様相論理の入れ子シークエント計算について

東京工業大学 情報理工学院　鹿島 亮
Ryo Kashima
Department of Mathematical and Computing Science,
Tokyo Institute of Technology

Brünnler [1] は **K** に **T**, **B**, **D**, **4**, **5** を任意に組み合わせた 15 個の様相論理に対してカット無し入れ子シークエント計算を与えている．これらの体系の利点は論理式に直接翻訳可能な入れ子シークエントという定式化を行っていることである．Negri [2] は上述の論理を包含した無限個の様相論理に対するカット無しラベル付きシークエント計算を与えている．Negti の体系の利点は，無限個の様相論理に対して統一的な定式化になってることと，構文論的なカット除去が簡潔にできることである．本稿では両者の利点を持つ体系を与える．それは Negri の体系より適用範囲は狭いが，Brünnler の 15 個を包含する無限個の論理に対応し，構文論的なカット除去は簡潔にでき，入れ子シークエントを論理式に翻訳することでヒルベルト流の証明体系も統一的に得られる，という特長を持つ．

1　Brünnler の入れ子シークエント計算

本稿で論理式といったら様相命題論理式の否定標準形のこととする．すなわち次で定義される．

> 命題変数（$p, q, \ldots$ で表す，可算無限個ある）は論理式である．p が命題変数ならば $\neg p$ は論理式である．φ, ψ が論理式ならば $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \Box\varphi, \Diamond\psi$ は論理式である．

論理式を φ, ψ などで表す．

論理式の否定 $\neg\bullet$ は以下のような省略形として再帰的に定める．

$$\neg p = \neg p.\ \neg\neg p = p.\ \neg(\varphi\wedge\psi) = \neg\varphi\vee\neg\psi.\ \neg(\varphi\vee\psi) = \neg\varphi\wedge\neg\psi.\ \neg\Box\varphi = \Diamond\neg\varphi.\ \neg\Diamond\varphi = \Box\neg\varphi.$$

角括弧を用いて**入れ子片側シークエント**を次のように再帰的に定義する．

> Γ が論理式の有限多重集合で $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ が入れ子片側シークエントならば（ただし $n \geq 0$），多重集合：
> $$\Gamma, [\mathcal{S}_1], [\mathcal{S}_2], \ldots, [\mathcal{S}_n]$$
> は入れ子片側シークエントである．

例 1.1.

$$\varphi_1, \varphi_2, [[\varphi_3, \varphi_4, [\varphi_5]], [\ ]], [\varphi_6]$$

は入れ子片側シークエントである．なおこれは多重集合なので，要素の順番入れ替えは同一視する．たとえば次のように書いても同じである．

$$[[\ ], [\varphi_4, [\varphi_5], \varphi_3]], \varphi_2, [\varphi_6], \varphi_1$$

なお角括弧は論理記号のような正式な記号であり，勝手に消してはいけない．たとえば中身が空の [ ] を消した次は上記と同じではない．

$$[[\varphi_4, [\varphi_5], \varphi_3]], \varphi_2, [\varphi_6], \varphi_1$$

これ以降，断らない限り $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ などは入れ子片側シークエントを表す．

複数のプレースホルダー $\bullet_1, \bullet_2, \ldots, \bullet_n$ を持つ入れ子片側シークエント $\mathcal{T}$ に対して，各 $\bullet_i$ を $\mathcal{S}_i$ に置き換えて得られる入れ子片側シークエントを

$$\mathcal{T}\{\mathcal{S}_1\}_1\{\mathcal{S}_2\}_2 \cdots \{\mathcal{S}_n\}_n$$

と書く．ただし波括弧の添え字は省略することがある．$\bullet_i$ が $\mathcal{T}$ 中で n 重の角括弧の内側にあるとき，$\{\}_i$ の深さは n である，と言う．

例 1.2.

$$\mathcal{T} = \varphi, \bullet_1, [[\varphi', \bullet_2], [\varphi'']]$$

ならば

$$\mathcal{T}\{[\,]\}_1\{\psi, [\psi']\}_2 = \varphi, [\,], [[\varphi', \psi, [\psi']], [\varphi'']]$$

であり，$\{\}_1$ の深さは 0, $\{\}_2$ の深さは 2 である．

入れ子片側シークエントは各ノードに論理式の多重集合が張り付いた木を表している．また，入れ子片側シークエントは論理式に翻訳することができる．入れ子片側シークエント $\mathcal{T}$ に対して，それが表す木 $\mathsf{tree}(\mathcal{T})$ と論理式への翻訳 $\mathsf{fla}(\mathcal{T})$ を次で再帰的に定義する．

$$\mathsf{tree}(\Gamma, [\mathcal{T}_1], [\mathcal{T}_2], \ldots, [\mathcal{T}_\mathsf{n}]) = \begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Gamma \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[drr] & & \\ \mathsf{tree}(\mathcal{T}_1) & \mathsf{tree}(\mathcal{T}_2) & & \ldots & \mathsf{tree}(\mathcal{T}_\mathsf{n}) \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{fla}(\Gamma, [\mathcal{T}_1], [\mathcal{T}_2], \ldots, [\mathcal{T}_\mathsf{n}]) = \bigvee \Gamma \vee \Box\mathsf{fla}(\mathcal{T}_1) \vee \Box\mathsf{fla}(\mathcal{T}_2) \vee \cdots \vee \Box\mathsf{fla}(\mathcal{T}_\mathsf{n}).$$

本節および次節に登場するシークエント計算で Γ が証明できることは，論理式 $\mathsf{fla}(\Gamma)$ がその論理の定理であることと同等になる．するとシークエントで書かれた公理と規則をすべて $\mathsf{fla}(\cdot)$ で翻訳することで論理式ベースの新しい証明体系が得られるし（次節で具体例に示す），既存のヒルベルト流証明体系の完全性もこれを経由して示すことができる．このようにシークエントが論理式に直接翻訳できることが入れ子シークエント計算の利点である（第 6 節で登場する Negri の体系は一般にシークエントを論理式に翻訳することができない）．

これから Brünnler [1] の体系を説明する．各定理の証明は Brünnler [1] を参照されたい．

まず，以下の公理と 4 つの規則から成る体系を $\mathbf{K}$ と呼ぶ．これが基本の体系である．

$$\mathcal{T}\{p, \neg p\} \qquad \frac{\mathcal{T}\{\varphi\} \quad \mathcal{T}\{\psi\}}{\mathcal{T}\{\varphi\wedge\psi\}}\ (\wedge) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\varphi, \psi\}}{\mathcal{T}\{\varphi\vee\psi\}}\ (\vee) \qquad \frac{\mathcal{T}\{[\varphi]\}}{\mathcal{T}\{\Box\varphi\}}\ (\Box) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi, [\varphi, \mathcal{S}]\}}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi, [\mathcal{S}]\}}\ (\Diamond)$$

Γ が $\mathbf{K}$ で証明できることを $\mathbf{K} \vdash \Gamma$ と書く．

例 1.3. $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p\wedge q)\vee\Diamond\neg p\vee\Box\neg q$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, [p, \neg p, \neg q] \quad \Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, [q, \neg p, \neg q]}{\Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, [p\wedge q, \neg p, \neg q]}\ (\wedge)}{\Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, [\neg p, \neg q]}\ (\Diamond)}{\Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, [\neg q]}\ (\Diamond)}{\Diamond(p\wedge q), \Diamond\neg p, \Box\neg q}\ (\Box)}{\overline{\Diamond(p\wedge q)\vee\Diamond\neg p\vee\Box\neg q}}\ (\vee)$$

以下の規則をオプションで考える．

$$\frac{\mathcal{T}\{\}}{\mathcal{T}\{\varphi\}}\ (\text{weakening}) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\varphi, \varphi\}}{\mathcal{T}\{\varphi\}}\ (\text{contraction}) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\varphi\} \quad \mathcal{T}\{\neg\varphi\}}{\mathcal{T}\{\}}\ (\text{cut})$$

これらは許容可能である，すなわち，前提が証明可能ならば結論も証明可能である．(cut) が許容可能である，という事実がカット除去定理である．

さらに以下の 5 つの規則を組み合わせて **K** に追加する．

$$\frac{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi,\varphi\}}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}}\ (\mathbf{T}) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\varphi,[\Diamond\varphi,\mathcal{S}]\}}{\mathcal{T}\{[\Diamond\varphi,\mathcal{S}]\}}\ (\mathbf{B}) \qquad \frac{\mathcal{T}\{[\varphi]\}}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}}\ (\mathbf{D})$$

$$\frac{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi,[\Diamond\varphi,\mathcal{S}]\}}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi,[\mathcal{S}]\}}\ (\mathbf{4}) \qquad \frac{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}_1\{\Diamond\varphi\}_2}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}_1\{\}_2}\ (\mathbf{5})\ \text{ただし } \{\}_1 \text{ の深さは 1 以上}$$

追加規則の名前を **K** に追加列挙して体系の名前とする．たとえば **KT4** は **K** に **T** と **4** を追加した体系である．クリプキモデルの遷移関係を R としたとき，上記の規則は以下のような性質に対応している．今後は規則の名前と遷移関係の性質を同一視する．

T	xRx	reflexive
B	$xRy \Rightarrow yRx$	symmetric
D	$\exists y(xRy)$	serial
4	$xRy\ \&\ yRz \Rightarrow xRz$	transitive
5	$xRy\ \&\ xRz \Rightarrow yRz$	euclidean

追加規則が 5 つなので追加の組み合わせは（「追加しない」も含めて）32 通りであるが，モデルの遷移関係に 5 つの性質を条件として追加する場合，いくつかの組み合わせは条件として同一になる（例：symmetric + transitive = symmetric + euclidean）．そのような同一条件の組み合わせからは適切な組み合わせを選んで，Brünnler [1] では 15 個の体系を定義している．そしてそれらが，対応する条件をクリプキモデルに課した様相論理に対して健全かつ健全であることを示している．たとえば **T**,**4** を追加すれば様相論理 **S4** になり，**T**,**4**,**5** を追加すれば様相論理 **S5** になる．

またカット除去定理を意味論的と構文論的の両方のやり方で示している．しかし，**4** や **5** を含んだ体系に対しては，特に構文論的なカット除去の議論が煩雑になっている．具体的には，通常のよく知られたカット除去の議論だけでは対応できずに，Y-cut と称する以下のような規則を考えて，これらを除去するという複雑な議論が必要になっている．

規則 **4** がある場合

$$\frac{\mathcal{T}\{\{\Box\varphi\},\mathcal{S}\{\}_1\{\}_2\ldots\{\}_n\} \quad \mathcal{T}\{\{\Diamond\neg\varphi\},\mathcal{S}\{\Diamond\neg\varphi\}_1\{\Diamond\neg\varphi\}_2\ldots\{\Diamond\neg\varphi\}_n\}}{\mathcal{T}\{\{\},\mathcal{S}\{\}_1\{\}_2\ldots\{\}_n\}}$$

規則 **5** がある場合

$$\frac{\mathcal{T}\{\Box\varphi\}_1\{\}_2\ldots\{\}_n \quad \mathcal{T}\{\Diamond\neg\varphi\}_1\{\Diamond\neg\varphi\}_2\ldots\{\Diamond\neg\varphi\}_n}{\mathcal{T}\{\}_1\{\}_2\ldots\{\}_n}\ \text{ただし } \{\}_1 \text{ の深さは 1 以上}$$

このような煩雑な議論が必要な原因は，**4**, **5** 規則は結論から前提にさかのぼっても論理式が短くならないからである．

次節ではこの欠点を解消し，さらに多くの（無限個の）様相論理に対して統一的に体系を与える．

2 新しい体系

遷移関係 R の性質 reflexive, symmetric, transitive, euclidean はすべて次の形式に当てはまる（ただし $n \geq 0$）．

$$x_1Ry_1\ \&\ x_2Ry_2\ \&\cdots\&\ x_nRy_n \ \Rightarrow\ xRy$$

この形で書ける性質を **Horn clause property** と呼ぶ．なお，一般に Horn clause というと右辺が空（すなわち xRy が $\perp$）である形を含むが，ここではそれは含まない．Horn clause property 全部の集合を **HORN** と書く．**HORN** の要素は先述の reflexive, symmetric, transitive, euclidean の他にたとえば次のようなものがある．

$aRx\ \&\ xRy \Rightarrow\ yRx$	shift-symmetric
$x_1Rx_2\ \&\cdots\ \&\ x_{n+1}Rx_{n+2}\ \Rightarrow x_1Rx_{n+2}$	n-transitive

一方 serial は **HORN** の要素でない．その他に **HORN** の要素でない例としては次がある．

$$\begin{array}{lll} xRy \mathbin{\&} xRz & \Rightarrow\ yRz \text{ or } zRy & \text{connected} \\ xRy \mathbin{\&} xRz & \Rightarrow\ \exists u(yRu \mathbin{\&} zRu) & \text{directed} \end{array}$$

定義 2.1. $X \subseteq \mathbf{HORN}$ とする．規則 $(\Diamond_X)$ を次で定義する．

$$\frac{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}_1\{\varphi\}_2}{\mathcal{T}\{\Diamond\varphi\}_1\{\}_2}\ (\Diamond_X)$$

適用条件：木構造 $\mathcal{T}$ の親子関係の X 閉包で，$\{\}_1$ を含むノードから $\{\}_2$ を含むノードへ遷移できる

例 2.2. $X = \emptyset$ の場合は $(\Diamond_X)$ 規則は $\mathbf{K}$ の $(\Diamond)$ 規則に等しい．

例 2.3. $X = \{\text{reflexive}, \text{transitive}\}$ の場合は，$(\Diamond_X)$ 規則の適用条件は「$\{\}_1$ を含むノードは $\{\}_2$ を含むノードの先祖であるか，同じノードである」となる．これは

$$\frac{\mathcal{S}\{\Diamond\varphi, \mathcal{U}\{\varphi\}\}}{\mathcal{S}\{\Diamond\varphi, \mathcal{U}\{\}\}}\ (\Diamond_{\{\text{reflexive},\text{transitive}\}})$$

と書いてもよい（たとえば $\mathcal{U}\{\}$ における $\{\}$ の深さが 0,1,2 の場合に，それぞれ「$\{\}_1$ を含むノードは $\{\}_2$ を含むノードと同じ」「$\{\}_1$ を含むノードは $\{\}_2$ を含むノードの親」「$\{\}_1$ を含むノードは $\{\}_2$ を含むノードの親の親」となる）．

ところで性質 serial は Horn clause property でないが，これに対応する規則を次で定義する．

定義 2.4. 規則 (serial) を次で定義する．

$$\frac{\mathcal{T}\{[\,]\}}{\mathcal{T}\{\}}\ (\text{serial})$$

前節の基本体系 $\mathbf{K}$ を基にして，任意の $X \subseteq \mathbf{HORN} \cup \{\text{serial}\}$ に対して体系 $\mathcal{C}_X$ を次で定義する．

定義 2.5. $X \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{C}_X = \mathbf{K} + (\Diamond_X)$．$X = X' \cup \{\text{serial}\}$ かつ $X' \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{C}_X = \mathbf{K} + (\Diamond_{X'}) + (\text{serial})$.

本稿では $\mathcal{C}_X$ に関して次のことを示す．

(1) $\mathcal{C}_X$ からヒルベルト流体系が簡単に作れること（本節のこの後）．

(2) 構文論的カット除去がよく知られた 1 階述語古典論理のカット除去とまったく同様な議論でできること（第 4 節）．

(3) $\mathcal{C}_X$ がクリプキモデルの遷移関係 X で特徴付けられる論理に対して健全かつ完全であること（第 5 節）

(4) $\mathcal{C}_X$ が Negri[2] の体系と同等であること（第 6 節）．

以下では上記 (1) を示す．まず単純な方法は，$\mathcal{C}_X$ の公理と推論規則をすべて $\mathsf{fla}(\cdot)$ で翻訳することである．こうすれば論理式ベースの証明体系にはなるが，この方法で作る体系は推論規則ばかりになってヒルベルト流体系とは言い難い．以下では，X に対応する公理を通常の $\mathbf{K}$ や $\mathbf{KD}$ $(= \mathbf{K} + \Diamond\top)$ のヒルベルト流体系に加えるという方法でヒルベルト流体系を作る．

$X \subseteq \mathbf{HORN}$ に対して論理式集合 $\mathbf{Axiom}_X$ を次で定義する．

$$\mathbf{Axiom}_X = \{\mathsf{fla}(\mathcal{T}) \to \mathsf{fla}(\mathcal{S}) \mid \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{S}} \text{ が } (\Diamond_X) \text{ 規則に当てはまる．}\}$$

（否定標準形を使う場合は $\to$ は適切に読み替える．）そして $\mathbf{K}$ のヒルベルト流体系を $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$ と呼び，任意の $X \subseteq \mathbf{HORN} \cup \{\text{serial}\}$ に対してヒルベルト流体系 $\mathcal{H}_X$ を次で定義する．

定義 2.6. $X \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{H}_X$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$ に公理として $\mathbf{Axiom}_X$ を加えたもの．$X = X' \cup \{\text{serial}\}$ かつ $X' \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{H}_X$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$ に公理として $\mathbf{Axiom}_{X'}$ および $\Diamond\top$ を加えたもの．

定理 2.7. $\mathcal{H}_X$ は性質 X のクリプキモデルに対して健全かつ完全である．

この定理の証明は第 5 節で与える．

この節の最後に，1 階述語古典論理のカット除去を復習しておく．文献 [3] にある体系 **GS3** は否定標準形を用いた 1 階述語古典論理の片側シークエント計算であり，本稿の様相論理の体系と似たような公理と規則から成る（$\Box, \Diamond$ と $\forall, \exists$ が対応している）．そして次の補題が成り立つ．

補題 2.8. $\mathbf{GS3} \vdash \Gamma$ ならば，この証明の長さは変えずに $\mathbf{GS3} \vdash \Gamma[y := t]$ が得られる（$\Gamma[y := t]$ はシークエント Γ 中の変数 y の自由出現を項 t に置き換えたもの）．

これを用いて帰納法によるカット除去の証明図変形の核心部分が次のように得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma, \varphi(y)\end{matrix}}{\Gamma, \forall x \varphi(x)}(\forall) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma, \neg\varphi(t)\end{matrix}}{\Gamma, \exists x \neg\varphi(x)}(\exists)}{\Gamma}(\mathrm{cut}) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \text{補題 2.8}\\ \Gamma, \varphi(t)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Gamma, \neg\varphi(t)\end{matrix}}{\Gamma}\ \text{帰納法の仮定}$$

これと同様に $\mathcal{C}_X$ ではカット除去の証明図変形の核心部分が次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \mathcal{T}\{[\varphi]\}_1\{\}_2\end{matrix}}{\mathcal{T}\{\Box\varphi\}_1\{\}_2}(\Box) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \mathcal{T}\{\}_1\{\neg\varphi\}_2\end{matrix}}{\mathcal{T}\{\Diamond\neg\varphi\}_1\{\}_2}(\Diamond_X)^{\dagger}}{\mathcal{T}\{\}_1\{\}_2}(\mathrm{cut}) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \text{補題 2.9}\\ \mathcal{T}\{\}_1\{\varphi\}_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \mathcal{T}\{\}_1\{\neg\varphi\}_2\end{matrix}}{\mathcal{T}\{\}_1\{\}_2}\ \text{帰納法の仮定}$$

なお $\dagger$ の部分では「contraction なし」の形の規則にしているが，これは本質だけを説明するために簡素化したものである．そして上記の変形に中で使用されており古典論理の場合の補題 2.8 に対応するのが，以下の補題である．

補題 2.9. $\mathcal{C}_X \vdash \mathcal{T}\{[\mathcal{S}]\}_1\{\}_2$ ならば，この証明の長さは変えずに $\mathcal{C}_X \vdash \mathcal{T}\{\}_1\{\mathcal{S}\}_2$ が得られる．

この補題の証明，およびそれを使ったカット除去が第 4 節で示される．

3 ラベル付きシークエント計算

前節の最後で述べたカット除去の議論を正確に行うために，本節では入れ子シークエント計算をラベル付きシークエント計算に変換する．この変換によって，本稿の $\mathcal{C}_X$ と Negri [2] の体系との関係も論じることができる（第 6 節参照）．

a, b などを**ラベル**と呼ぶ．ラベルは可算無限個ある．その中に $\circledcirc$ と表記される特別なラベルがある（これは木の根に用いる）．a, b がラベルのとき，aRb という表現を**関係記述**と呼び，関係記述の有限**集合**（多重集合ではない）を $\mathbb{G}$ や $\mathbb{T}$ などで表す．特に $\mathbb{T}$ は R の構造が $\circledcirc$ を根をする木になっているものを表す（aRb のとき a は b の親，b は a の子である）．正確には，$\mathbb{T}$ 中では $\circledcirc$ 以外のラベルはそれぞれ親をちょうど一つ持っており，親方向に進んでいくといつかは必ず $\circledcirc$ まで到達し，$\circledcirc$ は親を持たない，ということである．

a がラベル，φ が論理式のとき $a : \varphi$ という表現を**ラベル付き論理式**と呼ぶ．ラベル付き論理式の有限**多重**集合を Γ, Δ などで表す．

定義 3.1. $\mathbb{T}$ が木であって，Γ 中の $\circledcirc$ 以外のラベルはすべて $\mathbb{T}$ に現れているとき，$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ を**ラベル付きシークエント**，あるいは単に**シークエント**と呼ぶ．

なおシークエントの左辺も通常どおり次のような記法を用いる．たとえば $\mathbb{T}, aRb, aRc, \mathbb{T}' \Rightarrow \Gamma$ は $(\mathbb{T} \cup \{aRb, aRc\} \cup \mathbb{T}') \Rightarrow \Gamma$ のことである．

ラベル付きシークエント $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が与えられたら，$\mathbb{T}$ を入れ子シークエントの木構造と思い，Γ 中のラベル付き論理式 $a : \varphi$ を「ノード a に φ がある」と読むことで，これは入れ子シークエントである，と考えることできる．逆に入れ子シークエントが与えられたら，適切にラベルを用いることでそれをラベル付きシークエントで書くことができる．そのように対応するラベル付きシークエントと入れ子シークエントのことを identity pair と呼ぶ．

例 3.2. $\alpha, [\beta, [\gamma_1, \gamma_2]], [\ ]$ と $\circledcirc Rb, bRc, \circledcirc Rd \Rightarrow \circledcirc{:}\alpha, b{:}\beta, c{:}\gamma_1, c{:}\gamma_2$ は identity pair である．

各ラベル付きシークエントには，それと identity pair を成す入れ子シークエントがただ一つ存在する．各入れ子シークエントには，それと identity pair を成すラベル付きシークエントが一つ以上存在する（入れ子シークエントが根だけの木の場合はその identity pair はただひとつであり，根以外のノードがある場合はそれらにどんなラベルを付けるかで無限の可能性がある）．

第 1 節の基本体系 $\mathbf{K}$ をラベル付きに書き直したものが次である．この体系を $\mathbf{K}^{\mathsf{labelled}}$ と呼ぶ．

公理：

$$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : p,\ x : \neg p \qquad \text{（ただしこれがラベル付きシークエントであるとき）}$$

推論規則：

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \varphi \quad \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \psi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \varphi,\ x : \psi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \varphi \vee \psi}\ (\vee)$$

$$\frac{xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ y : \varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \Box\varphi}\ (\Box) \quad \text{ただし } y \text{ は結論の右辺にも左辺にも現れないとき}$$

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \Diamond\varphi,\ y : \varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \Diamond\varphi}\ (\Diamond) \quad \text{ただし } xRy \in \mathbb{T} \text{ のとき}$$

次に，第 2 節で導入された $(\Diamond_X)$ 規則をラベル付きシークエントで書くために,「木構造の親子関係の X 閉包」を正確に記述する方法を以下で与える．

$X \subseteq \mathbf{HORN}$ とする．$\mathbb{T} \vdash_X aRb$ ということを，次の公理と推論規則で定義する

公理：$\mathbb{T} \vdash_X aRb$ ただし $aRb \in \mathbb{T}$ のとき．

規則 $$\frac{\mathbb{T} \vdash_X a_1Rb_1 \quad \mathbb{T} \vdash_X a_2Rb_2 \quad \cdots \quad \mathbb{T} \vdash_X a_nRb_n}{\mathbb{T} \vdash_X aRb}$$

ただし $a_1Rb_1\ \&\ a_2Rb_2\ \& \cdots \&\ a_nRa_n\ \Rightarrow\ aRb$ が X 中のある性質の代入例であるとき．

たとえば $X = \{\text{reflexive}, \text{transitive}\}$ の場合に $\mathbb{T} \vdash_X aRb$ ということは,「aRb が $\mathbb{T}$ の反射推移閉包で成り立つ」に等しい．なお reflexive に対応する規則では $\mathbb{T}$ 中に存在しないラベル a に対しても $\mathbb{T} \vdash_X aRa$ を導けることになるが，それは構わない

これを用いて規則 $(\Diamond_X)$ を次で定義する．

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \Diamond\varphi,\ y : \varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : \Diamond\varphi}\ (\Diamond_X) \quad \text{ただし } \mathbb{T} \vdash_X xRy \text{ が成り立つとき}$$

この規則は単なる $(\Diamond)$ 規則を包含している．

さらに規則 (serial) のラベル付き版を次で定義する．

$$\frac{xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{serial}) \quad \text{ただし } y \text{ は結論の右辺にも左辺にも現れないとき}$$

以上のすべての規則がラベル付きシークエント $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ の条件「$\mathbb{T}$ は $\circledcirc$ を根とする木であり，Γ 中のすべてのラベルは $\mathbb{T}$ に現れるまたは $\circledcirc$ である」を保存することに注意されたい．

以上の準備の下で，任意の $X \subseteq \mathbf{HORN} \cup \{\text{serial}\}$ に対して体系 $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ を次で定義する．

定義 3.3. $X \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} = \mathbf{K}^{\mathsf{labelled}} + (\Diamond_X)$．$X = X' \cup \{\text{serial}\}$ かつ $X' \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} = \mathbf{K}^{\mathsf{labelled}} + (\Diamond_{X'}) + (\text{serial})$.

前節の体系 $\mathcal{C}_X$ と上記の $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ が実質同じであることは明らかだろう．正確には，次が成り立つ．

定理 3.4. $\mathcal{C}_X$ における証明図中のすべての入れ子シークエントをそれぞれ identity pair を成すラベル付きシークエントに適切にラベルを選んで置き換えれば $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ の証明図になる．逆に，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ における証明図中のすべてのラベル付きシークエントをそれぞれ identity pair を成す入れ子シークエントに置き換えれば $\mathcal{C}_X$ の証明図になる．

4　構文論的カット除去

この節では構文論的な議論によって $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ のカット除去を示す．正確には $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ にはカット規則がないので，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ で下記のカット規則が許容可能（規則の前提が証明可能なら結論も証明可能）であることを示す．

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi \quad \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\neg\varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}\ (\mathrm{cut})$$

その議論の中で，カットだけでなく以下の規則の許容可能性も用いる．

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi}\ (\text{weakening})\ \text{ただし結論がラベル付きシークエントのとき}$$

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{label weakening})\ \text{ただし結論がラベル付きシークエントで } y \text{ が } \mathbb{T} \text{ に現れないとき}$$

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi,\ x:\varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi}\ (\text{contraction})$$

なおシークエントの左辺は関係記述の集合であって多重集合ではないなので，左辺の contraction は意味がない（左辺を集合にするか多重集合にするかは本質に関わらない問題である）．

以下の議論のほとんどは証明の長さに関する帰納法で示される．それを記述するために，長さ n 以下の証明図での証明可能性を $\vdash_n$ で表す．帰納法の仮定を I.H. と表記する．

ここで，正確な議論を行うために避けては通れない「ラベルの名前替え」を正確に用意しておく．ラベル付き論理式のラベル a を b に替え，関係記述の中のラベル a を b に替える操作を $[a{:=}b]$ と書く．ただし $a \neq \circledcirc$ とする（根のラベルは常に $\circledcirc$ である必要がある）．

例 4.1. $(\circledcirc Ra, aRb, \circledcirc Rc \Rightarrow \circledcirc{:}\varphi, a{:}\psi, b{:}\pi)[a{:=}b]$ は $\circledcirc Rb, bRb, \circledcirc Rc \Rightarrow \circledcirc{:}\varphi, b{:}\psi, b{:}\pi$ である．なお，この例のように木のラベルを不用意に替えると木でなくなることがある．しかし b が $\mathbb{T}$ に現れない場合は，$\mathbb{T}$ が木ならば $\mathbb{T}[a{:=}b]$ も木である．

補題 4.2 (ラベルの名前替え)**. (1)** $\mathbb{T} \vdash_X xRy$ ならば $\mathbb{T}[a{:=}b] \vdash_X (xRy)[a{:=}b]$ である．
(2) b は $\mathbb{T}$ に現れないラベルとする．$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ ならば $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T}[a{:=}b] \Rightarrow \Gamma[a{:=}b]$ である．

Proof. 1,2 とも n に関する帰納法による．2 で

$$\frac{xRb,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma',\ b:\varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma',\ x:\Box\varphi}\ (\Box) \qquad \frac{xRb,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{serial})$$

の場合は，最初に帰納法の仮定で b を他に現れない b' に替えておいてから，再び帰納法の仮定を用いて a を b に替えることに注意する．　*Q.E.D.*

次に，木（関係記述の有限集合）に関する必要な性質を示しておく．a, b が木 $\mathbb{T}$ 中の相異なるノードで，a は b の先祖でないとする（したがって $a \neq \circledcirc$ である）．a の親を a_0 とする（すなわち $a_0Ra \in \mathbb{T}$）．このとき $\mathbb{T}[a{\mapsto}b]$ を次で定義する．

$$\mathbb{T}[a{\mapsto}b] = \begin{cases} \mathbb{T}[a{:=}b] & a_0Rb \in \mathbb{T} \text{ のとき} \\ \mathbb{T}[a{:=}b] \setminus \{a_0Rb\} & a_0Rb \notin \mathbb{T} \text{ のとき} \end{cases}$$

$\mathbb{T}[a{\mapsto}b]$ は木であり，そのラベルは $\mathbb{T}$ のラベル全体から a を除いたものである（図 1, 2 参照）．

補題 4.3. a, a_0, b, x, y は木 $\mathbb{T}$ 中のラベルで，次が成り立っているとする．

　$a \neq b$. a は b の先祖でない．a_0 は a の親である．$\mathbb{T}[a{\mapsto}b] \vdash_X a_0Rb$.

このとき，もし $\mathbb{T} \vdash_X xRy$ ならば，$\mathbb{T}[a{\mapsto}b] \vdash_X (xRy)[a{:=}b]$ である．

Proof. $\mathbb{T} \vdash_X xRy$ の証明図全体の a を b に置き換えると $\mathbb{T}[a:=b] \vdash_X xRy[a:=b]$ の証明図を得る（補題 4.2(1)）．$\mathbb{T}[a \mapsto b] = \mathbb{T}[a:=b]$ の場合はこれが求めるものである．そうでない場合は $\mathbb{T}[a \mapsto b] = \mathbb{T}[a:=b] \setminus \{a_0Rb\}$ である．そこで先ほど得られた証明図の中で公理 $\mathbb{T}[a{:=}b] \vdash_X a_0Rb$ を使用している部分を補題の仮定である $\mathbb{T}[a{\mapsto}b] \vdash_X a_0Rb$ の証明図に置き換えれば，求める $\mathbb{T}[a{\mapsto}b] \vdash_X (xRy)[a{:=}b]$ の証明図が得られる．　*Q.E.D.*

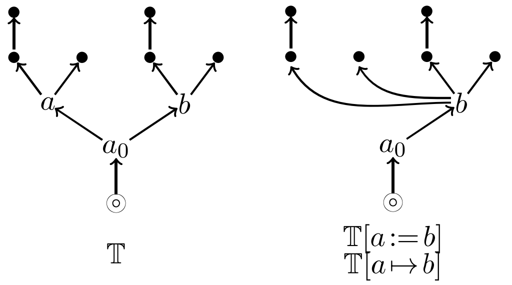

図 1: $\mathbb{T}[a\!:=\!b]$ と $\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b]$ が同じになる例

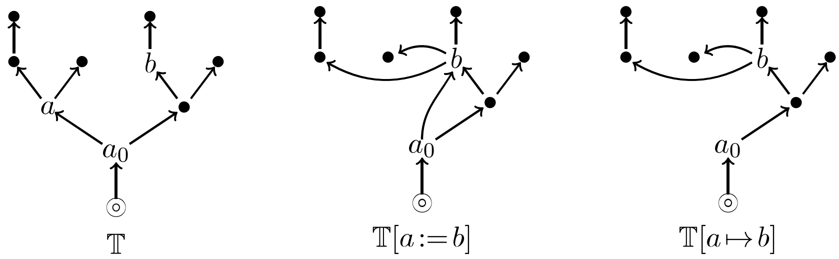

図 2: $\mathbb{T}[a\!:=\!b]$ と $\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b]$ が異なる例

次の補題が重要である．これは第 2 節に書いた補題 2.9 をラベル付きシークエントに変換したものである．

補題 4.4 (Key Lemma)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ と仮定する．さらに a, a_0, b は $\mathbb{T}$ 中のラベルで，次が成り立っているとする．

$a \neq b$. a は b の先祖でない．a_0 は a の親である．$\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \vdash_X a_0 R b$.

すると $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Gamma[a\!:=\!b]$ である．

Proof. n に関する帰納法による．

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が公理のとき】$\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Gamma[a\!:=\!b]$ も公理になる．

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が $(\wedge)$ 規則や $(\vee)$ 規則の結論のとき】帰納法の仮定などから自明．

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が以下の規則の結論のとき】

$$\frac{xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ y : \varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ x : \Box\varphi}\ (\Box)$$

$x' = x[a := b]$ （つまり，もし $x = a$ ならば $x' = b$，もし $x \neq a$ ならば $x' = x$）とする．$x' \neq a$ となることに注意する．定義から $(\mathbb{T} \cup \{xRy\})[a \mapsto b] = \mathbb{T}[a \mapsto b] \cup \{x'Ry\}$ が言える．ところで補題の仮定 $\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \vdash_X a_0 R b$ は $\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b]$ を $\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \cup \{x'Ry\}$ に増やしても成り立つ．したがって次のように得られる．

$$\frac{\dfrac{\text{I.H.}}{x'Ry,\ \mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Delta[a\!:=\!b],\ y : \varphi}}{\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Delta[a\!:=\!b],\ x' : \Box\varphi}\ (\Box)$$

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が以下の規則の結論のとき】

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ x : \Diamond\varphi,\ y : \varphi}{\mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ x : \Diamond\varphi}\ (\Diamond_X)(\mathbb{T} \vdash_X xRy)$$

帰納法の仮定と補題 4.3 により次のように得られる．

$$\frac{\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Delta[a\!:=\!b],\ x' : \Diamond\varphi,\ y' : \varphi}{\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \Rightarrow \Delta[a\!:=\!b],\ x' : \Diamond\varphi}\ (\Diamond_X)(\mathbb{T}[a\!\mapsto\!b] \vdash_X x'Ry')$$

ただし x', y' はそれぞれ $x[a{:=}b]$, $y[a{:=}b]$ のことである．

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が以下の規則の結論のとき】

$$\dfrac{xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{serial})$$

($\Box$) 規則のときと同様． *Q.E.D.*

補題 4.5 ($\wedge$ 規則は証明図の大きさを増やさず逆行可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi\wedge\psi$ ならば，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi$ かつ $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\psi$ である．

Proof. n に関する帰納法による． *Q.E.D.*

補題 4.6 ($\vee$ 規則は証明図の大きさを増やさず逆行可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi\vee\psi$ ならば，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi,\ x:\psi$ である．

Proof. n に関する帰納法による． *Q.E.D.*

補題 4.7 ($\Box$ 規則は証明図の大きさを増やさず逆行可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\Box\varphi$ ならば，$\mathbb{T}$ に含まれない任意の y に対して $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n xRy, \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ y:\varphi$ である．

Proof. n に関する帰納法による．最後の規則が ($\Box$) や (serial) で y が使われている場合は，必要に応じてノードの名前替え（補題 4.2(2)）を使用する． *Q.E.D.*

補題 4.8 (weakening 規則は証明図の大きさを増やさず許容可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ で x が $\circledcirc$ または $\mathbb{T}$ 中のラベルならば，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi$ である．

Proof. n に関する帰納法による． *Q.E.D.*

補題 4.9 (label weakening 規則は証明図の大きさを増やさず許容可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ で $xRy, \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ がラベル付きシークエントで y が $\mathbb{T}$ に現れないならば，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n xRy, \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ である．

Proof. n に関する帰納法による．最後の規則が ($\Box$) や (serial) で y が使われている場合は，必要に応じてノードの名前替え（補題 4.2(2)）を使用する． *Q.E.D.*

補題 4.10 (contraction 規則は証明図の大きさを増やさず許容可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi,\ x:\varphi$ ならば $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi$ である．

Proof. n に関する帰納法による．

【$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi,\ x:\varphi$ が公理の場合】$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi$ も公理である．

【$\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\varphi,\ x:\varphi$ の証明の最後の規則で $x:\varphi$ が導かれた場合】以下の 4 つの形になる．

$$\dfrac{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\wedge\beta,\ x:\alpha \quad \vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\wedge\beta,\ x:\beta}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\wedge\beta,\ x:\alpha\wedge\beta}\ (\wedge)$$

$$\rightsquigarrow \dfrac{\dfrac{\dfrac{\wedge\ \text{を逆行}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha,\ x:\alpha}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha}\ \text{I.H.} \quad \dfrac{\dfrac{\wedge\ \text{を逆行}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T};\ \Gamma,\ x:\beta,\ x:\beta}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T};\ \Gamma,\ x:\beta}\ \text{I.H.}}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\wedge\beta}\ (\wedge)$$

$$\dfrac{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\vee\beta,\ x:\alpha,\ x:\beta}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\vee\beta,\ x:\alpha\vee\beta}\ (\vee) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vee\ \text{を逆行}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha,\ x:\beta,\ x:\alpha,\ x:\beta}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha,\ x:\beta,\ x:\beta}\ \text{I.H.}}{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha,\ x:\beta}\ \text{I.H.}}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\alpha\vee\beta}\ (\vee)$$

$$\dfrac{\vdash_{n-1} xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\Box\alpha,\ y:\alpha}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\Box\alpha,\ x:\Box\alpha}\ (\Box) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\ \text{を逆行（}y'\ \text{は新しいラベル）}}{\vdash_{n-1} xRy',\ xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ y':\alpha,\ y:\alpha}}{\vdash_{n-1} xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ y:\alpha,\ y:\alpha}\ (\dagger)}{\vdash_{n-1} xRy,\ \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ y:\alpha}\ \text{I.H.}}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\Box\alpha}\ (\Box)$$

ただし ($\dagger$) は補題 4.4 を $a_0 = x, a = y', b = y$ で適用したものである．

$$\dfrac{\vdash_{n-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x:\Diamond\alpha,\ x:\Diamond\alpha,\ y:\alpha}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Diamond\alpha,\ x:\Diamond\alpha}\,(\Diamond_X) \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow \Gamma,\ x:\Diamond\alpha,\ y:\alpha}\,\text{I.H.}}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Diamond\alpha}\,(\Diamond_X)$$

【その他の場合】帰納法の仮定から簡単に言える． *Q.E.D.*

定理 4.11 (cut は許容可能)**.** $\mathcal{C}_X^{\text{labelled}} \vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi$ かつ $\mathcal{C}_X^{\text{labelled}} \vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\varphi$ ならば，$\mathcal{C}_X^{\text{labelled}} \vdash \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma$.

Proof. φ の複雑さと $(m+n)$ に関する二重帰納法による．

【$\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi$ が公理の場合】$\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma$ だけで公理になってる場合は自明．$x:\varphi$ が公理を構成する $x:p$ のときは Γ の中に相方の $x:\neg p$ があるので，$\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\varphi$ から contraction で $\vdash\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma$ が得られる．$\varphi=\neg p$ のときも同様．

【$\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi$ が公理ではなく，証明の最後の規則が $x:\varphi$ に関わらない場合】最後の規則によって以下の 4 通りの書き換えになる．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P_1}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ x:\varphi} \quad \overset{\vdots\ P_2}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\beta,\ x:\varphi}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\wedge\beta,\ x:\varphi}\,(\wedge) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\wedge\beta,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\wedge\beta}\,(\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow\quad \dfrac{R_1 \quad R_2}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\wedge\beta}\,(\wedge)$$

ただし R_1 と R_2 はそれぞれ以下のもの：

$$R_1 \ =\ \dfrac{\overset{\vdots\ P_1}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q\text{ の }\wedge\text{ を逆行}}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha}\,\text{I.H.}$$

$$R_2 \ =\ \dfrac{\overset{\vdots\ P_2}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\beta,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q\text{ の }\wedge\text{ を逆行}}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\beta,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\beta}\,\text{I.H.}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ a:\beta,\ x:\varphi}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\vee\beta,\ x:\varphi}\,(\vee) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\vee\beta,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\vee\beta}\,(\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ a:\beta,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q\text{ の }\vee\text{ を逆行}}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ a:\beta,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha,\ a:\beta}\,\text{I.H.}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\alpha\vee\beta}\,(\vee)$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ b:\alpha,\ x:\varphi}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Box\alpha,\ x:\varphi}\,(\Box) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Box\alpha,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Box\alpha}\,(\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ b:\alpha,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q\text{ の }\Box\text{ を逆行}}{\vdash_n aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ b:\alpha,\ x:\neg\varphi}}{aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ b:\alpha}\,\text{I.H.}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Box\alpha}\,(\Box)$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1}\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ b:\alpha,\ x:\varphi}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ x:\varphi}\,(\Diamond_X) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Diamond\alpha}\,(\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} \mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ b:\alpha,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q \text{ に weakening}}{\vdash_n \mathbb{T} \Rightarrow \Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ b:\alpha,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow \Delta,\ a:\Diamond\alpha,\ b:\alpha}\ \text{I.H.}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Delta,\ a:\Diamond\alpha}\ (\Diamond_X)$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi}\ (\text{serial}) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\varphi}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ (\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi} \quad \dfrac{Q \text{ に label weakening}}{\vdash_n aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\varphi}}{aRb,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ \text{I.H.}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ (\text{serial})$$

【$\vdash_m\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\varphi$ の証明の最後の規則で $x:\varphi$ が導かれ，$\vdash_n\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\varphi$ の証明の最後の規則で $x:\neg\varphi$ が導かれた場合】次の 2 通りを考える．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P_1}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\alpha} \quad \overset{\vdots\ P_2}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\beta}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\alpha\wedge\beta}\ (\wedge) \quad \dfrac{\overset{\vdots\ Q}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\alpha,\ x:\neg\beta}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\alpha\vee\neg\beta}\ (\vee)}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ (\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow \dfrac{\overset{\vdots\ P_1}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\alpha} \quad \dfrac{\dfrac{P_2 \text{ に weakening}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\alpha,\ x:\beta} \quad \overset{\vdots\ Q}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\alpha,\ x:\neg\beta}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\neg\alpha}\ \text{I.H.}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ \text{I.H.}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ P}{\vdash_{m-1} xRy,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ y:\alpha}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Box\alpha}\ (\Box) \quad \dfrac{\overset{\vdots\ Q}{\vdash_{n-1} \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Diamond\neg\alpha,\ z:\neg\alpha}}{\vdash_n \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Diamond\neg\alpha}\ (\Diamond_X)}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ (\text{目標})$$

$$\rightsquigarrow \dfrac{\overset{\vdots\ R}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ z:\alpha} \quad \overset{\vdots\ S}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ z:\neg\alpha}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma}\ \text{I.H.}$$

ただし R は P に補題 4.4 を，$a_0=x, a=y, b=z$ で適用したものであり，S は以下のものである．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \text{ に weakening}}{\vdash_{m-1} xRy,\ \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ y:\alpha,\ z:\neg\alpha}}{\vdash_m \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Box\alpha,\ z:\neg\alpha}\ (\Box) \quad \overset{\vdots\ Q}{\vdash_{n-1} \mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ x:\Diamond\neg\alpha,\ z:\neg\alpha}}{\mathbb{T}\Rightarrow\Gamma,\ z:\neg\alpha}\ \text{I.H.}$$

対称性を考えれば以上ですべての場合が尽くされている． *Q.E.D.*

5 健全性，完全性

$\mathcal{C}^{\mathsf{labelled}}_X$ が性質 X のクリプキモデルに対して健全かつ完全であることは標準的な方法で示すことができる．本節ではその概要を書く．なおこの完全性を用いて cut の許容可能性を示すこと（意味論的カット除去）もできる．

クリプキモデル $M=\langle W_M, R_M, V_M\rangle$ は世界の集合 W_M, 到達可能関係 $R_M\subseteq W_M\times W_M$, 付値 $V_M: W_M\times\mathbf{PropVar}\to\{\mathsf{true},\mathsf{false}\}$ から成る（$\mathbf{PropVar}$ は命題変数全体の集合）．V_M は以下の定義で $V_M: W_M\times\mathbf{Formula}\to\{\mathsf{true},\mathsf{false}\}$ に拡張される（$\mathbf{Formula}$ は論理式全体の集合）．

$V_M(w,\neg\varphi)=\mathsf{true} \iff V_M(w,\varphi)=\mathsf{false}.$
$V_M(w,\varphi\wedge\psi)=\mathsf{true} \iff V_M(w,\varphi)=\mathsf{true}$ and $V_M(w,\psi)=\mathsf{true}.$
$V_M(w,\varphi\vee\psi)=\mathsf{true} \iff V_M(w,\varphi)=\mathsf{true}$ or $V_M(w,\psi)=\mathsf{true}.$

$V_M(w, \Box\varphi) = \mathsf{true} \iff (\forall w' \in W)(wR_M w' \implies V_M(w', \varphi) = \mathsf{true})$.
$V_M(w, \Diamond\varphi) = \mathsf{true} \iff (\exists w' \in W)(wR_M w' \text{ and } V_M(w', \varphi) = \mathsf{true})$.

さらに，写像 $f : \mathbf{Label} \to W_M$ を M 上の**ラベル付値**と呼ぶ（**Label** はラベル全体の集合）．そして，シークエント $a_1Rb_1, \ldots, a_nRb_n \Rightarrow x_1 : \varphi_1, \ldots, x_m : \varphi_m$ が M, f に対して真である，ということを次で定める．

$f(a_1)R_M f(b_1)$ かつ $\cdots$ かつ $f(a_n)R_M f(b_n)$ ならば
$V_M(f(x_1), \varphi_1) = \mathsf{true}$ または $\cdots$ または $V_M(f(x_m), \varphi_m) = \mathsf{true}$

定理 5.1 ($\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ の健全性・完全性)**.** 次の 3 条件は同値．(1) $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$. (2) X 内のすべての性質を満たす任意のクリプキモデル M と任意のラベル付値 f に対して，$\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ は真．(2') X 内のすべての性質を満たす任意のクリプキモデル M と任意の世界 w に対して $\mathsf{fla}(\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma)$ は真．ただし $\mathsf{fla}(\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma)$ はラベル付きシークエント $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ を入れ子シークエントに書き換えて，さらに論理式に書き換えたもの．

Proof. まず (2) と (2') が同値であることは定義に従って展開すれば言える．そこで以下では (1) と (2) だけ考える．

健全性 (1 $\Rightarrow$ 2) はすべての規則について確認すればよい．完全性 (2 $\Rightarrow$ 1) は対偶を示す．以下では $X' = X \setminus \{\text{serial}\}$ とする．$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \nvdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ のときに，これを証明不可能性を保ちながら適切に拡張していき（一般に無限ステップになる），その極限（拡張過程で得られるすべての和集合）$\mathbb{T}^+ \Rightarrow \Gamma^+$ が次を満たすようにできる．

$a : p \in \Gamma^+$ ならば $a : \neg p \notin \Gamma^+$.
$a : \varphi\wedge\psi \in \Gamma^+$ ならば $a : \varphi \in \Gamma^+$ または $a : \psi \in \Gamma^+$.
$a : \varphi\vee\psi \in \Gamma^+$ ならば $a : \varphi \in \Gamma^+$ かつ $a : \psi \in \Gamma^+$.
$a : \Box\varphi \in \Gamma^+$ ならば，$aRb \in \mathbb{T}^+$ なる b が存在して，$b : \varphi \in \Gamma^+$.
$a : \Diamond\varphi \in \Gamma^+$ かつ $\mathbb{T}^+ \vdash_{X'} aRb$ ならば，$b : \varphi \in \Gamma^+$.
serial $\in X$ の場合は，$\mathbb{T}^+$ が serial 性を持つ．

ただし contraction が許容可能であることを使っている．そしてモデル $M = \langle W_M, R_M, V_M \rangle$ とラベル付値 f を次で定める．

W_M は $\mathbb{T}^+$ 中のラベルの集合，ただし $\mathbb{T}^+$ が空の場合は $W_M = \{\circledcirc\}$．$aR_M b \iff \mathbb{T}^+ \vdash_X aRb$（ただし $a, b \in W_M$）．$V_M(a, p) = \mathsf{true} \iff a{:}\neg p \in \Gamma^+$．$f(a) = a$.

この M に対して次が成り立つことが，φ に関する帰納法で示せる．

$a : \varphi \in \Gamma^+$ ならば $V_M(a, \varphi) = \mathsf{false}$.

すると M と f に対して $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ が偽になることは定義から簡単にわかる． *Q.E.D.*

定理 2.7 つまり $\mathcal{C}_X$ から作ったヒルベルト流体系 $\mathcal{H}_X$ の完全性も，上記の $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ の完全性（定理 5.1）および $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ と $\mathcal{C}_X$ の同等性（定理 3.4）から言える．正確には次のようになる．

まず次が成り立つ．$\mathbf{K}^{\mathsf{labelled}}$ の公理 $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma,\ x : p,\ x : \neg p$ と各規則

$$\frac{\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{S} \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\mathbb{T}_1 \Rightarrow \Gamma_1 \quad \mathbb{T}_2 \Rightarrow \Gamma_2}{\mathbb{S} \Rightarrow \Delta}$$

にそれぞれ対応する以下の論理式

$$\mathsf{fla}(\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma, x{:}p, x{:}\neg p), \quad \mathsf{fla}(\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma) \to \mathsf{fla}(\mathbb{S} \Rightarrow \Delta), \quad (\mathsf{fla}(\mathbb{T}_1 \Rightarrow \Gamma_1) \wedge \mathsf{fla}(\mathbb{T}_2 \Rightarrow \Gamma_2)) \to \mathsf{fla}(\mathbb{S} \Rightarrow \Delta)$$

はすべて $\mathbf{K}$-valid であり，$\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$ で証明できる（$\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$ の完全性）．そしてこれを用いれば，$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ の証明図に関する帰納法によって次を示すことができる．

$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ ならば $\mathcal{H}_X \vdash \mathsf{fla}(\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma)$.

したがって $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}}$ の完全性と合わせて

φ が X-valid ならば $\mathcal{H}_X \vdash \varphi$

を得る．この逆は $\mathcal{H}_X$ の証明図に関する帰納法によって簡単に言える．

6 Negri の体系

Negri [2] は広いクラスの様相論理に対するラベル付きシークエント計算を与えている．この節ではそれを紹介して，本稿で定義した体系との関係を論じる．

まずはじめに Negri[2] による $\mathbf{K}$ の体系は，第 3 節で与えた体系 $\mathbf{K}^{\mathsf{labelled}}$ に対して「$\mathbb{G}$ が木でない場合も $\mathbb{G} \Rightarrow \Gamma$ をラベル付きシークエントとして扱う」（ ただし「Γ 中の ◎ 以外のラベルは $\mathbb{G}$ に現れる」という条件は依然として要請する）というようにシークエントを拡張した体系と同等である（正確には詳細部分は異なるが本質的には同じ）．これを $\mathbf{Negri_K}$ と呼ぶ．また規則 (serial) も第 3 節と同じ（ただしシークエントが拡張されている）ものとする．

次に $X \subseteq \mathbf{HORN}$ に対して規則 (X) を以下で定義する．

$$\frac{xRy,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}\ (X) \quad \begin{array}{l} \text{適用条件：ある } x_1Ry_1, \ldots, x_nRy_n \in \mathbb{G} \text{ に対して} \\ x_1Ry_1\ \&\cdots\&\ x_nRy_n \ \Rightarrow\ xRy \text{ が } X \text{ 中の性質の代入例になっているとき．} \end{array}$$

たとえば $A = \{\text{reflexive}, \text{transitive}\}$ の場合はふたつの形が (A) 規則になる．

$$\frac{xRx,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}{\mathbb{G} \Rightarrow \Gamma} \qquad \frac{xRz,\ xRy,\ yRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}{xRy,\ yRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}$$

以上の準備の下で，任意の $X \subseteq \mathbf{HORN} \cup \{\text{serial}\}$ に対して体系 $\mathbf{Negri}_X$ を次で定義する．これが X で特徴付けられる様相論理に対する Negri [2] の体系（と同等なもの）である．

定義 6.1. $X \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathbf{Negri}_X = \mathbf{Negri_K} + (X)$．$X = X' \cup \{\text{serial}\}$ かつ $X' \subseteq \mathbf{HORN}$ のときは，$\mathbf{Negri}_X = \mathbf{Negri_K} + (X') + (\text{serial})$.

なお Negri[2] では $\mathbf{HORN}$ に入らない性質に対しても規則を導入している．たとえば

$xRy\ \&\ xRz \ \Rightarrow\ yRz$ or zRy (connected),

$xRy\ \&\ xRz \ \Rightarrow\ \exists w(yRw\ \&\ zRw)$ (directed)

に対しては次の規則を用いる．

$$\frac{yRz,\ xRy,\ xRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma \quad zRy,\ xRy,\ xRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}{xRy,\ xRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{connected})$$

$$\frac{yRw,\ zRw,\ xRy,\ yRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}{xRy,\ yRz,\ \mathbb{G} \Rightarrow \Gamma}\ (\text{directed}) \quad \text{ただし } w \text{ は結論に現れない}$$

定理 6.2. $\mathbb{T}$ が木ならば，$\mathbf{Negri}_X \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ と $\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ は同値である．

Proof. これは両方の体系が X を条件とするクリプキモデルに対して健全かつ完全であることを用いれば自明である．一方，構文論的にこの同値性を示そうとしたとき，

$\mathcal{C}_X^{\mathsf{labelled}} \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$ ならば $\mathbf{Negri}_X \vdash \mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$

は素直に示すことができる．しかしこの逆は少々厄介である．$\mathbf{Negri}_X$ における結論のシークエントが $\mathbb{T} \Rightarrow \Gamma$（ただし $\mathbb{T}$ は木）であっても，証明の途中では木でない $\mathbb{G}$ に対する $\mathbb{G} \Rightarrow \Delta$ というシークエントが一般に使われているので，単純な帰納法は回らない．特に，非連結な複数のグラフ $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \ldots, \mathbb{G}_n$ について $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \ldots, \mathbb{G}_n \Rightarrow \Delta$ といったシークエントが証明の途中で使われている場合の処理が面倒である（複雑な議論を行えば構文論的な議論でも示すことができるとは思うが）． *Q.E.D.*

参考文献

[1] Kai Brünnler. Deep sequent systems for modal logic. *Archive for Mathematical Logic*, 48(6):551–577, 2009.

[2] Sara Negri. Proof analysis in modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 34(5-6):507–544, 2005.

[3] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory.* Cambridge University Press, 2000.