超算術的解析に属する選択公理の変種と ω モデル反映による超算術的解析の近似

橋本 航気
Graduate School of Infomatics,
Nagoya University

概要

本稿は超算術的解析に関する二種類の結果から構成される．一つ目は，ACA_0^+ を含意し Σ^1_1 帰納法公理を含意しないような従属選択公理の新たな変種 unique Π^1_0(resp.Σ^1_1)-DC_0 と finite Π^1_0(resp.Σ^1_1)-DC_0 に関する結果である．これらの理論が超算術的解析に属することを示し，既存の超算術的解析の理論との含意関係を調べた．もう一つは，ω モデル反映公理を用いて定義できる理論のクラス $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ が超算術的解析をある程度近似していることを示し，これと超算術的解析との類似性について調べた結果である．

1 Introduction

Harvey Friedman が 1970 年中頃に創始し，Stephen Simpson が 1980 年代にかけて発展させた逆数学とよばれる研究プログラムは，数学の定理をその証明で要請される集合存在公理の強さによって分類し，代数や解析といった分野の垣根を越えた定理の強さの尺度を定立した．実際に，古典的な数学の定理の大部分は二階算術 Z_2 の部分体系である RCA_0 から証明可能であるか，さもなくば RCA_0 上で $\mathsf{WKL}_0, \mathsf{ACA}_0, \mathsf{ATR}_0, \Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0$ のいずれかと同値であることが示されている．この五つの理論は big five と呼ばれるようになり，現在までに最もよく研究されている二階算術の部分体系といって差し支えないだろう．

1980 年代を中心とする逆数学研究の成長期には数多くの定理が big five のいずれかの公理と同値であることが証明されたが，一方で big five のいずれとも同値にならない定理も数多く発見され，次第にそのような理論も注目されるようになった．本稿で焦点を当てる超算術的解析（hyperarithmetic analysis）は，そのような big five に属さない理論群の一種である．

定義 (超算術的解析, [Mon06] Definition 1.1.)**.** 以下両方を満たす L_2 理論 T を超算術的解析（hyperarithmetic analysis）であるという[*1]．

- 各 $X \subseteq \omega$ に対し，X 上超算術的な集合全体からなる ω モデル $\mathrm{HYP}(X)$ が T を充足する．
- T の ω モデルは計算論的和と超算術的還元に閉じる．

1970 年代を中心とする逆数学の最初期頃の研究では，点列の収束に関する定理（SL）やボルツァノ–ワイエルシュトラスの定理の変種（ABW）といった実解析の定理で超算術的解析に属するものが見つかっていた [Fri75]．しかしこれらは実解析の定理ではあるのだが，その定式化において算術的論理式への言及があり，ロジック風味の無い純粋な数学の定理と見なせるものではなかった．1980 年代に入り逆数学研究が活発になってもその二つ以外で超算術的解析に属する数学の定理は見つからず，逆数学の波に乗れなかった超算術的解析の研究はしばらく停滞していたと言えるだろう．

[*1] この 2 条件は各 $X \subseteq \omega$ について $\mathrm{HYP}(X)$ が X を含む $T + \mathsf{RCA}_0$ の最小の ω モデルであることと同値である．

この状況を大きく変えるきっかけとなった出来事としては，2006 年，Montalbán が INDEC とよぶ，超算術的解析に属する純粋な数学的定理を発見したことが挙げられるだろう [Mon06]．また，彼は同論文で INDEC 以外にも 5 つの超算術的解析の理論を導入しただけでなく，Steel が開発した tagged tree forcing [Ste78] と呼ばれる ω モデルの構成手法をサルベージし，さらに二階算術の理論の分離に応用しやすくアレンジを施した上でその新しく導入したいくつかの理論の分離を行った．それ以来，超算術的解析の理論を tagged tree forcing によって分離する研究が盛んに行われるようになった．例えば最近の結果としては，Jun Le Goh による有限選択公理の変種（finite Π^1_0-AC_0[*2]）と Δ^1_1-CA_0 の比較不能性証明が挙げられる [Goh23]．また tagged tree forcing の手法を用いる研究以外にも，同じく 2020 年代には超算術的解析に属するグラフ理論の定理（Halin の定理）を発見したという論文が出版されている [BGS23]．これらのことから，若干の遅れは取りつつも超算術的解析の研究は逆数学研究の一角をなすに至ったといえるだろう．

本稿で報告する超算術的解析に関する結果は二種類に分けられる．

一つ目は新たな強さを持つ超算術的解析の理論 unique Π^1_0-DC_0 とその変種を定義し，既存の超算術的解析の理論との強弱関係を調べたものである．この理論は従属選択公理（axiom of dependent choice）を二階算術で定式化し，次のように二段階の弱化を施して得られる．まず考慮する論理式のクラスを算術的論理式（Π^1_0）に制限することで Π^1_0-DC_0 が定義される．それにある種の一意性の条件を課すことで unique Π^1_0-DC_0 が得られる．unique Π^1_0-DC_0 は ACA^+_0 よりも真に強く，Σ^1_1-DC_0 より真に弱いことが簡単な議論で確かめられる．また，Σ^1_1-AC_0・Δ^1_1-CA_0 とは比較不能であるが，Σ^1_1-AC_0 に一意性の制約を付けた unique Π^1_0-AC_0 とは適切な数学的帰納法の下で同値であることを示した．この結果を足がかりに unique Π^1_0-DC_0 の変種をいくつか導入しそれらと既に知られている超算術的解析の理論との強弱関係を議論し，最終的に図 1 の結果を得た．

二つ目は，超算術的解析の理論や含意関係を個別に調べるのではなく，超算術的解析をシンタクティカルに近似する取り組みである．T を二階算術の言語で書かれた理論として，“与えられた自然数の部分集合に対し，それを含む $T+\mathsf{ACA}_0$ の ω モデルが存在する” を形式化した主張を T の ω モデル反映とよび，$\mathsf{RFN}(T)$ と表記する．そして $\mathsf{RFN}(T)$ が ATR_0 と同値である T 全体の集合を $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ と表記し，これが超算術的解析をある程度近似していることをまず確認する．具体的には，超算術的解析と $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ がインスタンスの点で類似していることと，ある種の閉包性を共有していることを示す．次に $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ と超算術的解析の関係性に関して二種類の問題を考える．それは，他にどのような類似性があるのかを問う問題と，逆にどういった差異があるのか，という問題である．本稿では前者の類似性に関する問として Σ^1_3 文のインスタンス問題を扱う．これは，超算術的解析には Σ^1_3 文のインスタンスが存在しないことが知られていることから，$\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ にはそのようなインスタンスは存在するかを問うものである．これは完全な解決には至っていないが，その部分的解決である特殊な Π^1_2 文については主張が成り立つことを示した．後者の方向性の問として，$\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ と超算術的解析の対象差にどのような理論があるか，という問が考えられる．しかしこちらは自明な理論以外は見つかっておらず本質的に未解決である．

本稿で用いる二階算術に関する基礎的な定義や記法は [Sim09] に準拠している．特に，II,VII,VIII 章を参照してほしい．

[*2] Goh の論文や他の文献では finite Σ^1_1-AC_0 と表記されている．

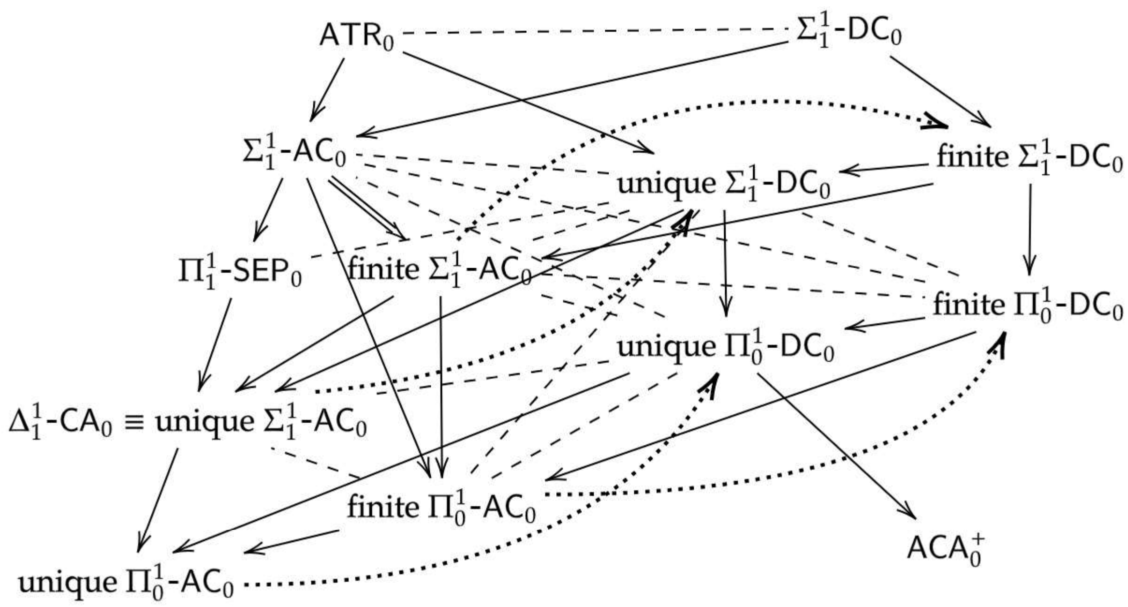

図 1　T から S へ二重矢印が伸びていることは RCA$_0$ で T から S が証明できることを意味する．一本矢印はそれに加えて逆が証明できないことを意味する．破線は比較不可能，つまり RCA$_0$ 上どちらを仮定してももう一方を証明できないことを意味する．カーブした点線矢印が T から S に伸びていることは，適切に $k \in \omega$ をとることで $T + (\Sigma^1_{k+1}$論理式に関する帰納法$)$ から S が証明できることを意味する．

2　超算術的解析に関する基礎的な概念と先行研究

1970 年代を中心とした超算術的解析の最初期頃の研究では主として上から 4 つ目までの公理（図式）が研究対象であった．一番下の JI は [Mon06] で導入された．

$$\begin{aligned}
\Sigma^1_1\text{-DC} &: \forall X \exists Y \varphi(X,Y) \to \exists Y \forall n \varphi(Y^n, Y_n) \quad \text{where } \varphi \in \Sigma^1_1 \\
\Sigma^1_1\text{-AC} &: \forall n \exists Y \varphi(n,Y) \to \exists Z \forall n \varphi(n, Z_n) \quad \text{where } \varphi \in \Sigma^1_1 \\
\Delta^1_1\text{-CA} &: \forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \to \exists \{\, n \mid \varphi(n) \,\} \quad \text{where } \varphi \in \Sigma^1_1, \psi \in \Pi^1_1 \\
\text{unique } \Pi^1_0\text{-AC} &: \forall n \exists! Y \varphi(n,Y) \to \exists Z \forall n \varphi(n, Z_n) \quad \text{where } \varphi \in \Pi^1_0 \\
\mathsf{JI} &: \forall X[\forall a \in \mathcal{O}^X((\forall b <_{\mathcal{O}^X} a \exists \mathrm{H}^X_b) \to \exists \mathrm{H}^X_a)]
\end{aligned}$$

例によって，これらに RCA$_0$ を足して得られる理論をそれぞれ下に 0 をつけて表わす．ここで AC は Axiom of Choice を，JI は Jump Iteration statement を表わす．

これらは上から下へ順に真に弱くなっていく．また上記のうち最も弱い JI$_0$ においても ACA$_0$ が含意されるため，いずれの理論も ACA$_0$ を含意する．単純に上から下の含意を示すだけなら容易であるが，真に弱いことを示すためにはいずれも ω モデルを構成する必要があり難しい[*3].

注意 2.1. unique Π^1_0-AC$_0$ はこれまで様々な文献で weak Σ^1_1-AC$_0$ と表記されてきた．しかし unique Σ^1_1-AC$_0$ は Δ^1_1-CA$_0$ と同値であることが容易に確かめられる．したがって unique Π^1_0-AC$_0$ は unique Σ^1_1-AC$_0$ と本質的に異なるにも関わらず，多くの研究者が多少の抵抗を覚えながらも両者を混同してしまう表記法に慣例として従ってきたのだと思う．この表記法には特段有益な点も見つからないため刷新するべきだろう．

[*3] Σ^1_1-DC$_0$ と Σ^1_1-AC$_0$ を分離する ω モデルは ω モデル不完全性（[Sim09] Theorem VIII.5.6）を用いて比較的容易に存在が証明できる．それ以外は全て tagged tree forcing と呼ばれる手法でモデルを構成する．

よく知られているように，Π^0_1-$\mathsf{AC}_0 \equiv \mathsf{WKL}_0$，$\Sigma^0_2$-$\mathsf{AC}_0 \equiv \mathsf{ACA}_0$，$\Pi^0_2$-$\mathsf{AC}_0 \equiv \Sigma^1_1$-$\mathsf{AC}_0$ である[*4]．その unique 版が次である．

命題 2.2. unique Γ-AC_0 について次が成り立つ．

1. unique Π^0_1-$\mathsf{AC}_0 \equiv \mathsf{WKL}_0$(folklore?)
2. unique Σ^0_2-$\mathsf{AC}_0 \equiv \mathsf{ACA}_0$
3. unique Π^0_2-$\mathsf{AC}_0 \equiv$ unique Π^1_0-AC_0

証明. 1.unique Π^0_1-$\mathsf{AC}_0 \vdash \mathsf{WKL}_0$ を示せば十分．そのために，以下では unique Π^0_1-$\mathsf{AC}_0 + \neg\mathsf{WKL}_0$ で議論を行い ACA_0 を導くことで矛盾を示す．そこで $\exists t\theta(n,t)$ を先ほどと同様にとって固定する．ただし，最小性の条件を課すことによって $\theta(n,t)$ なる t が存在するときにはその t が一意的だと仮定してよい．

まず $\neg\mathsf{WKL}_0$ からパスを持たない無限二分木 T_E をとる．このとき，n で添え字づけられたちょうど一つのパスを持つ再帰的な木の列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定義する．はじめに T_n について直感的に説明しよう．T_n は，そのパス $X \in 2^{\mathbb{N}}$ の $X(0) \in \{0,1\}$ の値で $\exists t\theta(n,t)$ が正しいか否かを判定できるように作りたい．そのために $\theta(m,t)$ を満たす t を探索する過程を木に写し取る．具体的には，そのような t を $t = 0,1,2,...$ と探していくのだが，偽となりそうな間，つまり $\neg\theta(m,t)$ である間は 0000... という頂点を増やし続け，さらに $\langle 1\rangle$ の後ろに T_E のコピーをはやしていく．その後 $\theta(n,t)$ を満たす t が見つかった場合は，0000... 及び T_E のコピーを生成するのを中断し，T_E のコピーの高さ t で最も左にある頂点から再び 0000.... と生やしていく．これは T_E が無限木，つまり各高さに少なくとも一つ頂点が存在することから可能である．以上を形式的に書いたものが次の定義である．

$$\begin{aligned}
&\sigma \in T_n \leftrightarrow \\
&\sigma = \langle\rangle \vee [\forall l < |\sigma|(\sigma(l) = 0) \wedge \forall l < |\sigma|\neg\theta(n,l)] \vee [\sigma(0) = 1 \wedge \{\exists\tau(\sigma = 1^\frown\tau\wedge \\
&\qquad [([\forall l < |\tau|\neg\theta(n,l) \wedge \tau \in T_E]) \vee (\exists s < |\tau|(\theta(n,s) \wedge \tau[s] = \sigma_{LM(t)\mathrm{in}T_E} \\
&\qquad\qquad \wedge \forall t(s \le t < |\tau| \to \tau(t) = 0)))])\}]
\end{aligned}$$

ここで $\sigma_{LM(t)\mathrm{in}T_E}$ は T_E の高さ t における左端頂点を表す．

定義から $\forall n\exists!X\forall k(X[k] \in T_n)$ であるので，仮定により $\langle X_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ で $\forall n(X_n[k] \in T_n)$ を満たすものがとれる．このとき $\{\, n \mid X_n(0) = 1 \,\} = \{\, n \mid \exists t\theta(n,t) \,\}$ となっている．

2. 容易．3.[Suz24] Theorem 6. □

命題 2.3. JI_0 と Σ^1_1-DC_0 は超算術的解析である．また二つの超算術的解析の間の強さを持つ理論は超算術的解析であるため，Σ^1_1-AC_0, Δ^1_1-CA_0, unique Π^1_0-AC_0 も超算術的解析である．

注意 2.4. 筆者が知る範囲では，明示的に公理の形で定義されている超算術的解析の理論（$+\Sigma^1_1$-IND）は全て JI_0 から Σ^1_1-DC_0 の間にある．

上記で導入した 5 つの理論はそれぞれ ω モデルによって分離されている．その中に次の節以降で用いる ω モデルがいくつかあるため，それらの紹介と合わせて先行研究を紹介しよう．

定理 2.5 ([Wes77] Theorem 1.1)**.** unique Π^1_0-AC_0 を充足し，Δ^1_1-CA_0 を充足しない ω モデルが存在する．以後この ω モデルを M_w と表記する．

定理 2.6 ([Fri67] II.4 Theorem 2)**.** Σ^1_1-AC_0 を充足し，Σ^1_1-DC_0 を充足しない ω モデルが存在する．

[*4] [鈴木 23] が詳しい．

定理 2.7 ([Ste78] Theorem 4)**.** Δ^1_1-CA_0 を充足し，Σ^1_1-AC_0 を充足しない ω モデルが存在する．

Δ^1_1-CA_0 と Σ^1_1-AC_0 は次に示すようにより細かく分離されている．

次の形の図式に ACA_0 を付けた理論を Π^1_1-SEP_0 という．

$$\neg\exists n[\psi_0(n)\wedge\psi_1(n)]\to\exists X\forall n((\psi_0(n)\to n\in X)\wedge(\psi_1(n)\to n\notin X))\quad\text{where}\quad\psi_0,\psi_1\in\Pi^1_1$$

Σ^1_1-$\mathsf{AC}_0\vdash\Pi^1_1$-$\mathsf{SEP}_0\vdash\Delta^1_1$-$\mathsf{CA}_0$ は容易に確認できる．この逆は成り立たない．

定理 2.8 ([Mon08] Theorem 3.1,Theorem 2.1)**.** 以下がともに成り立つ．

1. Δ^1_1-CA_0 を充足し，Π^1_1-SEP_0 を充足しない ω モデルが存在する．
2. Π^1_1-SEP_0 を充足し，Σ^1_1-AC_0 を充足しない ω モデルが存在する．

定理 2.9 ([Mon06] Theorem 5.1)**.** JI_0 を充足し，unique Π^1_0-AC_0 を充足しない ω モデルが存在する[*5]．

逆数学の最初期頃の文献 [Fri75] では数学的な二つの超算術的解析の理論が挙げられている．これらはクラスに算術的論理式に関する制限がついているため，今日では純粋な数学的定理とは認められていない．

定義 2.10 (ABW,SL)**.** 以下で収束や集積点といった場合，位相としてはカントール空間を考えている．

次の主張を算術的ボルツァノ・ワイエルシュトラス（arithmetic Bolzano-Weierstrass）とよび，ABW と表記する．

$$A(X)\text{ が有限個の解を持つ}\vee\{\,X\mid A(X)\,\}\text{ に集積点が存在する．}\quad\text{where }A(X)\in\Pi^1_0$$

ここで “$A(X)$ が有限個の解を持つ” は $\exists Z\exists m\forall Y(A(Y)\leftrightarrow\exists n<mY=A_n)$ の略記である．また $Z\subseteq\mathbb{N}$ が $\{\,X\mid A(X)\,\}$ の集積点であるとは次が成り立つことをいう．

$$\forall n\exists X[A(X)\wedge X\neq Z\wedge X[n]=Z[n]]$$

次の主張を点列極限系（sequential limit system）とよび，SL と表記する．

$$Z\text{ が }\{\,X\mid A(X)\,\}\text{ の集積点}\to Z\text{ に収束する }A\text{ の点列 }\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{が存在する．}\quad\text{where }A(X)\in\Pi^1_0$$

ここで $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A の点列であるとは，$\forall nA(Z_n)$ が成り立つことをいい，それが Z へ収束するとは，次が成り立つことをいう．

$$\forall m\exists N\forall n>N(Z_n[m]=Z[m])$$

それぞれに RCA_0 を合わせた理論を下に 0 を付けて表わす．

注意 2.11. Friedman が上記二つの理論を導入した 1970 年代では二階算術の公理にすべての帰納法公理を付けた理論を考えていた．そのため彼の論文では証明無しで SL が現代でいう Σ^1_1-AC と RCA_0+（すべての帰納法）上で同値という記述がある（[Fri75] Theorem 2.1[*6]）が，そこでは帰納法の制限に関しては考慮されていないことに注意が必要である．また，その省略されていた二つの同値性の証明は Conidis が 2012 年に与えており（[Con12] Theorem 2.1），その論文では RCA_0 上で同値性が証明でき，Σ^1_1-IND は使わずに示せると書かれている．しかし証明の中では明示的に Σ^1_1-IND を使っている箇所があるため（p4477，14 行目），実際に帰納法が必要か否かは不明であると言わざるを得ない．

Friedman は他にも ABW と SL についての結果を述べているが証明は与えなかった．Conidis はそれらに対してそれぞれ証明を与え，特に ABW について詳細な分析を行った．

[*5] 文献では，JI よりも強い理論を充足しない ω モデルが構成されている．

[*6] Friedman の論文では Σ^1_1-AC ではなく HAC と書かれており，現代的な表記で書くなら Δ^1_1-AC となる．これらは RCA_0 上同値．

定理 2.12 ([Con12] Theorem 2.1)**.** 以下が $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_1$-IND 上で正しい．

- Σ^1_1-$\mathsf{AC}_0 \to \mathsf{SL}$
- Σ^1_1-$\mathsf{AC}_0 \to \mathsf{ABW}$
- $\mathsf{SL} \to \Sigma^1_1$-$\mathsf{AC}_0$
- $\mathsf{ABW} \to$ unique Π^1_0-AC_0 [*7]

ABW と SL の導入から 40 年空いて，ついに Montalbán が純粋な数学の定理で超算術的解析に属するものを見つけた．それが INDEC とよばれる，線形順序集合の分解不可能性に関する定理である．本稿ではこの定理の内容に立ち入らないため詳細は省略する．詳しくは [Mon06] を参照せよ．元となった定理は Pierre Jullien の 1969 年の博士論文にあるとされているが，筆者にはその文献は入手できなかった．

定理 2.13 ([Mon06] Theorem 2.2)**.** Δ^1_1-$\mathsf{CA}_0 \vdash \mathsf{INDEC}$

この INDEC について Itay Neeman が詳細な分析を行った．

定理 2.14 ([Nee08])**.** $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_1$-IND $\vdash \Delta^1_1$-$\mathsf{CA}_0 \to \mathsf{INDEC} \to$ unique Π^1_0-AC_0 であり，さらにそれぞれ逆は成り立たず，ω モデルによって分離される．

さらに Neeman は INDEC から unique Π^1_0-AC_0 を導く際に，Σ^1_1-IND が不可欠であることを示した（[Nee11] Theorem 1.1）．

これまで見た結果と以下に示す Conidis の結果から，Δ^1_1-CA_0 と ABW が $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_1$-IND 上で比較不能であることが容易に従う．

定理 2.15 ([Con12] Theorem 3.1，Theorem 4.1)**.** 次が成り立つ．

- Δ^1_1-CA_0 を充足し，ABW を充足しない ω モデルが存在する．
- ABW を充足し，INDEC を充足しない ω モデルが存在する．

定理 2.16 ([Con12] Theorem4.7)**.** Van Wesep が [Wes77] Theorem 1.1 の証明で構成した ω モデル M_w はさらに ABW を充足する．

3 従属選択公理の一意版

この説では以下の理論について議論する．

定義 3.1. 下記のように，右側の論理式の全称閉包からなる公理図式にそれぞれ左の名前をつける．

$$\begin{aligned}\text{unique } \Gamma\text{-DC} &: \forall X \exists ! Y \varphi(X,Y) \to \exists Y \forall n \varphi(Y^n, Y_n) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma \\ \text{unique } \Gamma\text{-TDC} &: \forall X \exists ! Y \varphi(X,Y) \land WO(Z) \to \exists Y \forall a \in \text{field}(Z) \varphi(Y^a, Y_a) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma\end{aligned}$$

そして例によって，それぞれに RCA_0 を足した理論を unique Γ-DC_0，unique Γ-TDC_0 と表記する．

unique Γ-DC はおそらく本稿が初出であるが，unique Σ^1_1-TDC は [Rüe02] で導入された．そこでは weak Σ^1_1-TDC と表記されており，主として一意性の条件を外したバージョンである Σ^1_1-TDC の強さが調べられている．Rüede は証明しなかったが，ATR_0 と unique Σ^1_1-TDC_0 は同値である[*8]．手短に証明しよう．

[*7] Friedman はこの 4 には言及していない．

[*8] 例えば [Mic21] Corollary 2.12 で明示的に書かれている．

unique Σ^1_1-TDC_0 は Δ^1_1-TR_0 と明らかに同値である．また，[Sim09] Theorem V.5.1 から ATR_0 と Σ^1_1-SEP_0 は同値であり，そこでの証明から即座に Σ^1_1-SEP_0 と Δ^1_1-TR_0 の同値性が従う．以上で $\mathsf{ATR}_0 \equiv \Sigma^1_1$-$\mathsf{SEP}_0 \equiv \Delta^1_1$-$\mathsf{TR}_0 \equiv$ unique Σ^1_1-TDC_0 が得られた．以上を命題としてまとめておこう．

命題 3.2. $\mathsf{ATR}_0 \equiv \Sigma^1_1$-$\mathsf{SEP}_0 \equiv \Delta^1_1$-$\mathsf{TR}_0 \equiv$ unique Σ^1_1-TDC_0

unique Σ^1_1-DC はその形から，明らかに unique Σ^1_1-TDC_0，つまり ATR_0 から従う．同じ理由で Σ^1_1-DC_0 からも従う．また，よく知られているように Σ^1_1-DC_0 と ATR_0 は比較不能である．したがってその両方より unique Σ^1_1-DC は真に弱い．一方 unique Π^1_0-DC では ω 回の Turing jump の繰り返しが可能であるために，ACA_0 と Π^1_2 保存的である Σ^1_1-AC_0（cf. [Sim09] Theorem IX.4.4）からは証明されない．

unique Γ-DC は通常の Γ-DC と同様に，次のように言い換えられる．

命題 3.3. Γ が Σ^1_1 あるいは Π^1_0 のとき次の図式が RCA_0 上同値である．

1. unique Γ-DC
2. $\forall X \exists ! Y \theta(X,Y) \to \forall A \exists Y (Y_0 = A \land \forall n \theta(Y_n, Y_{n+1}))$ where $\theta \in \Gamma$
3. $\forall n \forall X \exists ! Y \psi(n,X,Y) \to \forall A \exists Y (Y_0 = A \land \forall n \psi(n, Y_n, Y_{n+1}))$ where $\psi \in \Gamma$

特に三つ目の言い換えから Γ が Π^1_0 あるいは Σ^1_1 のときに unique Γ-$\mathsf{DC}_0 \vdash$ unique Γ-AC_0 が従うことが分かる．よって unique Π^1_0-DC_0 と unique Σ^1_1-DC_0 は超算術的解析である．また，unique Γ-$\mathsf{DC}_0 \vdash$ unique Γ-AC_0 の逆は成り立たないが，適切な帰納法を加えることで逆も導ける．

補題 3.4. $k \in \omega$ について次が正しい．

$$\text{unique } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{AC}_0 + \Sigma^1_1\text{-IND} \vdash \text{unique } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{DC}_0$$
$$\text{unique } \Sigma^1_{k+1}\text{-}\mathsf{AC}_0 + \Sigma^1_{k+1}\text{-IND} \vdash \text{unique } \Sigma^1_{k+1}\text{-}\mathsf{DC}_0$$

証明. それ以外の場合も同様なので $\theta \in \Sigma^1_1$ として証明する．$\forall n X \exists ! Y \theta(n,X,Y)$ を仮定し A を任意にとる．以下の論理式を $\psi(n,Z)$ とする．

$$Z_0 = A \land \forall i < n \theta(i, Z_i, Z_{i+1}) \land \forall i > n (Z_i = \varnothing)$$

Σ^1_k 帰納法の下で Σ^1_k 論理式は数の有界量化に閉じるので，ψ もまた Σ^1_1 である．よって Σ^1_1 帰納法により $\forall n \exists Z \psi(n,Z)$ が示せる．一意性は明らかなので $\forall n \exists ! Z \psi(n,Z)$ が成り立つ．したがって unique Σ^1_1-AC_0 によって解が構成できる． □

したがって unique Γ-AC_0 と unique Γ-DC_0 はその ω モデルが完全に一致する．特にこのことから ω モデル M_w を証拠として unique Π^1_0-$\mathsf{DC}_0 <$ unique Σ^1_1-DC_0 が成り立つ．

4 従属選択公理の有限版

定義 3.1 で列挙した公理たちについて，その前件にある「ちょうど一つ」の箇所を「有限個」に書き換えた公理も自然に考えられる．つまり，“$\exists$ nonzero finitely many $X \psi(X)$” を

$$\exists m \exists X \forall Y (\psi(Y) \leftrightarrow \exists n \leq m (Y = X_n))$$

の略記とし，定義 3.1 に倣って finite Γ-DC などを定義する．命題 3.3 はこの有限版についても成立する．finite Π^1_0-AC_0 は [Goh23] で導入され，その強さが調べられている[*9]．本稿では Goh が構成した ω モデルを利用していくつかの理論を分離するため，まず以後必要となる Goh の結果の紹介からはじめる．

*9 [Goh23] において finite Π^1_0-AC_0 は finite Σ^1_1-AC_0 と表記されていることに注意せよ．

定理 4.1 ([Goh23] Theorem1.5)**.** $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_1\text{-IND} + \mathsf{ABW} \vdash \text{finite } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{AC}_0$

Goh も上の定理の直後で述べているように，定理 2.16 から次が成り立つ．

系 4.2. finite Π^1_0-AC_0 を充足し，Δ^1_1-CA_0 を充足しない ω モデルが存在する．

定理 4.3 ([Goh23] Theorem1.3)**.** Δ^1_1-CA_0 を充足し，finite Π^1_0-AC_0 を充足しない ω モデルが存在する．

この Goh の結果から特に finite Π^1_0-AC_0 と Δ^1_1-CA_0 が比較不能であることが分かる．

有限版についても，一意版と同様に finite Γ-DC_0 は finite Γ-AC_0 を導き，逆も適切な帰納法の下で正しい．そこで必要となる帰納法公理は，“有限” の表現を工夫することで一つ軽くできる．いま $\exists$ nonzero *subfinitely* many $X\varphi(X)$ を nonzero finitely many を緩めた次の主張の略記とする．

$$\exists m \exists X \forall Y(\varphi(Y) \to \exists n \leq m(Y = X_n))$$

命題 4.4. θ を Π^1_0，φ を Σ^1_{k+1} 論理式としたとき次が正しい．

$$\mathsf{RCA}_0 + \Pi^1_0\text{-IND} \vdash \exists \text{ nonzero finitely many } X\theta(X) \leftrightarrow \exists \text{ nonzero subfinitely many } X\theta(X)$$

$$\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_{k+2}\text{-IND} \vdash \exists \text{ nonzero finitely many } X\varphi(X) \leftrightarrow \exists \text{ nonzero subfinitely many } X\varphi(X)$$

特に，$\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_{k+2}$-IND 上で “$\exists$ nonzero finitely many $X\varphi(X)$” は Σ^1_{k+2}．

証明. ある m と $X = \langle X_n \rangle_{n \leq m}$ で $\forall Y(\varphi(Y) \to \exists n \leq m(Y = X_n))$ だったとする．このとき n による帰納法で次を示せる．

$$\forall n \leq m \exists \sigma \in 2^n \forall i \leq n(\sigma(i) = 1 \leftrightarrow \varphi(X_i))$$

ここで得られる $\sigma \in 2^m$ によって $\langle X_n \rangle_{n \leq m}$ から φ の解とならないものを取り除くことができる． □

定理 4.5. 任意の $k \in \omega$ について次が正しい．

$$\text{finite } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{AC}_0 + \Sigma^1_2\text{-IND} \vdash \text{finite } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{DC}_0$$

$$\text{finite } \Sigma^1_{k+1}\text{-}\mathsf{AC}_0 + \Sigma^1_{k+2}\text{-IND} \vdash \text{finite } \Sigma^1_{k+1}\text{-}\mathsf{DC}_0$$

証明. $\varphi \in \Sigma^1_{k+1}$ について示す．$\forall n \forall X \exists$ nonzero finitely many $Y\varphi(n, X, Y)$ と仮定し A を任意にとる．次の論理式を $\psi(n, Z)$ とする．

$$Z_0 = A \wedge \forall i < n\varphi(i, Z_i, Z_{i+1}) \wedge \forall i > n(Z_i = \varnothing)$$

Σ^1_{k+1} 帰納法の下で Σ^1_{k+1} 論理式は数の有界量化に閉じるので $\psi \in \Sigma^1_{k+1}$ である．したがって命題 4.4 から，Σ^1_{k+2}-IND とそこから従う bounded Π^1_{k+1}-AC_0 を用いることで $\forall n \exists$ nonzero finitely many $Z\psi(n, Z)$ が確かめられる．

以上から $\forall n\psi(n, Z_n)$ を満たす $\langle Z_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる．各 Z_n は長さが $n+1$ の有限集合列ではあるが，必ずしも $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ という訳ではない．このような $\langle Z_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ から求める無限列を構成するために，無限パスから求める無限列を構成できるような添え字の木 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を次のように定義する．

有限列の列 $\langle \sigma_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ と有限木の列 $\langle T_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ を次のように再帰的に定める．

$\sigma_0 = \langle \rangle, \sigma_1 = \langle 1 \rangle, T_0 = \langle \rangle, T_1 = T_0 \cup \{\tau \mid \tau \subseteq \sigma_1\} = \{\sigma_1\}$ とする．いま n まで σ_n と T_n が定まっているとする．この証明中での記法として，$Z_n = \langle A^n_0, A^n_1, A^n_2, ..., A^n_{n-1}, A^n_n \rangle$ と表示した際，これを前 $k+1$ で切った $\langle A^n_0, A^n_1, A^n_2, ..., A^n_{k-1}, A^n_k \rangle$ を $Z_n \upharpoonright k$ と書く．

σ_{n+1} を次のアルゴリズムで定義し，$T_{n+1} = T_n \cup \{\tau \mid \tau \subseteq \sigma_n\}$ とする．

0. 長さ n の T_n のパスを探す：if $Z_{n+1}\upharpoonright n = Z_n$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_n{}^\frown\langle n+1\rangle$. else below.

1. 長さ $n-1$ の T_n のパスを探す：

   1-0. if $Z_{n+1}\upharpoonright n-1 = Z_n\upharpoonright n-1$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_n[n-1]^\frown\langle n+1, n+1\rangle$ else

   1-1. if $Z_{n+1}\upharpoonright n-1 = Z_{n-1}$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_{n-1}{}^\frown\langle n+1, n+1\rangle$. else below.

2. 長さ $n-2$ の T_n のパスを探す：

   2-0. if $Z_{n+1}\upharpoonright n-2 = Z_n\upharpoonright n-2$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_n[n-2]^\frown\langle n+1, n+1, n+1\rangle$ else

   2-1. if $Z_{n+1}\upharpoonright n-2 = Z_{n-1}\upharpoonright n-2$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_{n-1}[n-2]^\frown\langle n+1, n+1, n+1\rangle$ else

   2-2. if $Z_{n+1}\upharpoonright n-2 = Z_{n-2}$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_{n-2}{}^\frown\langle n+1, n+1, n+1\rangle$ else below.

3. 長さ $n-3$ の T_n のパスを探す：

   $\vdots$

$n-1$. 長さ 1 の T_n のパスを探す：

   $n-1$-0. if $Z_{n+1}\upharpoonright 1 = Z_n\upharpoonright 1$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_n[1]^\frown\langle n+1, ..., n+1\rangle$ else

   $n-1$-1. if $Z_{n+1}\upharpoonright 1 = Z_{n-1}\upharpoonright 1$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_{n-1}[1]^\frown\langle n+1, ..., n+1\rangle$ else

   $n-1$-2. if $Z_{n+1}\upharpoonright 1 = Z_{n-2}\upharpoonright 1$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_{n-2}[1]^\frown\langle n+1, ..., n+1\rangle$ else

   $\vdots$

   $n-1$-$n-1$. if $Z_{n+1}\upharpoonright 1 = Z_1$ then $\sigma_{n+1} = \sigma_1{}^\frown\langle n+1, ..., n+1\rangle$. else below.

n. T_n のパスのどの始切片にも一致しなかったケース：$\sigma_{n+1} = \underbrace{\langle 1, ..., n+1\rangle}_{n+1\text{ 個}}$

明らかに $\langle\sigma_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ と $\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ は算術的に定義できる．$T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ と定めると，仮定から T は有限分岐無限木である．よってケーニヒの補題から無限パス f がとれる．最後に，$W_n = (Z_{f(n)})_n = A_n^{f(n)}$ で定める列 $\langle W_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ が $\forall n\varphi(W_n, W_{n+1})$ を満たす． □

以上で示した結果と，DC 系が ACA_0^+ を含意する一方で AC 系は含意しないという事実を合わせることで Introduction の図 1 が描ける．

5　ω モデル反映公理による超算術的解析の近似

ここでは 3 節や 4 節で行ったような一つの理論と他の理論との関係性を見る視点から一歩引いて，超算術的解析という理論のクラスが持つ構造を調べる．そこで超算術的解析の理論全体を $\mathcal{HA}$ で表わし，そこに含意関係で順序を定めた前順序を $(\mathcal{HA}, \leq)$ と表記する．

さて，まずは $(\mathcal{HA}, \leq)$ の構造に関するよく知られている結果を三つ紹介しよう．

定理 5.1 ([Wes77] 2.2.2)**.** 任意の $T\in\mathcal{HA}$ に対し，それより真に弱く，さらに真に多くの ω モデルを持つ T 計算可能な $T'\in\mathcal{HA}$ が存在する．

この定理から特に $(\mathcal{HA}, \leq)$ には無限下降列があると分かる．

命題 5.2. $(\mathcal{HA}, \leq)$ は自明な最大限 $\bigcap_{X\subseteq\omega}\mathrm{Th}(\mathrm{HYP}(X))$ を持つ．ただしここで $\mathrm{Th}(\mathrm{HYP}(X))$ は ω モデル $\mathrm{HYP}(X)$ で正しい L_2 文全体である．

定義 5.3. φ は $X_1, ..., X_n$ 以外に自由変数がない論理式とする．このとき，次を RFN_φ と書く．

$$\begin{aligned}&\forall X_1, ..., X_n(\varphi(X_1, ..., X_n)\\ &\to \exists\text{ coded }\omega\text{モデル } M(X_1, ..., X_n\in M\land M\models\varphi(X_1, ..., X_n)+\mathsf{ACA}_0))\end{aligned}$$

そして $\Gamma\text{-}\mathsf{RFN} := \{\,\mathsf{RFN}_\varphi \mid \varphi\in\Gamma\,\}$ とし，例によって $\Gamma\text{-}\mathsf{RFN}_0 := \Gamma\text{-}\mathsf{RFN} + \mathsf{ACA}_0$ と定める．

補題 5.4. $\Sigma^1_1\text{-DC}_0 \equiv \Sigma^1_3\text{-RFN}_0$

証明. [Sim09] Theorem VIII.5.12. □

定理 5.5. $\mathcal{HA}$ には Σ^1_3 文で有限公理化可能なものは存在しない.

証明. 先の補題から $\mathrm{HYP} = \mathrm{HYP}(\varnothing) \models \Sigma^1_3\text{-RFN}_0$ である．したがって HYP で正しい Σ^1_3 文については，HYP の中に，つまり HYP より真に小さいその文のモデルが存在する. □

次に $\mathcal{HA}$ を分析するために，それを近似する理論のクラスを導入する.

定義 5.6. T を再帰的公理化可能な L_2 理論とする．以下の文を $\mathsf{RFN}(T)$ と表記し，T の ω モデル反映とよぶ.

$$\forall X \exists M (X \in M \land M \text{ は } T + \mathsf{ACA}_0 \text{の coded } \omega\text{モデル})$$

また $n \in \omega$ について ω モデル反映の n 回反復 $\mathsf{RFN}^n(T)$ を次のように再帰で定める.

$$\begin{aligned} \mathsf{RFN}^0(T) &= T \\ \mathsf{RFN}^{n+1}(T) &= \mathsf{RFN}(\mathsf{RFN}^n(T) + \mathsf{ACA}_0) \end{aligned}$$

例によって $\mathsf{RFN}^n(T)_0 := \mathsf{RFN}^n(T) + \mathsf{ACA}_0$ と定め，$\mathsf{RFN}^1(T)_0 = \mathsf{RFN}(T + \mathsf{ACA}_0) + \mathsf{ACA}_0$ を特に $\mathsf{RFN}(T)_0$ と表記する.

強健全性定理（cf. [Sim09] Theorem II.8.10）から，理論の分離に役立つ次の基本的事実が従う.

補題 5.7. 再帰的公理化可能な L_2 理論 T について $\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathsf{RFN}(T) \to \mathrm{Con}(T)$

証明. T が文のときはよい．T が再帰的公理化可能で特に無限集合である場合も，$\mathsf{ACA}_0 + \mathsf{RFN}(T) \vdash \mathsf{ACA}_0^+$ であるので coded ωモデル において体系内の全論理式に対して真偽が定まる. □

この公理によって定まる理論のクラス $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0) := \{\, T \mid \mathsf{RFN}(T) \equiv \mathsf{ATR}_0 \,\}$ がある程度 $\mathcal{HA}$ を近似している．ここではインスタンスの類似性と閉包性の類似性という二つの証拠を提示しよう.

以前見たように明示的に定義されている既存の超算術的解析の理論は JI_0 から $\Sigma^1_1\text{-DC}_0$ の間におさまる．逆に，そのような理論は $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ の元でもある，というのが次の命題である.

命題 5.8. T が JI_0 と $\Sigma^1_1\text{-DC}_0$ の間にあるなら $T \in \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ である.

証明. $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\Sigma^1_1\text{-DC})_0$ は [Sim09] Lemma VIII.4.19．$\mathsf{RFN}(\mathsf{JI})_0 \vdash \mathsf{ATR}_0$ は算術的超限帰納法から証明できる.

□

次に閉包性の類似性を見る.

補題 5.9. T を $T \vdash \mathsf{ACA}_0$ なる L_2 文とする．このとき，次が成り立つ.

$$\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathsf{RFN}(T) \leftrightarrow \mathsf{RFN}(T + \neg\mathsf{RFN}(T))$$

証明. $(\leftarrow)$ は自明．$\mathsf{ACA}_0 + \mathsf{RFN}(T) \vdash \mathsf{RFN}(T + \neg\mathsf{RFN}(T))$ を示す．まず $\mathsf{ACA}_0 + \mathsf{RFN}(T)$ が矛盾している場合は明らかなので無矛盾と仮定してよい．そのモデル M と $X \in M$ をとって固定しておく．示すべきは以下を満たす $N \in M$ が存在することである.

$$X \in N \models T + \neg\mathsf{RFN}(T)$$

以降の議論は [Sim09] Theorem VIII.5.6 の ω-model incompleteness を相対化したものと考えられる．

C を集合定数とする．ここで以下のように三つの $\mathrm{L}_2 + \{C\}$ 文にそれぞれ $(1), (2), (3)$ と名前を付ける．

(1) $T + \neg\exists N(C \in N \wedge N$ は T の coded ωモデル$)$

(2) $\exists N(C \in N \wedge N$ は T の coded ωモデル$)$

(3) $\neg\exists N(C \in N \wedge N$ は (1) の coded ωモデル$)$

この $T^* := \mathsf{ACA}_0 + (2) + (3)$ が矛盾していることを示せばよい．

□

この補題から次が成り立つ．

命題 5.10. $T \vdash \mathsf{ACA}_0$ なる L_2 文 T に対して以下はすべて同値.

1. $T \in \mathcal{HA}$.
2. $T +$ full induction $\in \mathcal{HA}$.
3. $T + \neg\mathsf{RFN}(T) \in \mathcal{HA}$.
4. $T + \neg\mathsf{ATR} \in \mathcal{HA}$.

上記の閉包性は超算術的解析が ω モデルを用いて定義されていた事実に由来すると考えられる．この閉包性が $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ についても成立する．

定理 5.11. $T \vdash \mathsf{ACA}_0$ なる L_2 文 T に対して以下はすべて同値

1. $T \in \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$.
2. $T +$ full induction $\in \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$.
3. $T + \neg\mathsf{RFN}(T) \in \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$.
4. $T + \neg\mathsf{ATR} \in \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$.

証明. $(1 \Leftrightarrow 2)$ 明らか． $(1 \Leftrightarrow 3)$ 補題 5.9 から従う． $(1 \Rightarrow 4)$ 補題 5.9 から従う．

$(4 \Rightarrow 1)$ まず 4 より $\mathsf{ATR}_0 \equiv \mathsf{RFN}(T + \neg\mathsf{ATR})_0 \vdash \mathsf{RFN}(T)_0$ ．逆を示すために，モデル $M \models \mathsf{RFN}(T)_0$ と $X \in M$ を固定する．4 より $T + \neg\mathsf{ATR}$ の X を含むモデルが M の中にとれればよい．さて，いま $M \models \mathsf{RFN}(T)_0$ より $X \in N \models T$ なる N が存在する．$N \not\models \mathsf{ATR}$ ならここで終了である．以降 $N \models \mathsf{ATR}$ だとする．このとき再び 4 より $N \models \mathsf{RFN}(T + \neg\mathsf{ATR})_0$ であるので，$X \in N' \models T + \neg\mathsf{ATR}$ を満たす $N' \in N$ が存在する．この N' については $N' \in M$ でもあるのでよい． □

以上で見たように $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ はある程度 $\mathcal{HA}$ を近似しているといえるだろう．このことから $\mathcal{HA}$ の構造を探るために有用と考えられる二種類の問が立つ．一つは，両者が他にどんな性質を共有しているのか，という類似点を探る問である．もう一つは逆にどのような点で異なっているのか，という相違点を探る問である．

前者の類似性に関する問を紹介しよう．定理 5.5 で見たように，$\mathcal{HA}$ には Σ^1_3 文が存在しない．これが $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ でも成立するか，というのは自然な問だろう．残念ながらこの問は完全には解決できておらず，本稿では次の意味での部分的な解答を与える．それは，特殊な Π^1_2 有限公理化可能理論なら少なくとも $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ に属するものは無い，というものである．

定理 5.12. $\theta(X, Y)$ は算術的論理式で X, Y 以外に自由変数を持たないとする．このとき次が成り立つ．

$$\text{unique } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{DC}_0 \vdash \forall X \exists! Y \theta(X, Y) \to \mathsf{RFN}^2(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))$$

証明. unique Π^1_0-$\mathsf{DC}_0 + \forall X \exists! Y \theta(X, Y)$ において議論する．A を固定する．$\psi(X, Y)$ を次の算術的論理式と

する．

$$\begin{aligned}\forall m \forall k \leq m \forall l, r \leq k\{&(m=0 \to Y_0 = A)\wedge\\ &(m=4k+1 \to \theta(X_k, Y_m))\wedge\\ &(m=4k+2 \wedge k = \langle l, r\rangle \to [(\Phi_r^{X_l} \in 2^{\mathbb{N}} \to Y_m = \Phi_r^{X_l})\wedge\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\Phi_r^{X_l} \notin 2^{\mathbb{N}} \to Y_m = \varnothing)])\wedge\\ &(m=4k+3 \wedge k = \langle l, r\rangle \to Y_m = X_l \oplus X_r)\wedge\\ &(m=4k+4 \to Y_m = \mathrm{TJ}(X_k))\}.\end{aligned}$$

Claim 1. $\forall X \exists! Y \psi(X, Y)$ が成り立つ．

Claim の証明．X を固定する．Y の一意性は明らか．存在を示す．まず X をパラメータに持ち，$\forall m \rho(m, Y) = \psi(X, Y)$ なる算術的論理式 ρ をとる．いま $\forall X \exists! Y \theta(X, Y)$ であるので $\forall m \exists! Y \rho(n, Y)$ が正しい．ここで unique Π^1_0-AC_0 を使うことにより $\forall m \rho(m, Y_m)$ を満たす Y がとれる．この Y が条件を満たす． Claim の証明終わり．

いま $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $X_n = A$ $(n \in \mathbb{N})$，つまり全てが A である集合族とする．先の Claim と unique Π^1_0-DC_0 によって $Y_0 = X \wedge \forall n \psi(Y_n, Y_{n+1})$ なる Y がとれる．加えて，再び先の Claim からこの Y も一意的である．以上を整理すると，次が正しい．

$$\forall A \exists! Y (= \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}})(Y_0 = \{A\}_{n\in\mathbb{N}} \wedge \forall n \psi(Y_n, Y_{n+1})).$$

ここで任意にとった A に対して上記により一意的にとれる Y から $M_{\langle l,r\rangle} = (Y_l)_r$ で定める $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は A を含み，$\forall X \exists! Y \theta(X, Y) + \mathsf{ACA}_0$ を満たす coded ωモデル である．

さて，いま $\theta'(A, Y)$ を $Y_0 = \{A\}_{n\in\mathbb{N}} \wedge \forall n \psi(Y_n, Y_{n+1}, A)$ とおくと $\forall A \exists! Y \theta'(A, Y)$ であり θ' は算術的である．したがって上記 ψ の定義中の $\theta(X_k, Y_n)$ を $\theta'(X_k, Y_n)$ に取り替えたものを ψ' として同様の議論を行えば，任意にとった A について，それを含み，$\forall X \exists! Y \theta'(X, Y) + \mathsf{ACA}_0$ を満たす coded ωモデル N が構成できる．特に $N \models \forall X \exists! Y \theta'(X, Y)$ から $N \models \mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))$ が成り立つ．従って $\mathsf{RFN}(\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y)) + \mathsf{ACA}_0)$ すなわち $\mathsf{RFN}^2(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))$ が結論できる． □

系 5.13. X, Y 以外に自由変数を持たない全ての算術的論理式 $\theta(X, Y)$ について $\forall X \exists! Y \theta(X, Y) \notin \mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ である．すなわち，次が正しい．

$$\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0 \not\equiv \mathsf{ATR}_0$$

証明. $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0$ だとする．このとき $\mathsf{ATR}_0 \vdash \forall X \exists! Y \theta(X, Y)$ であり，$\mathsf{ATR}_0 \vdash$ unique Π^1_0-DC_0 より $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}^2(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))$ が正しい．したがって補題 5.7 から $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y)) + \mathsf{ACA}_0)$ すなわち $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0)$ が従う．従ってもし仮に $\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0 \vdash \mathsf{ATR}_0$ だとすると

$$\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{RFN}(\forall X \exists! Y \theta(X, Y))_0)$$

が導かれて第二不完全性定理に反する． □

定理 5.12 の証明を真似ることで，補題 5.4 と同様の ω モデルの反映公理との同値性が unique Π^1_0-DC_0 についても成立することが示せる．

系 5.14. 定義 5.3 における RFN_φ の φ として，θ を算術的論理式とし $\forall X \exists! Y \theta(X, Y, ...)$ の形のみを集めて ACA_0 を付けた理論を unique Π^1_2-RFN とする．このとき次が成り立つ．

$$\text{unique } \Pi^1_0\text{-}\mathsf{DC}_0 \equiv \text{unique } \Pi^1_2\text{-}\mathsf{RFN}_0$$

さて，もう一種の問として挙げた超算術的解析と $\mathsf{RFN}^{-1}(\mathsf{ATR}_0)$ の差異についてだが，残念ながら自明なことしか分かっていない．たとえば Σ^1_1-$\mathsf{AC}_0 + \mathrm{Con}(\mathsf{ATR}_0)$ は両者の対称差に属するが，非自明な理論でそのような例になるものはまだ見つけられていない．

参考文献

[BGS23] James S. Barnes, Jun Le Goh, and Richard A. Shore. Halin's infinite ray theorems: Complexity and reverse mathematics. *Journal of Mathematical Logic*, 2023.

[Con12] Chris J. Conidis. Comparing theorems of hyperarithmetic analysis with the arithmetic bolzano-weierstrass. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 364, No. 9, pp. 4465–4494, 2012.

[Fri67] Harvey M. Friedman. *Subsystems of set theory and analysis*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Techonlogy, 1967.

[Fri75] Harvey M. Friedman. Some systems of second order arithmetic and their use. *Proc. of the I. C. M., Vancouver 1974*, Vol. 1, pp. 235–242, 1975.

[Goh23] Jun Le Goh. The strength of an axiom of finite choice for branches in trees. *The Journal of Symbolic Logic*, p. 1–20, 2023.

[Mic21] Bärtschi Michael. *ATR_0 and Some Related Theories*. PhD thesis, University of Bern, 2021.

[Mon06] Antonio Montalbán. Indecomposable linear orderings and hyperarithmetic analysis. *Journal of Mathematical Logic*, Vol. 6, , 2006.

[Mon08] Antonio Montalbán. On the Π^1_1-separation principle. *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 54, No. 6, pp. 563–578, 2008.

[Nee08] Itay Neeman. The strength of jullien's indecomposability theorem. *Journal of Mathematical Logic*, Vol. 8, , 2008.

[Nee11] Itay Neeman. Necessary use of Σ^1_1 induction in a reversal. Vol. 76, pp. 561 – 574. Association for Symbolic Logic, 2011.

[Rüe02] Christian Rüede. Transfinite dependent choice and ω-model reflection. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 67, No. 3, pp. 1153–1168, 2002.

[Sim09] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2 edition, 2009.

[Ste78] John R. Steel. Forcing with tagged trees. *Annals of Mathematical Logic*, Vol. 15, No. 1, pp. 55–74, 1978.

[Suz24] Yudai Suzuki. On the axiom of weak choice. https://drive.google.com/file/d/1C1TYyRXAO9Cdye7DyCS4bS-s_i086rVp/view, 2024. 2024 年 5 月 3 日閲覧.

[Wes77] R. A. Van Wesep. *Subsystems of second-order arithmetic and descriptive set theory under the axiom of determinateness*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1977.

[鈴木 23] 鈴木悠大. 二階算術における選択公理. https://drive.google.com/file/d/1LhL_u_0dFZI8Ps4EuYr0JblXy4c67JXz/view, 2023. 2024 年 1 月 5 日閲覧.