二次元ラムゼイ定理に関する Π^1_1 保存拡大性及び証明変換[*]

東北大学 理学系研究科 数学専攻　五十里 大将[†]
Graduate School of Science, Mathematical Institute
Tohoku University
Hiroyuki Ikari
東北大学 理学系研究科 数学専攻　横山 啓太[‡]
Graduate School of Science, Mathematical Institute
Tohoku University
Keita Yokoyama

1　はじめに

ラムゼイ型定理は逆数学の文脈でよく調べられており，特に二次元ラムゼイ定理の一階部分の強さが研究されている．なお本稿中で二次元ラムゼイ定理や $\mathrm{RT}^2_2, \mathrm{RT}^2$ という語を使う場合，以下の主張あるいはその適切な形式化を意味する．

Definition 1.1 (二次元ラムゼイ定理).

1. RT^2_2 とは次の主張である．任意の $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$ に対し，ある無限集合 $H \subseteq \mathbb{N}$ が存在し，$\mathrm{Im}(f \upharpoonright [H]^2)$ が単元集合となる．

---

[*]本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ 創設事業 JPMJFS2102 及び，JSPS 科研費 JP19K03601, JP21KK0045, JP23K03193 の助成を受けたものです。

[†]E-mail: hiroyuki.ikari.q8@alumni.tohoku.ac.jp
[‡]E-mail: keita.yokoyama.c2@tohoku.ac.jp

2. RT^2 とは次の主張である．任意の k 及び $f:[\mathbb{N}]^2\to\{0,1,\ldots,k-1\}$ に対し，ある無限集合 $H\subseteq\mathbb{N}$ が存在し，$\mathrm{Im}(f\restriction[H]^2)$ が単元集合となる．

二次元ラムゼイ定理の Π^1_1 部分に関する基本的かつ重要な結果として，Cholak, Jockusch, Slaman [4] の結果がある．

Proposition 1.2 ([4])**.**

1. $\mathrm{RT}^2_2+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{I}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ 上 Π^1_1 保存拡大である，
2. $\mathrm{RT}^2+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{I}\Sigma^0_3$ は $\mathrm{I}\Sigma^0_3$ 上 Π^1_1 保存拡大である．

RT^2_2 は $\mathsf{RCA_0}$ 上で $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ を証明することから，RT^2_2 の Π^1_1 部分は $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ と $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ の間にあるといえる．RT^2 の Π^1_1 部分が $\mathrm{I}\Sigma^0_3$ と $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ の間にあることについても同様である．Slaman, Yokoyama [9] は更に，$\mathrm{RT}^2+\mathsf{WKL_0}$ が $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ 上 Π^1_1 保存拡大であることを示した．これにより，RT^2 の Π^1_1 部分は $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ であると特定された．講演者らは [9] とは異なるアプローチを用い，証明の多項式変換に関する情報を付加する新証明を与えた．具体的には，以下を示した．

Theorem 1.3. 以下を満たす写像 Φ と多項式 f_Φ が存在する．

1. 任意の Π^1_1 文 φ とその $\mathrm{RT}^2+\mathsf{WKL_0}$ における証明 σ_φ に対し，$\Phi(\sigma_\varphi)$ は φ の $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ における証明である，
2. 任意の Π^1_1 文 φ とその $\mathrm{RT}^2+\mathsf{WKL_0}$ における証明 σ_φ に対し，$|\Phi(\sigma_\varphi)|\leq f_\Phi(|\sigma_\varphi|)$ が成り立つ．ここで $|x|$ は，証明 x に出現する記号の数である．[1]

以降 P とは $\forall X(\theta_P(X)\to\exists Y\alpha_P(X,Y))$ という形の Π^1_2 文であり，θ_P と α_P が算術的であるものとする．RT^2 や RT^2_2 はこの形であることに注意せよ．Theorem 1.3 を示すために，強制翻訳 (forcing translation) と強制解釈 (forcing interpretation) について論ずる．それらの基本的なアイデアは [1] や [2] に基づく．実際には，次の補題を組み合わせる．

Lemma 1.4. $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ が P に対する $\ll^2$ 基底定理を証明するならば，$\mathrm{B}\Sigma^0_3$ において $\mathrm{RT}^2+\mathsf{WKL_0}$ の強制解釈が存在し，それは多項式時間 Π^1_1 反映的である．

[1]実際には，Φ 自身が多項式時間手続きであることも示されるが，ここでは証明変換に注目するためにこの形とした．

Lemma 1.5. $\mathrm{B}\Sigma^0_3$ は RT^2 に対する $\ll^2$ 基底定理を証明する．

講演では，これら二つの補題及びその証明について概観した．本稿ではもう少し詳細な情報を補足する．

2 $\ll^2$ 基底定理と強制解釈

本節では Lemma 1.4 に関する議論を行うために必要な定義を導入する．特に重要なものは $\ll^2$ 基底定理及び強制解釈に関するものである．以下 $\mathcal{L}_2$ は常に言語 $\{0,1,+,\times,=,<,\in\}$ を表すとし，本稿で出現する理論は全て $\mathcal{L}_2$ 理論であるとする．

Definition 2.1. 1. $X \ll Z$ とは，任意の X 再帰的な無限 $0,1$ 木が Y 再帰的な無限道を持つことをいう．

2. $X \ll^2 Z$ とは，任意の $\Delta^0_2(X)$ 無限 $0,1$ 木が $\Delta^0_2(Y)$ 無限道を持つことをいう．

3. P に対する $\ll^2$ 基底定理とは，次の主張である．$X \ll^2 Z$ 及び $\theta_P(X)$ を満たす集合 X, Z に対し，ある Δ^Z_2 集合 Y が存在し，$\alpha_P(X,Y)$ 及び $(X \oplus Y) \ll^2 Z$ を満たす．

4. Δ^0_n-WKL とは次の主張である．任意の Δ^0_n 無限 $0,1$ 木が Δ^0_n 無限道を持つ．

$\ll^2$ 関係の重要な特徴づけに，以下の同値性がある．

Proposition 2.2. 集合 X, Z に対し，WKL^*_0+$\mathrm{B}\Sigma^0_1(Z)$ 上で以下は同値である．

1. $X \ll^2 Z$,

2. ある $\Delta^0_2(Z)$ 集合 $\mathcal{W}$ が存在し，$\mathcal{W}$ は X' を含む WKL^*_0 の コード化 ω モデルをコードする．

また，Δ^0_2-WKL と $\ll^2$ 関係は次の意味で重要な関わりを持つ．

Proposition 2.3. RCA^*_0 上で，以下は同値である．

1. Δ^0_2-WKL,

2. $\forall X \exists Y (X \ll^2 Y)$.

Definition 2.4 (強制翻訳). $\mathcal{L}_2$ 間の強制翻訳 π とは，以下の $\mathcal{L}_2$ 論理式の集まりである．

$$z \in \mathrm{Cond}_\pi, z \trianglelefteq_\pi z', z \Vdash^+_\pi x{\downarrow}, z \Vdash^+_\pi R(\vec{x}), \mathrm{Name}^0_\pi(x), \mathrm{Name}^1_\pi(x).$$

ここで $z \Vdash^+_\pi R(\vec{x})$ は各原子論理式 R 毎に定められているとし，$\mathrm{Name}^i_\pi (i \in \{0,1\})$ は一変数述語である．[2]

Definition 2.5. π が $\mathrm{Cond}_\pi, \trianglelefteq_\pi, \Vdash^+$ から成る $\mathcal{L}_2$ 間の強制翻訳であるとする．$\mathcal{L}_2$ 論理式 $z \Vdash_\pi x{\downarrow}$ 及び $z \Vdash_\pi \varphi$ を以下で定める．

1. $z \Vdash x{\downarrow} :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z \exists v \trianglelefteq u (v \Vdash^+ x{\downarrow})$.
2. $\varphi \equiv R(x_0, \dots, x_{k-1})$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow z \in \mathrm{Cond}_\pi \wedge \bigwedge_{i<k} z \Vdash_\pi x_i{\downarrow} \wedge \forall u \trianglelefteq z \exists v \trianglelefteq u (v \Vdash^+_\pi R(\vec{x}))$.
3. $\varphi \equiv \varphi_0 \wedge \varphi_1$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow z \Vdash_\pi \varphi_0 \wedge z \Vdash_\pi \varphi_1$.
4. $\varphi \equiv \varphi_0 \vee \varphi_1$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z \exists v \trianglelefteq u (z \Vdash_\pi \varphi_0 \vee z \Vdash_\pi \varphi_1)$.
5. $\varphi \equiv \neg \varphi_0$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z \neg (u \Vdash_\pi \varphi_0)$.
6. $\varphi \equiv \varphi_0 \to \varphi_1$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z (u \Vdash_\pi \varphi_0 \to u \Vdash_\pi \varphi_1)$.
7. $\varphi \equiv \forall x \varphi_0(x)$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z \forall x (u \Vdash_\pi x{\downarrow} \to u \Vdash_\pi \varphi_0(x))$.
8. $\varphi \equiv \exists x \varphi_0(x)$ のとき，
   $z \Vdash_\pi \varphi :\Leftrightarrow \forall u \trianglelefteq z \exists v \trianglelefteq u \exists x (v \Vdash_\pi x{\downarrow} \wedge v \Vdash_\pi \varphi_0(x))$.

Definition 2.6 (述語論理の強制解釈). T を $\mathcal{L}_2$ 理論，π を $\mathcal{L}_2$ 間の強制翻訳とする．T が以下を全て証明するとき，π は T における述語論理の強制解釈であるという．

[2] ここでは $\mathcal{L}_2$ 間の翻訳のみを取り扱ったが，もちろん他の言語に対しても定義可能であり，それは通常の翻訳と同様である．

1. $\exists z(z \in \mathrm{Cond}_\pi)$,

2. $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi(z \trianglelefteq_\pi z)$,

3. $\forall z, z', z'' \in \mathrm{Cond}_\pi(z \trianglelefteq_\pi z' \wedge z' \trianglelefteq_\pi z'' \to z \trianglelefteq_\pi z'')$,

4. $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi \exists z' \trianglelefteq_\pi z \exists x(z' \Vdash_\pi x\downarrow)$,

5. $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi \forall u(z \Vdash_\pi u\downarrow \to z \Vdash_\pi u = u)$,

6. $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi \forall u, v(z \Vdash_\pi u = v \to z \Vdash_\pi v = u)$,

7. $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi \forall u, v, w(z \Vdash_\pi u = v \wedge z \Vdash_\pi v = w \to z \Vdash_\pi u = w)$.

Definition 2.7 (理論の強制解釈). π を理論 T における述語論理の強制解釈であるとする．π が T における理論 T' の強制翻訳であるとは，全ての $\varphi \in T'$ に対し T が $\forall z \in \mathrm{Cond}_\pi(z \Vdash_\pi \varphi)$ を証明することをいう．

実用上は常に述語論理の強制解釈となる強制翻訳に興味があるため，翻訳を定義する際に集合 Cond，Cond 上の半順序 $\trianglelefteq$，関係 $\Vdash^+$，集合 $\mathrm{Name}^0, \mathrm{Name}^1$ を定めるという形を取ることが多い．

大雑把にいうと，強制解釈とは $\Vdash$ がクリプキ意味論を成す翻訳のことである．

3　$\ll^2$ 強制解釈

本節では，$\ll^2$ 基底定理と関連が強い強制解釈を導入する．この強制解釈は，$\ll^2$ 基底定理が成り立つ P のカノニカルな内部クリプキモデルを与える．

Definition 3.1. 強制翻訳 $\pi_{\ll^2}$ を以下で定める．

1. Cond は以下を満たす全ての組 $\langle W, i\rangle$ である．

   (1-1) W' は $\emptyset'$ を含む $\mathsf{WKL_0}$ の coded ω-model である，

   (1-2) i は自然数であり，$[(W')_i]' \in W'$ を満たす．

2. Cond 上の半順序 $\langle W, i\rangle \trianglelefteq \langle V, j\rangle$ を $(W')_i \geq_{\mathrm{T}} (V')_j$ で定める，

3. $\mathrm{Name}^0 = \mathbb{N}, \mathrm{Name}^1 = \mathrm{Cond}$ とする，

4. $\Vdash^+$ を以下で定める．

(4-1) $\langle W, i\rangle \Vdash^+ v\!\downarrow$ ($v \in \mathrm{Name}^0$) は常に成り立つ，

(4-2) $\langle W, i\rangle \Vdash^+ \varphi(\bar{v}) :\Leftrightarrow \varphi(\bar{v})$ (φ は一階の原子論理式)，

(4-3) $\langle W, i\rangle \Vdash^+ \langle V, j\rangle\!\downarrow :\Leftrightarrow \langle W, i\rangle \trianglelefteq \langle V, j\rangle$，

(4-4) $\langle W, i\rangle \Vdash^+ v \in \langle V, j\rangle\!\downarrow :\Leftrightarrow \langle W, i\rangle \Vdash^+ \langle V, j\rangle\!\downarrow \wedge v \in (V')_j$.

条件 (1-2) $[(W')_i]' \in W'$ の意図するところは，“$\Delta^0_2(W)$ 集合 W' が ω モデルをコードし，その i 番目の要素が $\ll^2 W$ 集合となる”である．$\ll^2$ 関係の特徴付け (Proposition 2.2 及び Proposition 2.3) も参照せよ．

$\pi_{\ll^2}$ は RCA^*_0 上で述語論理の強制解釈を与え，また次が成り立つ．

Theorem 3.2. 1. $\pi_{\ll^2}$ が T における T' の強制解釈であり，T' が P に対する $\ll^2$ を証明し，かつ T が Δ^0_2-WKL を証明するならば，T は $\Vdash_{\pi_{\ll^2}} P$ を証明する．

2. RCA^*_0+BΣ^0_3 は $\Vdash_{\pi_{\ll^2}}$ BΣ^0_3 を証明する．

3. $\pi_{\ll^2}$ は Δ^0_2-WKL+BΣ^0_3 における RT^2+BΣ^0_3 の強制解釈である．

4　その他の強制解釈

先の節では RT^2+WKL+BΣ^0_3 の Δ^0_2-WKL+BΣ^0_3 における強制解釈を構成した．本来の目的である Lemma 1.4 を達成するためにはさらに，Δ^0_2-WKL を BΣ^0_3 で解釈する必要がある．そのためにはさらに二種類の強制解釈を用いるが，詳細は割愛する．一つ目は WKL の保存性証明の際に標準的に用いられる tree forcing に基づいた翻訳で，Simpson, Simith [8] による WKL^*_0 の保存性証明の再構成である．tree forcing による翻訳については例えば [1] や [5] にて言及がある．二つ目は Belanger [3] による RCA^*_0 上の Jump inversion theorem に基づいた強制翻訳である．基本的なアイデアとしては，集合を 2 階ジャンプが存在するものに制限することで，Δ^0_2-WKL と WKL の間を埋めるというものである．

5　その他の応用

講演では別の応用も紹介した．P が $\forall X(\theta_P(X) \to \exists Y \alpha_P(X, Y))$ という形の Π^1_2 文であり，θ_P が Π^0_4，α_P が Π^0_2 であるとき，P をラムゼイ型

Π^1_2 文と呼ぶこととする．このとき，Fiori-Carones, Kołodziejczyk, Wong, Yokoyama [5] による超準2階算術モデルにおける同型定理の理論と内容とこれまでの議論を組み合わせると以下が成り立つ．

Theorem 5.1. P をラムゼイ型 Π^1_2 文とし，$\mathrm{I}\Sigma^0_2$ が P に対する $\ll^2$ 基底定理を示すとする．このとき以下は同値である．

1. $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ が P に対する $\ll^2$ 基底定理を示す，
2. $P+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^0_5 保存拡大である，
3. $P+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^1_1 保存拡大である，
4. $P+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^1_1 保存拡大であり，証明変換の多項式時間アルゴリズムが存在する．

2次元ラムゼイの定理 RT^2_2 はラムゼイ型 Π^1_2 文であるので，上記は以下の未解決問題に新しい観点を与える．この問いは RT^2_2 の一階部分についての長年の未解決問題である．

Question 5.2. $\mathrm{RT}^2_2+\mathsf{WKL_0}$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^1_1 保存拡大か？

特に Kołodziejczyk, Wong, Yokoyama [7] により $\mathrm{RT}^2_2+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^0_3 保存拡大であり，証明変換の多項式時間アルゴリズムが存在することが示されており，さらに Le Houerou, Patey, Yokoyama [6] により，$\mathrm{RT}^2_2+\mathsf{WKL_0}+\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ 上 Π^0_4 保存拡大であることが示されいる．一方で，後者では Π^0_4 保存拡大の際に Π^0_3 保存拡大の時と同様の証明変換の多項式時間アルゴリズムを構成することが難しいことが示唆されている．上述の議論からは Π^0_4 保存拡大の証明変換の多項式時間アルゴリズムの非存在は Question 5.2 を否定的に解決することが分かる．

参考文献

[1] J. Avigad, *Formalizing forcing arguments in subsystems of second-order arithmetic*, Annals of Pure and Applied Logic **82** (1996), no. 2, 165–191.

[2] ———, *Forcing in proof theory*, Bull. Symbolic Logic **10** (2004), no. 3, 305–333. MR2083287

[3] D. R. Belanger, *Conservation theorems for the cohesiveness principle*, 2022.

[4] P. A Cholak, C. G Jockusch, and T. A Slaman, *On the strength of Ramsey's theorem for pairs*, The Journal of Symbolic Logic **66** (2001), no. 1, 1–55.

[5] M. Fiori-Carones, L. A. Kołodziejczyk, T. L. Wong, and K. Yokoyama, *An isomorphism theorem for models of Weak König's Lemma without primitive recursion*, 2022.

[6] Q. L. Houérou, L. L. Patey, and K. Yokoyama, Π^0_4 *conservation of Ramsey's theorem for pairs*, 2024.

[7] L. A. Kołodziejczyk, T. L. Wong, and K. Yokoyama, *Ramsey's theorem for pairs, collection, and proof size*, J. Math. Log. **24** (2024), no. 2, Paper No. 2350007. MR4741734

[8] S. G Simpson and R. L Smith, *Factorization of polynomials and* Σ^0_1 *induction*, Annals of Pure and Applied Logic **31** (1986), 289–306.

[9] T. A Slaman and K. Yokoyama, *The strength of Ramsey's theorem for pairs and arbitrarily many colors*, The Journal of Symbolic Logic **83** (2018), no. 4, 1610–1617.