right-cut) と呼ぶ．

左切断や右切断は実数の表現としては不自然である．表現を計算可能に (連続的に) 変換するためには，有限桁を出力するのに有限情報から判定できる必要がある．もし，$x \in \mathbb{R}$ の表現として，

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$$

を採用すると，x が有理数のとき，$x \notin A$ が有限情報から判定できる必要がある．例えば，$\{q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2}\}$ と $\{q \in \mathbb{Q} : q < -\sqrt{2}\}$ の有限桁から，足して 0 より大きいか判定できる必要がある．しかしそれは不可能である．

自然数の部分集合 $A \subseteq \omega$ が，計算可能な関数 $f :\subseteq \omega \to \omega$ の値域となるとき，すなわち $A = \{f(n)\downarrow : n \in \omega\}$ となるとき，A を *c.e.* **集合** (computably enumerable set) と呼ぶ．有理数の部分集合についても自然に c.e. 集合が定義される．一般に計算可能実数 x に対して左切断 $\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ は c.e. 集合になる．なぜなら，$(a_n)_n$ を $x \in \mathbb{R}$ の計算可能なコーシー列とすると，$a_n - 2^{-n} \leq x \leq a_n + 2^{-n}$ なので，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$q < x \iff (\exists n) q < a_n - 2^{-n}$$

より，右側を満たす $q \in \mathbb{Q}$ を数え上げれば良い．

左切断 $\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ が c.e. 集合であるとき，x を**左** *c.e.* **実数** (left-c.e. real) と呼ぶ．右切断が c.e. 集合であるとき，**右** *c.e.* **実数** (right-c.e. real) と呼ぶ．例えば，$\sqrt{2}$ の左切断は $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ であり，これは c.e. 集合なので，$\sqrt{2}$ は左 c.e. 実数である．

定理 7
$x \in \mathbb{R}$ が左 *c.e.* であることと，単調増加で計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で $x = \lim_n a_n$ となるものが存在することは同値．

証明 x が左 c.e. であれば，$A = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ の有限近似列 $(A_s)_s$ が存在して，$a_s = \max A_s$ は単調非減少な計算可能な有理数列で x に収束する．$b_s = a_s - 2^{-s}$ とすれば単調増加になる．

単調増加で計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在したとすれば，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$q < x \iff (\exists n) q < a_n$$

なので，右側を満たす $q \in \mathbb{Q}$ を数え上げれば良い． ∎

定理 8
$x \in \mathbb{R}$ が計算可能であることと，x が左 *c.e.* かつ右 *c.e.* であることは同値．

証明 計算可能ならば左 c.e. かつ右 c.e. であることはすでに示した．

x が左 c.e. かつ右 c.e. であれば，単調増加な計算可能有理数列 $(a_n)_n$ と単調減少な計算可能有理数列 $(b_n)_n$ が存在し，両者とも x に収束する．

各 n に対し，$b_m - a_m < 2^{-n}$ となる m を探して，$c_n = a_m$ とおけば，

$$c_n \leq x, \quad x - c_n \leq b_m - a_m < 2^{-n}$$

より $(c_n)_n$ は計算可能な有理数列で x に速く収束する．よって，x は計算可能．∎

計算可能実数とは，左 c.e. 実数の中で，収束の速さが計算できるものである．実際，$x \in \mathbb{R}$ が計算可能であることと，計算可能で単調増加な有理数列 $(a_n)_n$ ですべての n で $x - a_n < 2^{-n}$ を満たすものが存在することは同値である．

3　計算可能実数でできること・できないこと

3.1　実閉体

本節では，計算可能実数の集合が実閉体をなすことを示す．これにより，計算可能実数上で多項式の計算や代数方程式の解法が可能になる．

整数係数の代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の根となる実数を**代数的実数** (real algebraic number) と呼ぶ．そうではない実数を**超越的実数** (real transcendental number) と呼ぶ．有理数，$\sqrt{2}$ などは代数的実数，e, π などは超越的実数である．代数的実数を係数にもつ代数方程式の実数根は代数的実数である．これを，代数的実数は代数方程式を解くという操作に関して閉じているという．このような集合を**実閉体** (real closed field) と呼ぶ．

任意の代数的実数は計算可能である．e は超越的な計算可能実数なので，計算可能実数の集合は代数的実数の集合より真に大きい集合となる．

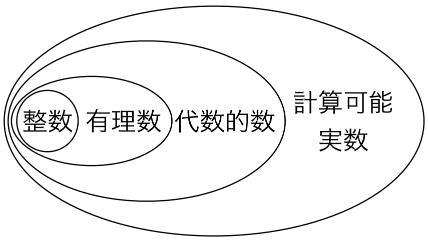

図 2: 様々な数の集合

定理 9 (Rice [8], Grzegorczyk [3])
計算可能実数の集合は実閉体を成す．

この定理は，計算可能実数の集合が代数的に豊かな構造を持つことを示している．

ゴールは「計算可能実数を係数に持つ代数方程式の実数根が計算可能実数」を示すことである．代数方程式の次数に関する帰納法で示す．計算可能実数の根が 1 つあることを示せば，因数定理から，

$$f(x) = (x - \alpha) g(x)$$

と因数分解できて，$g(x)$ は $f(x)$ より次数の低い代数方程式なので，帰納法よりすべての実数根は計算可能実数であることが示せる．もし重根なら，

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x),\ (m \geq 2),\quad f'(x) = (x - \alpha)^{m-1} h(x)$$

とかけ，$f'(x)$ は $f(x)$ より次数の低い代数方程式なので，α は計算可能実数と分かる．$f(x)$ の単根が計算可能実数であることを示せば良い．これは代数方程式に対する中間値の定理を示すことにほかならない．

定理 10 (中間値の定理)
実数上の閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値連続関数 f が $f(a)<0<f(b)$ を満たすなら，$f(c)=0$, $a<c<b$ を満たす実数 c が存在する．

計算の観点からこの証明を眺めたいので，簡単に振り返っておく．$a_0=a$, $b_0=b$, $c_0=(a_0+b_0)/2$ とする．各 $n\in\omega$ に対し，

- $f(c_n)=0$ ならば c_n が求める解.
- $f(c_n)<0$ ならば $a_{n+1}=c_n$, $b_{n+1}=b_n$, $c_{n+1}=(a_{n+1}+b_{n+1})/2$ とする．
- $f(c_n)>0$ ならば $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=c_n$, $c_{n+1}=(a_{n+1}+b_{n+1})/2$ とする．

この操作が無限に続くとする．$a_n<c_n<b_n$ で，$b_n-a_n\to 0$ から，$c=\lim_n a_n=\lim_n b_n=\lim_n c_n$ が存在する．$f(a_n)<0$ と f の連続性から $f(c)=\lim_n f(a_n)\leq 0$ 同様に $f(b_n)>0$ なので $f(c)\geq 0$ よって，$f(c)=0$.

定理 11 (計算可能版中間値の定理)
実数上の閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値計算可能関数 f が $f(a)<0<f(b)$ を満たすなら，$f(c)=0$, $a<c<b$ を満たす計算可能実数 c が存在する．

計算可能関数ならば連続なので，仮定と結論ともに計算可能性が加わった定理になっている．
証明　f は連続なので，a,b をわずかに内側の有理数としてとることができる．$(a_n),(b_n),(c_n)$ を先程と同様に定義する．f が計算可能関数なので，$f(c_n)$ は計算可能実数.
しかし，$f(c_n)=0,>0,<0$ の判定は計算可能にはできない．$A\subseteq\omega$ が c.e. 集合であれば，$n\in A$ であればそのことが有限時間で分かるが，$n\notin A$ であったときにはそのことは有限時間では判定できない．計算可能実数 x とその近似コーシー列 $(a_n)_n$ に対し，

$$x>0 \iff (\exists n)a_n-2^{-n}>0$$

なので，正しければ有限時間で判定できるが，正しくない場合には有限時間で判定できない．このような場合，関係 $x>0$ は**半決定可能** (semi-decidable) とか *c.e.* **関係**などと呼ぶ.
$f(c_n)=0$ かどうかは判定できないが，もし $f(c_n)=0$ なら有理数解 c_n が存在するので，主張が成り立つ．もし $f(c_n)\neq 0$ ならば，$f(c_n)>0$ および $f(c_n)<0$ はどちらも半決定可能なので，有限時間で判定可能．b_n-a_n が小さくなることから，$c=\lim_n c_n\in[a_n,b_n]$ は計算可能実数. ∎
ここで重要なのは，解 c の存在は示せるが，f から c を一様に計算する方法は一般には存在しないという点である．このような非一様性は，計算論における特徴の一つである．

3.2　左 c.e. 実数

ここでは，計算可能実数より大きな実数の族である，左 c.e. 実数を導入し，連続性の公理との関連を見る．実数の連続性の公理として同値なものがいくつか知られている．

(i) Dedekind の切断

(ii) Wierstrass の公理 (空でない有界な集合は上限を持つ)

(iii) 有界な単調増加数列の収束

(iv) Cauchy 列の収束+アルキメデスの原理

(v) 区間縮小法+アルキメデスの原理

(vi) Bolzano–Weierstrass の定理 (有界数列は収束する部分列を持つ)

それぞれの計算可能性を見ていこう.

定理 12
$A \subseteq \omega$ が計算可能 $\iff \alpha = \sum_{n \in A} 2^{-n-1}$ が計算可能実数.

停止問題 (halting problem) などの計算可能でない c.e. 集合が存在するので,

系 13 (Specker sequence)
計算可能で有界・単調増加な有理数列で，その極限が計算可能でないものが存在する．つまり，左 *c.e.* 実数で計算可能実数でないものが存在する．

すなわち，有界な単調増加数列の収束は計算可能には成り立たない．このように，古典的な解析学の定理が計算可能な設定では成り立たない例が知られている．

証明 $(\Rightarrow)$ $a_s = \sum_{n \in A \upharpoonright s} 2^{-n-1}$ は極限に収束するコーシー列.

$(\Leftarrow)$ 極限 α が dyadic rational であれば，A の候補はすべて計算可能．そうでなければ，任意の $s \in \omega$ に対して α の十分良い近似を計算することで，$A \upharpoonright s$ を計算することができる．すなわち，A は計算可能．例えば，$0.10000010000 \cdots$ なら後の 1 が出てくるところまで下から近似できれば $0.100000 \cdots$ が確定する．∎

例 3
計算可能な集合 $A \subset \mathbb{Q}$ で *(1)* $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, *(2)* $x \in A, y < x \Rightarrow y \in A$, *(3)* $x \in A \Rightarrow \exists y \in A. x < y$. となるものに対し，$\sup A$ は計算可能実数となる．

1,2 番目の条件から A は有界．有理数を $q_1, q_2, \cdots$ と計算可能に並べる．その順番で A に含まれるものだけを $r_1, r_2, \cdots$ と並べる．$a_n = \sup_{i \leq n} r_i$ は計算可能で単調増加な有理数列で，$\sup A = \lim_n a_n$ は左 c.e. 実数．同様にして，$\inf A^c$ は右 c.e. 実数．$\sup A = \inf A^c$ より，これは計算可能実数.

計算可能な Dedekind の切断は計算可能実数を定めるが，表現としては自然なものではない.

例 4
空でない有界な計算可能な有理数の集合 A の上限 $\sup A$ は左 *c.e.* 実数だが，計算可能とは限らない.

前に見たように $\sup A$ は左 c.e. 実数.

計算可能でない左 c.e. 実数 x が存在することはすでに見た．x に収束する計算可能で単調増加な有理数列を $(a_n)_n$ とする．すべての n で $a_{n-1} < b_n < a_n$ で，各 b_n は dyadic rational で $b_n = \pm m \cdot 2^{-k}$, m は奇数, $k \in \omega$, と書いたときに $n \leq k$ となるようにする．$A = \{b_n \ : \ n \in \omega\}$ とすると，A は空でない有界な有理数の集合で，$x = \sup A$ は計算可能でない.

A が計算可能であることを示す．$q \in \mathbb{Q}$ に対して，q が dyadic rational でなければ，$q \notin A$. $q = \pm m \cdot 2^{-k}$, m は奇数，$k \in \omega$ であれば，$\{b_1, \cdots, b_k\}$ までを探して q が含まれていれば $q \in A$，含まれていなければ $q \notin A$ とする.

すなわち，Wierstrass の公理は計算可能には成り立たない.

例 5
計算可能な有理数列で通常の意味で *Cauchy* 列だが，収束先は計算可能実数でないものが存在する.

Specker sequence は通常の意味で Cauchy 列で収束先は計算可能実数でない．

例 6
計算可能な有理数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ で，

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

かつ $b_n - a_n \to 0$ となるものに対して，$\lim_n a_n = \lim_n b_n$ は計算可能実数.

$\sup_n a_n$ は左 c.e.，$\inf_n b_n$ は右 c.e. $b_n - a_n \to 0$ より $\sup_n a_n = \inf_n b_n$ なので，これは計算可能実数．すなわち，計算可能な区間縮小法から定まる実数は計算可能である．

例 7
有界な計算可能有理数列で計算可能な密集点 *(cluster point)* を持たないものが存在する．

Specker sequence はそのような例である．すなわち，Bolzano-Weierstrass の定理は計算可能には成り立たない．

3.3 数え上げ

次に，計算可能実数の集合を計算可能には数え上げることができないことを見る．
集合 A が**可算** (countable) であるとは,

$$A = \{a_0,\ a_1,\ \cdots\}$$

のように自然数の添字を使って数え上げられる (enumerate) ことをいう．ただし有限も含む．実数の集合は**非可算** (uncountable) である．
自然数 $\mathbb{N}$，有理数 $\mathbb{Q}$，代数的実数，計算可能実数の集合はそれぞれ可算集合．よって，計算不可能な実数は存在する．
Turing 機械のプログラムは有限情報で表現されるため，自然数全体と一対一に対応付けることができる．よって，e 番目の部分計算可能関数 Φ_e という形で数え上げることができる．一方，全域計算可能関数を計算可能に数え上げることはできない．証明は対角線論法による．

定理 14
すべての左 *c.e.* 実数を *(*重複を許して*)* 計算可能に数え上げることができる．

証明　「すべての部分計算可能関数の計算可能な数え上げ」を固定する

$$\Phi_e :\subseteq \omega \to \mathbb{Q}, \quad \alpha_e = \sup_n \Phi_e(n)$$

とおくと，$(\alpha_e)_e$ はすべての左 c.e. 実数になる．
ここで，$\Phi_e(n)$ は未定義かもしれないので，並列に計算するのか，順番に計算するのか指定する必要があるが，全域な関数だけですべての左 c.e. 実数を数え上げているのでどちらでもよい．
また「すべての n で $\Phi_e(n)$ が未定義」「$\Phi_e(n)$ が非有界」の場合も含まれている．これを避けたければ,

$$\Phi_e(n) :\subseteq \omega \to \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad \alpha_e = \sup_n \{\Phi_e(n)\ :\ n \in \omega\} \cup \{0\}$$

として $[0,1]$ 内にある左 c.e. 実数を数え上げてから，その数え上げに整数部分を足せば良い． ∎

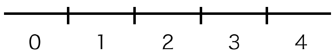

図 3: 5 進法

定理 15
すべての計算可能実数の計算可能な数え上げは存在しない．

この事実は計算可能解析学の発展的な話題でも繰り返し現れる重要な事実である．

証明　「すべての計算可能実数の計算可能な数え上げ」が存在したとすれば,「すべての全域計算可能関数の数え上げ」が存在することを示す.

実数は $[0,1]$，関数は ω から $\{0,1\}$ とする．全域計算可能関数 $f:\omega \to \{0,1\}$ に対して，

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)5^{-n-1},\ g(n) = \begin{cases} 1 & (\text{ if } f(n)=0) \\ 3 & (\text{ if } f(n)=1) \end{cases}$$

という実数を対応させる．

逆に計算可能実数 $r \in [0,1]$ に対して，r を含む 5^{-n} 未満の区間を計算し，$1,3$ の区間に共通部分があるかどうかみることで，もとの関数 f を復元できる．もし，$1,3$ のどちらにも共通部分がなければ，$f(n)$ は適当に定めれば良い．

「すべての計算可能実数の計算可能な数え上げ」が存在したとして，上の方法で「全域計算可能関数の数え上げ」を作成する．すると，任意の全域計算可能関数 f に対して上で定めた実数 r から f が復元されるので，すべての全域計算可能関数が現れる． ∎

直接対角線論法を使って構成することもできる．

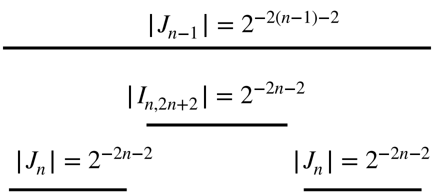

図 4: I, J の構成

証明　計算可能実数の計算可能な数え上げ (α_e) があったとする．すなわち，$(e,n) \mapsto I_{e,n}$, $I_{e,n}$ は α_e を含む長さ 2^{-n} の区間で端点が有理数のもの，が計算可能であるとする．

この数え上げ $(\alpha_e)_e$ に含まれない計算可能実数 x を作る．長さ 2^{-2n} の閉区間 J_n で，$J_n \supset J_{n+1}$ となるものを計算可能に作って，$x = \bigcap_n J_n$ とする．各 $n \in \omega$ について，

$$\alpha_n \in I_{n,2n+2},\ x \in J_n,\ I_{n,2n+2} \cap J_n = \emptyset$$

なので，$\alpha_n \neq x$. すなわち，x は数え上げ $(\alpha_e)_e$ に含まれない計算可能実数.

よって，すべての計算可能実数を計算可能に数え上げることはできない． ∎

4 極限計算可能実数と弱計算可能実数

4.1 極限計算可能実数

計算可能実数全体は実閉体をなすが，計算可能な数列に制限しても極限をとる操作について閉じていない．極限計算可能実数はそのように書ける数である．

定義 16
実数 $x \in \mathbb{R}$ が極限計算可能 *(limit computable)* もしくは計算近似可能 *(computably approximable)* とは，計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ の極限となること．

数列 $(a_n)_n$ は単調増加である必要はない．収束の速度は極めて遅いかもしれない．

自然数の集合に対する極限補題 (limit lemma) はよく知られているが，以下は実数に対する極限補題である．$A \subseteq \omega$ に対し，A' で A のジャンプ，つまり神託として A を使ったときの停止問題を表す．

補題 17
実数 $x \in \mathbb{R}$ が極限計算可能であることと，x のある名前が $\emptyset'$ から計算可能であることは同値．

特に 2 進無限展開が $\emptyset'$ から計算可能なので，$x \in \Delta^0_2$ とも書く．

証明 実数 $x \in \mathbb{R}$ が極限計算可能とする．$(a_n)_n$ を x に収束する計算可能な有理数列とする．各 $n \in \omega$ に対し，以下を満たす $N \in \omega$ が存在する：

$$(\forall k, m \geq N)|a_k - a_m| < 2^{-n}.$$

$\emptyset'$ でこれは判定可能だから，各 n から $N = N(n)$ が計算できる．$a_{N(n)}$ は x の 2^{-n} 近似の有理数であり，$(a_{N(n)})_n$ は x のコーシー表現で，$\emptyset'$ から計算可能．

x のコーシー表現 $(a_n)_n$ が $\emptyset'$ から計算可能であるとする．すなわち，神託つき計算可能関数 Φ で，$\Phi^{\emptyset'}(n) = a_n \in \mathbb{Q}$ となるものが存在する．計算可能な近似列 $J_s \to \emptyset'$ に対し，

$$a_{n,s} = \Phi^{J_s}(n)$$

とおくと，n に依存する十分大きな s について $a_{n,s} = a_n$．$|a_{n,s} - a_{n-1,s}| < 2^{-n}$ のとき stage s で $a_{n,s}$ は a_n の**候補**と呼ぶ．$a_{0,s}$ は常に a_0 の候補である．計算可能な有理数列で x に収束する列 $(b_m)_m$ を以下のように作る．a_n の候補を n の小さい順に順番に $(b_m)_m$ に入れていく．ただし，a_k の候補が変化したら，k に戻って順番に入れていく．N_s を stage $s-1$ まででどこまでを候補として $(b_m)_m$ にいれたか．m_s を $(b_m)_m$ に候補として入れた個数を表す変数として準備する．

Construction

$N_0 = -1, m_0 = 0$ とする．$s \in \omega$ に対し

$$k \leq m_s, a_{k,s} \neq a_{k,s-1}$$

となる最小の k を探す．もし存在すればその k に対し，

$$b_{n_s+1} = a_{k,s},\ N_{s+1} = k,\ m_{s+1} = m_s + 1.$$

そのような k が存在しないとする．$a_{N_s+1,s}$ が候補であれば $b_{n_s+1} = a_{m_s+1,s}, N_{s+1} = N_s+1, m_{s+1} = m_s+1$．$a_{N_s+1,s}$ が候補でなければ $N_{s+1} = N_s$, $m_{s+1} = m_s$.

Verification

すべての n について $a_{n,s} = a_n$ が $(b_m)_m$ に入れられる．帰納的に $a_k, k < n$ がすべて $(b_m)_m$ に入れられるとして仮定する．a_{n-1} が入れられたあと，$a_{n,s} = a_n$ となる最小の s で，$a_{n,s}$ は候補となり，$(b_m)_m$ に入れられる．その後入れられるのは候補のみなので，$(b_m)_m$ は通常の意味でコーシー列となる． ∎

定理 18
極限計算可能実数の集合は実閉体を成す.

計算可能実数は実閉体を成すので，それを $\emptyset'$ に相対化すれば良い.

4.2 弱計算可能実数

ここでは弱計算可能実数を紹介する．左 c.e. を含む最小の実閉体で，極限計算可能実数の真の部分集合となる.

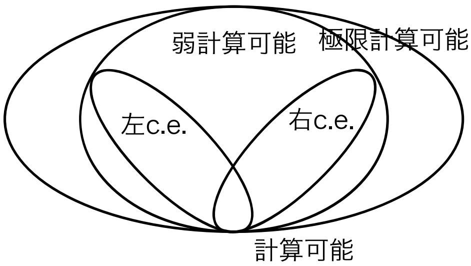

図 5: 計算可能実数の変種

定義 19 (Ambos-Spies, Weihrauch, and Zheng [1])
実数 $x \in \mathbb{R}$ が弱計算可能 *(weakly computable)* とは，計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で,

$$\sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty,\ \lim_n a_n = x$$

となるものが存在することをいう.

定理 20 (Ambos-Spies, Weihrauch, and Zheng [1])
$x \in \mathbb{R}$ が弱計算可能実数であることと，ある 2 つの左 c.e. 実数 y, z があって，$x = y - z$ とかけることと同値.

証明 x が弱計算可能実数で，$(a_n)_n$ によって近似されているとする．$A = \{n \geq 1\ :\ a_n \geq a_{n-1}\}$ とおいて,

$$y = a_0 + \sum_{n \in A}(a_n - a_{n-1}),\ z = -\sum_{n \in A^c \setminus \{0\}}(a_n - a_{n-1})$$

とすると，y, z は左 c.e. 実数で，$x = y - z$.

左 c.e. 実数 y, z に対して $x = y - z$ とかけたとする．y, z に収束する計算可能で単調増加な有理数列 $(b_n)_n, (c_n)_n$ に対し,

$$a_{2n} = b_n - c_n,\ a_{2n+1} = b_{n+1} - c_n$$

とおくと，$(a_n)_n$ は計算可能な有理数列で,

$$|a_{2n+1} - a_{2n}| = b_{n+1} - b_n,\ |a_{2n+2} - a_{2n+1}| = c_{n+1} - c_n$$

であり,

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n - \lim_n c_n = y - z = x.$$

∎

階層の分離を行う.

定理 21
弱計算可能実数で左 *c.e.* でも右 *c.e.* でもないものが存在する．

証明に以下の事実を使う．

定理 22 (Friedberg-Muchnik theorem, 1957, 1956)
Turing 還元で比較不可能な *c.e.* 集合 $B, C \subseteq \omega$ が存在する．

証明 $X \subseteq \omega$ に対し，それに対応する 2 進無限列を考え，それを 2 進無限展開に持つ実数 χ_X を考える

$$\chi_X = \sum_{n \in X} 2^{-n-1}.$$

また，2 つの無限列を交互に並べた列を以下で定義する．

$$X \oplus Y = \{2n \ : \ n \in X\} \cup \{2n+1 \ : \ n \in Y\}$$

比較不可能な c.e. 集合 B, C に対し，$\chi_{B \oplus C^c}$ は，弱計算可能だが，左 c.e. でも右 c.e. でもないことを示す．$\chi_{B \oplus C^c}$ が左 c.e. と仮定して，$C \leq_T B$ であることを示す．B と $C(0) \cdots C(n-1)$ が分かっているとして，$C(n)$ を計算する．C は c.e. なので，$C(n) = 1$ は半決定可能．$C(n) = 0$ ならば，$\chi_{B \oplus C^c}$ が左 c.e. であることから，

$$\chi_{B \oplus C^c} > \sum_{k \in B \oplus C^c \upharpoonright (2n+1)} 2^{-k-1} + 2^{-(2n+1)-1}.$$

∎

定理 23
極限計算可能実数で弱計算可能実数でないものが存在する．

証明 各弱計算可能実数 x に対して，ある計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k-1}| \leq 1$$

となるものが存在する．各 $d \in \omega$ に対して，適当な n で，

$$I_d = (a_n - 2^{-d-1}, \ a_n + 2^{-d-1})$$

という区間を考える．$m > n$ に対して $a_m \notin I$ となったら，I をその m に対して再定義する．この再定義される回数は高々2^{d+1} 回である．a_n が定義されていない場合もあるが，その場合は a_n が定義されている範囲で I を更新する．

e 番目の部分計算可能な有理数列を $(a_n^e)_n$ とする．a_n^e が未定義ならば，$m \geq n$ に対して a_m^e は未定義であるとする．また a_n^e が定義されるためには，

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^e - a_{k-1}^e| \leq 1$$

であるという条件を加える．正しい列ではこの条件が成り立っているからである．このように修正した各 $(a_n^e)_n$ に対し，以前のように区間 $I_{e,d}$ を定義する．

「すべての計算可能実数の計算可能な並びあげは存在しない」ことの証明と同様の方法で，新しい実数 x を構成する．今回の場合，$I_{e,d}$ が更新されるので，J_d も更新される．各 $I_{e,d}$ の更新は有限回なので，J_d の更新も有限回．J_d が更新されたときに，その中点を候補として x の近似列を作ることで，x が極限計算可能実数であることが分かる． ∎

弱計算可能実数は以下のような望ましい性質を持つ．

定理 24 (Miller [5])
計算可能関数 f が弱計算可能実数 x の近傍で *Lipschitz* であるとする．このとき，$f(x)$ は弱計算可能.

例えば x で微分可能であれば十分.

証明 弱計算可能実数 x の近似列 $(a_n)_n$ に対して，$(f(a_n))_n$ は一様に計算可能な実数列で,

$$|f(a_{n+1}) - f(a_n)| < L|a_{n+1} - a_n|,$$
$$\sum_n |f(a_{n+1}) - f(a_n)| < L \sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

$(f(a_n))_n$ を修正して有理数にすれば，$f(x)$ が弱計算可能実数であると分かる． ∎

McNicholl [4] は，陰関数定理が計算可能であることを示している．微分可能な関数で定まる孤立解を取る操作についても，弱計算可能実数は閉じていることが分かる．これらのことを使うと，弱計算可能実数の集合が実閉体を成すことが示せる.

定理 25 (Raichev [7], Ng [6])
弱計算可能実数の集合は実閉体を成す.

「計算可能実数の集合が実閉体を成す」ことの証明と流れは同じだが，係数の変化量と根の変化量の関係を調べる必要があり，もう一手間かかる.

謝　辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K03340, JP22K03408, の助成を受けたものである.

参 考 文 献

[1] K. Ambos-Spies, K. Weihrauch, and X. Zheng. Weakly computable real numbers. *Journal of Complexity*, Vol. 16, pp. 679–690, 2000.

[2] V. Brattka, P. Hertling, and K. Weihrauch. A Tutorial on Computable Analysis. In S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, and Andrea Sorbi, editors, *New Computational Paradigms*, pp. 425–491. Springer, 2008.

[3] Andrzej Grzegorczyk. Computable functionals. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 42, No. 1, pp. 168–202, 1955.

[4] Timothy H. McNiholl. A uniformly computable Implicit Function Theorem. *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 54, No. 3, pp. 272–279, 2008.

[5] Joseph S. Miller. On Work of Barmpalias and Lewis-Pye: A Derivation on the D.C.E. Reals. In Adam R. Day, Michael R. Fellows, Noam Greenberg, Bakhadyr Khoussainov, Alexander G. Melnikov, and Frances A. Rosamond, editors, *Computability and Complexity - Essays Dedicated to Rodney G. Downey on the Occasion of His 60th Birthdayedicated to Rodney G. Downey on the Occasion of His 60th Birthday*, Vol. 10010 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 644–659. Springer, 2017.

[6] Keng Meng Ng. Some Properties of D.c.e. Reals and Their Degrees. Master's thesis, National University of Singapore, 2005.

[7] A. Raichev. Relative randomness and real closed fields. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 70, No. 1, pp. 319–330, 2005.

[8] H Gordon Rice. Recursive real numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 5, No. 5, pp. 784–791, 1954.

[9] Michael Sipser. 計算理論の基礎 [原著第 3 版] 2. 計算可能性の理論. 共立出版, 2023.

[10] Robert I. Soare. *Turing Computability*. Theory and Applications of Computability. Springer, 2016.

[11] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 420, pp. 230–265, 1936.

[12] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis: an introduction*. Springer, Berlin, 2000.