p 進 Hodge 理論の進展

辻　雄 (Takeshi TSUJI)*

1　導入

p 進 Hodge 理論は 60 年代から 70 年代にかけての，J. Tate および A. Grothendieck による p 進整数環上の p 可除群（特にアーベル多様体）における Hodge 分解の類似 (Tate)，および Dieudonné 加群による記述 (Grothendieck) についての先駆的研究に始まる．その後 80 年代に J.-M. Fontaine により，p 進体上の一般の完備非特異代数多様体に対して，p 進エタール・コホモロジーを de Rham コホモロジーやクリスタリン・コホモロジーと比較する予想の定式化が与えられ[1]，80 年代後半から 2000 年代初めにかけて Bloch-Kato, Fontaine-Messing, Faltings, Kato-Messing, Hyodo-Kato, 本稿著者などの研究により，これらの予想が肯定的に解決された．また p 進体の分岐指数，コホモロジーの次数，多様体の次元が素数 p にくらべ小さい場合については，整係数のコホモロジーの比較もなされた（Fontaine-Messing, Faltings, Breuil, Caruso など）．その後は p 進 Langlands 対応などガロア群，基本群の p 進表現そのもののより詳しい研究や，それに基づく p 進 Hodge 理論の数論幾何学への応用が活発に研究された．

P. Scholze による perfectoid, perfectoid 空間の理論の導入 ([38] 2012) を出発点として, Scholze らにより p 進体上の多様体に対して革新的な概念, 手法, コホモロジー論（tilting 同値, pro-étale コホモロジー，diamond，A_{inf} コホモロジー，prism，prismatic コホモロジーなど）が導入され，最近 10 年ほどの間に p 進 Hodge 理論の研究（スキームから形式スキームへの一般化，整 p 進 Hodge 理論の新たな枠組みの構築，p 進 Simpson 対応，整 syntomic コホモロジーなど）が大きく進展した．本稿ではこれらの進展の様子を紹介する．なお，とりあげている話題は最近の進展すべてではなく，また引用文献も部分的であることを予めお断りしておく．

2　perfectoid と pro-étale コホモロジー

以後 K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，あるいはより一般に剰余体が完全な混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体とし，O_K はその整数環とする．また K の代数閉包 $\overline{K}$ を一つとり，G_K で絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を表す．また $\overline{K}$ の付値による完備化を C で表す．G_K は C に連続に作用する．以後 O_K 上の環やスキーム S を K, $\overline{K}$, C, $O_{\overline{K}}$, O_C へ係数拡大・基底変換したものを S_K, $S_{\overline{K}}$, S_C, $S_{O_{\overline{K}}}$, S_{O_C} で表す．

*〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

[1]考えている代数多様体が semi-stable reduction をもつ場合，Fontaine と Jannsen により，モノドロミー作用素をもつある種のクリスタリン・コホモロジーの存在も含めて予想の定式化が与えられた．

Hodge-Tate 分解

Tate は O_K 上のアーベル多様体に対して Hodge 分解の類似を証明した際に，より一般に K 上の固有スムースなスキーム X の p 進エタール・コホモロジー $H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ に対して，次のような G_K 同変な自然な C 線型同型が存在するかという問題を提起した．

$$H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \cong \bigoplus_{n=a+b} H^a(X, \Omega^b_X) \otimes_K C(-b)$$

ここで $C(r)$ $(r \in \mathbb{Z})$ は，G_K 加群 C の r 回 Tate 捻りを表し，$g \in G_K$ は左辺には $g \otimes g$, 右辺には $1 \otimes g$ で作用する．Bloch-Kato, Fontaine-Messing, Faltings, Hyodo-Kato, 本稿著者などの研究により，この予想は今では定理となり，Hodge-Tate 分解と呼ばれている．

Faltings の証明の概要

Scholze の perfectoid の理論の背景として，この予想の解決のために p 進エタール・コホモロジーと微分加群を結びつける Faltings のアイデアをまず簡単に紹介する．$\mathcal{X}$ を O_K 上の固有スムースなスキーム，X をその生成ファイバー $\mathcal{X}_K$ とし，X の幾何的ファイバー $X_{\overline{K}} = \mathcal{X}_{\overline{K}}$ は連結であると仮定する．$\mathcal{X}$ の開部分スキーム $\mathcal{U} = \operatorname{Spec}(R)$ で可逆元からなる座標 $t_1, \ldots, t_d \in R^\times$ を持つものに対して，R の分数体 $\mathcal{K}$ の代数閉包 $\overline{\mathcal{K}}$ で $\overline{K}$ を含むものを一つとり，$\overline{\mathcal{K}}$ の次の部分正規環を考える．

$$\begin{aligned} &\overline{R} = \overline{\mathcal{K}} \text{ に含まれる } R_K \text{ の最大不分岐拡大内での } R \text{ の整閉包} \\ &\cup \\ &R_\infty = R_{O_{\overline{K}}}[t_1^{p^{-\infty}}, \ldots, t_d^{p^{-\infty}}] \\ &\cup \\ &R_{O_{\overline{K}}} = R \cdot O_{\overline{K}} \end{aligned}$$

環 $\overline{R}$ は $\mathcal{U}_K$ の普遍不分岐被覆上の関数で R 上整なもののなす環を考えていることになる．
$G_R = \operatorname{Aut}(\overline{R}/R_{O_{\overline{K}}})$, $\Gamma_R = \operatorname{Aut}(R_\infty/R_{O_{\overline{K}}}) \cong \mathbb{Z}_p(1)^d$ とおく．

almost purity theorem

K の p 冪円分拡大についての Tate の結果の類似として，Faltings は

定理 2.1 (Almost purity theorem[2] [22, §2b])**.** 拡大 $\overline{R}/R_\infty$ は「ほとんど」不分岐である．

を示すことにより，次の同型を証明した [21, §4]．$\widehat{\ }$ は p 進完備化を表す．

$$H^n_{\text{cont}}(G_R, \widehat{\overline{R}})[\tfrac{1}{p}] \cong H^n_{\text{cont}}(\Gamma_R, \widehat{R}_\infty)[\tfrac{1}{p}] \cong \Omega^n_{R/O_K} \otimes_R \widehat{R_{O_{\overline{K}}}}[\tfrac{1}{p}](-n) \tag{2.2}$$

定理 2.1により一つ目の同型が導かれ，$\Gamma_R = \mathbb{Z}_p(1)^d$ の R_∞ への作用が具体的にかけることを用いて二つ目の同型が得られる．この計算は明らかに座標 $t_1, \ldots, t_d$ の取り方に依存しているが，Faltings はこの同型の合成が座標の取り方に依らないことも示した．

[2] この定理の最初の証明 [21, §3] にはギャップがあることが L. Ramero により指摘された．後に Faltings は別の方法でこの定理の証明を与えた．$\overline{R}$ の定義より $\overline{R}_K/R_{\infty,K}$ は不分岐であり，この定理は特殊ファイバーに沿っても「ほとんど」分岐がおきないことを主張している．R_∞ の高さ 1 の素イデアル $\sqrt{pR_\infty}$ 上で $\overline{R}/R_\infty$ が「ほとんど」不分岐であることに帰着して証明されていることから，almost purity theorem と呼ばれている．

Faltings site

Faltings は定理 2.1で考えた$\mathcal{U}$ たちからなる $\mathcal{X}$ の hypercovering を用いて $C^{\bullet}_{\mathrm{cont}}(G_R, \widehat{\overline{R}})$ を貼り合わせることにより，同型 (2.2) から Hodge-Tate 分解を導いたが，ここでは後に Faltings により導入された G_R のガロア・コホモロジーをある site を用いて $\mathcal{X}$ 上で貼り合わせるコホモロジー論（Faltings コホモロジー）を使った議論を紹介する．

$\mathcal{X}$ の開部分スキーム $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ の有限エタールスキーム V の組 $(\mathcal{U}, V)$ のなす圏を $\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ で表し，$\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ に次の２種類の射の族から誘導される位相を与えた site を考える．

(a) $\mathcal{U}$ の開被覆 $(\mathcal{U}_\alpha)$ から定まる族 $((\mathcal{U}_\alpha, V \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_\alpha) \to (\mathcal{U}, V))$.

(b) V の有限エタール被覆 $(V_\alpha \to V)$ から定まる族 $((\mathcal{U}, V_\alpha) \to (\mathcal{U}, V))$.

この site は各 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ に対して定まる $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ の有限エタール site $\mathcal{U}_{\overline{K},\mathrm{f\acute{e}t}}$ を $\mathcal{X}$ の Zariski 位相を用いて「貼り合わせた」もので，$\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ 上の層を与えることは，各 $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ 上の有限エタール層 $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ のなす系 $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \subset \mathcal{X}}$ で $\mathcal{U}$ の開被覆についてある種の貼り合わせ条件をみたすものを与えることと同値になる．

各 $(\mathcal{U}, V)$ に対し，$\mathcal{U}$ の V での normalization を $V^{\mathcal{U}}$ とすると，$\mathcal{O}(\mathcal{U}, V) = \Gamma(V^{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{V^{\mathcal{U}}})$ により，$\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ 上の環の層 $\mathcal{O}$ が定まる．また関手 $\mathcal{X}_{\mathrm{Zar}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}; \mathcal{U} \mapsto (\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\overline{K}})$ は被覆と有限射影極限を保つことから site の射となり，topos の射

$$\nu\colon \mathcal{X}^{\sim}_{\mathrm{Falt}} \to \mathcal{X}^{\sim}_{\mathrm{Zar}}$$

が誘導される．これらを用いて同型 (2.2) を $\mathcal{X}$ 上で「貼り合わせた」次の定理が得られる．

定理 2.3. 次の自然な同型がある．$(R^n\nu_*(\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})_{m\geq 1})[\frac{1}{p}] \cong \Omega^n_{\mathcal{X}/O_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},O_{\overline{K}}}}[\frac{1}{p}](-n)$.

一方 Faltings はエタール・コホモロジーとの次の比較定理を証明した．関手 $\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}} \to X_{\overline{K},\mathrm{\acute{e}t}}$; $(\mathcal{U}, V) \mapsto V$ は被覆と有限射影極限を保つことから site の射となり，topos の射

$$\psi\colon X_{\overline{K},\mathrm{\acute{e}t}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$$

が定まる．

定理 2.4. (1) ψ より同型 $H^n(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^n_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ が誘導される．

(2) 自然な準同型 $H^n(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_{m\geq 1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \to H^n(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}, (\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})_{m\geq 1})[\frac{1}{p}]$ は同型である．

定理 2.4 (2) の右辺の ν_* についての Leray スペクトル系列に定理 2.3を適用し，定理 2.4とあわせることにより，$X_{\overline{K}}$ の Hodge-Tate 分解が得られる[3]．定理 2.4 (1) は，$\mathcal{X}$ が O_K 上スムースとは限らないより一般的な設定で，P. Achinger により証明されている [4, Corollary 6.9]．また定理 2.3, 定理 2.4 (2) の証明およびこれらの定理からの Hodge-Tate 分解の導出については，Abbes-Gros によりにその詳細が書かれている [1, Théorème 6.3.8, Corollaire 4.8.12, §6.4].

perfectoid

定理 2.1において考えた環 R_∞ は R_∞/pR_∞ の絶対 Frobenius が全射であるという性質をもつことが容易にわかる．また定理 2.1の帰結として，$R_\infty[\frac{1}{p}]$ 上の任意の有限エタール代数での R_∞

[3]スペクトル系列の退化とスペクトル系列より定まるフィルトレーションの分裂は，Tate の連続ガロア・コホモロジーの計算 $H^n(G_K, C(r)) = 0$ $((n,r) \in \{0,1\} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}))$ より導かれる．

の整閉包の法p還元も同じ性質をもつことが導かれる．P. Scholze は論文 [38] において，この性質に着目してC（より一般には perfectoid 体）上の perfectoid 代数[4] の概念を定義し，perfectoid 代数（正確には perfectoid affinoid 代数）に伴う Huber の意味での rigid 解析空間：adic 空間の幾何を用いることにより，定理2.1を含む次の定理を証明した．

定理 2.5 ([38, Theorem 7.9])**.** perfectoid 体上の perfectoid 代数Rに対し，Rの任意の有限エタール代数SはR°（Rの power bounded elements のなす部分環）上「ほとんど」不分岐である．（さらにSも perfectoid 代数になる．）

証明は Faltings の代数的手法と異なり次のような解析的手法による．perfectoid affinoid 代数(S,S^+)に伴う adic 空間$U=\mathrm{Spa}(S,S^+)$は構造前層が層となり良い振る舞いをする空間になることを示し，各$x\in U$に対し$\mathcal{O}^+_{U,x}$のp進完備化をとりpを可逆にしたものを考えると perfectoid 体になることを用いて，perfectoid 体の場合に問題を帰着して定理を示す（[38, Theorem 7.9 (ii)] の証明参照）．解析的空間である adic 空間では，代数的な Zariski 位相に比べ局所化の自由度が高いため，このように体の場合に帰着する議論が可能となっている．

pro-étale site

Faltings site の説明でふれた従来の有限エタール site $\mathcal{U}_{\overline{K},\text{fét}}$ では，その上の集合の層のなす圏とG_Rが連続に作用する離散位相をもつ集合のなす圏が圏同値になっており，G_Rが連続に作用する離散位相をもつ加群$\overline{R}/p^n\overline{R}$のコホモロジーが，$\mathcal{U}_{\overline{K},\text{fét}}$上の対応する加群の層のコホモロジーで解釈される．離散位相をもつ加群しか扱えないため，(2.2) のような連続群コホモロジーを扱うためには，定理2.3のように射影系のコホモロジーを扱う必要があった．Scholze は [39] において，$\mathcal{U}_{\overline{K},\text{fét}}$における射影系のなす圏 $\mathrm{Pro}\,\mathcal{U}_{\overline{K},\text{fét}}$ に適切な位相を入れることにより，site $\mathcal{U}_{\overline{K},\text{profét}}$を構成した．$R_{\overline{K}}$の不分岐拡大$\overline{R}_{\overline{K}}$は$R_{\overline{K}}$の有限エタール代数の帰納極限でかけることから，自然に$\mathcal{U}_{\overline{K},\text{profét}}$の対象とみなすことができ，その結果$G_R$の連続作用をもつ環$\widehat{\overline{R}}$やそのコホモロジーが直接$\mathcal{U}_{\overline{K},\text{profét}}$上の層やそのコホモロジーとして捉えられる．

$\mathcal{X}_{O_C}$の adic 空間としての生成ファイバーを X で表す．Scholze は [39] において，adic 空間 X 上 étale な adic 空間Y上の有限エタール adic 空間の射影系$(Y_\lambda)_\lambda$として表されるような対象のなす $\mathrm{Pro}\,\mathrm{X}_{\text{ét}}$ の充満部分圏に適切な位相を入れることにより，X の pro-étale site $\mathrm{X}_{\text{proét}}$を定義した．各$\mathcal{U}=\mathrm{Spec}(R)\subset\mathcal{X}$に対する$G_R$の連続作用付きの環$\widehat{\overline{R}}$を「貼り合わせた」$\mathrm{X}_{\text{proét}}$上の環の層$\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}$が構成され，次の定理2.3, 定理2.4 の類似が成り立つ．νは関手$\mathcal{X}_{\text{Zar}}\to\mathrm{X}_{\text{proét}};\mathcal{U}\mapsto\mathrm{U}=(\mathcal{U}_{O_C}$の adic 空間としての生成ファイバー) より定まる topos の射$\nu\colon \mathrm{X}^\sim_{\text{proét}}\to\mathcal{X}^\sim_{\text{Zar}}$を表す．

定理 2.6 ([10, §8] 参照)**.** 自然な同型$R^n\nu_*\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}[\frac{1}{p}]\cong\Omega^n_{\mathcal{X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},O_{\overline{K}}}}[\frac{1}{p}](-n)$がある．

関手$\mathrm{X}_{\text{ét}}\to\mathrm{X}_{\text{proét}};\mathrm{V}\mapsto\mathrm{V}$より topos の射$w\colon\mathrm{X}_{\text{proét}}\to\mathrm{X}_{\text{ét}}$が定まる．

定理 2.7. (1) ([39, Corollary 3.17]) wより同型$H^n(\mathrm{X}_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}H^n_{\text{proét}}(\mathrm{X}_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$が誘導される．

[4] C上の Banach 代数Rで，Rの power bounded elements のなす部分環R°が開かつ有界であり，Frobenius 射$R^\circ/pR^\circ\to R^\circ/pR^\circ$が全射のもの．perfectoid 体は剰余標数がpの階数1の離散的でない完備付値体で，付値環の mod p の Frobenius が全射であるもの．標数pの perfectoid 体上ではR°/pR°の代わりに$R^\circ/\varpi R^\circ$ (ϖは perfectoid 体の$0<|\varpi|<1$をみたす元) を考える．

(2) ([39, §4, Theorem 5.1]) 自然な準同型 $H^n(\mathrm{X}_{\text{proét}},(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})_{m\geq 1})\otimes_{\mathbb{Z}_p}C\to H^n(\mathrm{X}_{\text{proét}},\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X}}^{+})[\frac{1}{p}]$ は同型である．

これらは O_K あるいはより一般に O_C 上の固有スムースな p 進形式スキームでも成り立つ．さらに定理 2.6は，ν を $\mathrm{X}_{\text{ét}}$ への射影に，同型の右辺を $\Omega^n_{\mathrm{X}}(-n)$ に置き換えて，C 上の固有スムースなリジッド解析空間でも成り立ち（[40, Proposition 3.23]），その結果 O_K 上のスムース（あるいはlog スムース）なモデルなしで，しかも代数的とは限らない一般の固有スムースなリジッド解析空間で p 進エタール・コホモロジーと微分加群を結びつけることが可能となった．[5]

tilting 同値

K_∞ を K に 1 の p 冪根をすべて添加して得られる $\overline{K}$ の部分体とし，その整数環を O_{K_∞} で表す．すると $O_{K_\infty}/pO_{K_\infty}$ の絶対 Frobenius は全射となり，Frobenius について射影極限をとって得られる完全環 $O^\flat_{K_\infty}=\varprojlim(O_{K_\infty}/pO_{K_\infty}\xleftarrow{\mathrm{Frob}}O_{K_\infty}/pO_{K_\infty}\xleftarrow{\mathrm{Frob}}\cdots)$ は正標数 p の完備な付値環になり，その分数体をとることにより正標数 p の完備な付値体 $K^\flat_\infty$ が得られる．この構成は K_∞ の有限次拡大にも適用でき，Fontaine-Wintenberger のノルム体の理論 [46] により，K_∞ の有限次拡大の圏と $K^\flat_\infty$ の有限次分離拡大の圏の間の圏同値を与えることが知られている．特に K_∞ の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ は $\overline{K}$ に対応する $K^\flat_\infty$ の分離閉包 $\overline{K}^\flat_\infty$ のガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}^\flat_\infty/K^\flat_\infty)$ と同型になる．一般に，正標数 p の体の絶対ガロア群の p 進ガロア表現は，φ 加群で捉えられることが知られており，Fontaine は上記のガロア群の同型を利用して，$G_K=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の p 進表現を $\Gamma_K=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ の作用をもつ φ 加群：(φ,Γ_K) 加群を用いて捉える理論を構築した．これは G_K の p 進表現を線型，半線型なデータでとらえる基本的な手法の一つとなっている．F. Andreatta は，Faltings の定理 2.1を用いて，（可逆関数からなる座標をもつ）O_K 上のスムースな環 A の p 進完備化 $\widehat{A}$ に対して，$\widehat{A}_K$ の有限エタール被覆についてのノルム環の理論と $\widehat{A}_K$ の基本群の p 進表現の (φ,Γ) 理論を構築した [5].

K_∞（より一般に標数 0 の perfectoid 体でもよい）上の perfectoid 代数 R に対し，R° の法 p 還元の Frobenius は全射であり，上記の構成を適用することにより $O^\flat_{K_\infty}$ 上の完全環 $(R^\circ)^\flat=\varprojlim(R^\circ/pR^\circ\xleftarrow{\mathrm{Frob}}R^\circ/pR^\circ\xleftarrow{\mathrm{Frob}}\cdots)$ が得られ，$K^\flat_\infty$ 代数 $R^\flat=(R^\circ)^\flat\otimes_{O^\flat_{K_\infty}}K^\flat_\infty$ は $K^\flat_\infty$ 上の perfectoid 代数となる．Scholze は，Gabber-Ramero が Faltings の almost 理論の基礎理論を構築した際に導入していた almost 理論での cotangent complex を用いて，上の構成が K_∞ 上の perfectoid 代数の圏と $K^\flat_\infty$ 上の perfectoid 代数の圏の間の圏同値を与えることを示した（[38, Theorem 5.2]）.[6] Scholze は，さらに R の有限エタール代数は常に perfectoid 代数になり，上の構成は，R 上の有限エタール代数の圏と $R^\flat$ 上の有限エタール代数の圏の間の圏同値を与えることも証明した ([38, Theorem 5.25, Theorem 7.9 (iii)]) [7]．これにより，混標数の環やスキームに関する問題を等標数の環やスキームに関する問題に帰着する道が開かれ，混標数での weight monodromy 予想を等標数での同予想（定理）へ帰着させる研究（Scholze [38]），混標数の局所

[5]Faltings site での固有コホモロジー降下が，最近 T. He により証明され，その結果スムースや log スムースでない場合も，Faltings site のコホモロジーを log スムースな場合に帰着して調べることが可能になっている [28]. その応用として，定理 2.4 (2)（やその相対版）が log スムースでないモデル（やモデルの間の射）へ拡張されている．

[6]Scholze は $R^\flat$ を R の tilt と呼んだ．これは局所体の p 進ガロア表現の研究で用いる p 進周期環を構成する際に Fontaine により用いられた操作で，Scholze 以前よりよく知られていた．この操作が一般に混標数と等標数の perfectoid 代数を結びつける美しい関係を与えていることを見出したことは画期的であった．

[7]K_∞ は一般の perfectoid 体でもよい．

ラングランズ対応の幾何的手法による研究（Fargues-Scholze）など，混標数の数論幾何を正標数に持ち込んで議論する有効な手段となっている．

3　A_{inf} コホモロジーと prismatic コホモロジー

従来の整 p 進 Hodge 理論

X を O_K 上の固有スムースなスキームとする．このとき p 進 Hodge 理論で扱う p 進エタール・コホモロジー，クリスタリン・コホモロジー，de Rham コホモロジーは自然に定まる整構造 $H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$, $H^n_{\mathrm{crys}}(X_k/W(k))$, $H^n_{\mathrm{dR}}(X/O_K)$ を持ち，$H^n_{\text{ét}}$ は連続線型な G_K 作用を，H^n_{crys} は X_k の絶対 Frobenius から定まる半線型な自己準同型 φ を，H^n_{dR} は Hodge filtration $\mathrm{Fil}^r H^n_{\mathrm{dR}}$ を付加構造として持つ．§1でもふれたように，n, $\dim X$ および K の絶対分岐指数が p に較べて小さい場合には，これらのコホモロジーをその付加構造も含めて比較する結果が知られていた．一般の場合はうまく扱えない主な原因の一つは，クリスタリン・コホモロジー理論の基礎となっている divided powers にあった．

divided powers は Poincaré の補題を混標数や正標数でうまく扱うためにクリスタリン・コホモロジー論に導入された．例えば p 進整数のなす環 $\mathbb{Z}_p$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{Z}_p[X]$ では，列

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p[X] \xrightarrow{d} \mathbb{Z}_p[X]dX \to 0$$

は完全にならず，Poincaré の補題が成立しない．実際 X^n の微分は nX^{n-1} となるため，n が p の倍数のとき $df = X^{n-1}dX$ をみたす $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ は存在しない．クリスタリン・コホモロジー論では，次のように X^n を $n!$ で割った $\frac{X^n}{n!}$ を考えることにより，この問題を克服している．

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p[\tfrac{X^n}{n!}; n \geq 0] \xrightarrow{d} \mathbb{Z}_p[\tfrac{X^n}{n!}; n \geq 0]dX \to 0$$

$d(\frac{X^n}{n!}) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}dX$ より，この列は完全になる．$\frac{X^n}{n!}$ $(n \geq 1)$ は X の divided power と呼ばれる．一般に p-torsion free とは限らない環 A とそのイデアル I に対しても，I の各元 x に対して "$\frac{x^n}{n!}$"$\in I$ $(n \geq 1)$ を形式的に与える操作を考え，それをイデアル I の divided power 構造と呼んでいる．クリスタリン・コホモロジー論ではこのような A と I の組（より一般にはそのスキーム版）と A 上のスキームに対して構築され，divided power 構造は欠かせない．

p 進 Hodge 理論におけるコホモロジーの比較定理において，divided powers は次のように現れる．$O_C^\flat$ を O_C の tilt $\varprojlim(O_C/pO_C \xleftarrow{\mathrm{Frob}} O_C/pO_C \xleftarrow{\mathrm{Frob}} \cdots)$ とし，A_{inf} をその Witt 環 $W(O_C^\flat)$ とする．この環は Fontaine により考えられた O_C への全射環準同型 $\theta\colon A_{\mathrm{inf}} \to O_C$ をもち，その核は非零因子 ξ で生成される．整コホモロジーの比較定理では A_{inf} に ξ の divided power $\frac{\xi^n}{n!}$ $(n \geq 1)$ を付け加えた環 $A_{\mathrm{inf}}[\frac{\xi^n}{n!}; n \geq 1] \subset A_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ の p 進完備化 $A_{\mathrm{crys}} = A_{\mathrm{inf}}[\frac{\xi^n}{n!}; n \geq 1]^\wedge$ とその減少 filtration $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{crys}} = (\sum_{n \geq i} \frac{\xi^n}{n!} A_{\mathrm{inf}})^\wedge$ が用いられていた．

A_{inf} コホモロジー（Bhatt-Morrow-Scholze [10]）

これは整 p 進コホモロジー論への新しいアプローチとして，エタール・コホモロジー，ガロア・コホモロジーの視点から，Bhatt-Morrow-Scholze により導入された．上記の既存の整 p 進コホモロジーを A_{inf} コホモロジーの「特殊化」としてとらえる形で，コホモロジーの比較を実現した．

以後 $\mathfrak{X}$ は $\mathrm{Spf}(O_C)$ 上の固有スムースな形式スキームとし，X を $\mathfrak{X}$ の adic 空間としての生成ファイバー，$\nu\colon X^{\sim}_{\text{proét}} \to \mathfrak{X}^{\sim}_{\text{Zar}}$ を X の pro-étale topos から $\mathfrak{X}$ の Zariski topos への射影とする．定理2.6の証明は，より精密に次の almost 同型を与える．$O_{\overline{K}}$ 加群の（層）の準同型 $f\colon M \to M'$ の核，余核が $O_{\overline{K}}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ で消えるとき，f は almost 同型であるといい，$M \xrightarrow{\approx} M'$ で表す．$\mathfrak{m}_{\overline{K}}^2 = \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ より, almost 同型は合成で閉じている．

定理 3.1. 自然な almost 同型 $\Omega^n_{\mathfrak{X}}\{-n\} \xrightarrow{\approx} (R^n\nu_*\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}})/((\zeta_p - 1)\text{-torsion 部分})$ $(n \geq 0)$ がある．ここで $O_C\{-n\}$ は $C(-n)$ のある階数 1 の自由 O_C 部分加群で，$\{-n\}$ は $\otimes_{O_C} O_C\{-n\}$ を表す．

décalage

定理 3.1の右辺に現れているコホモロジーを $(\zeta_p - 1)$-torsion 部分で割る操作は，次のような décalage と呼ばれる導来関手で解釈される．$(\mathcal{A}, f)$ をある topos 上の可換環の層とその大域切断 f の組で $f\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ が monomorphism になっているものとする（上の例では $\mathfrak{X}^{\sim}_{\text{Zar}}$ 上の定数層 O_C と $\zeta_p - 1$ を考える）．このとき，f-torsion free な $\mathcal{A}$ 加群の層の複体 $\mathcal{C}^\bullet$ に対して，$\mathcal{C}^\bullet[\frac{1}{f}]$ の $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} f^n C^n$ に含まれる最大部分複体を $\eta_f\mathcal{C}^\bullet$ とすると，同型

$$H^n(\eta_f\mathcal{C}^\bullet) \cong H^n(\mathcal{C}^\bullet)/(f\text{-torsion 部分})$$

が成り立つ．f-torsion free な複体による resolution をとることにより，この構成の導来版 $L\eta_f$ を $\mathcal{A}$ 加群の複体のなす導来圏 $D(\mathcal{A})$ で考えることができる．この操作を定理3.1の almost 同型の右辺に適用して，almost 同型

$$\Omega^n_{\mathfrak{X}}\{-n\} \xrightarrow{\approx} H^n(L\eta_{\zeta_p-1}R\nu_*\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}})$$

が得られる．これが同型になることを示すのは容易ではなさそうに見えるが，不思議なことに (2.2) の中央にあらわれている $H^n_{\text{cont}}(\Gamma_R, \widehat{R}_\infty)$ およびその mod $\zeta_p - 1$ 版 $H^n(\Gamma_R, \widehat{R}_\infty/(\zeta_p - 1))$ が $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ で消える非零元を持たないことから，同型であることが導かれる[8].

A_{inf} コホモロジーは，類似の操作 $L\eta_\mu$ を $A_{\text{inf}}(\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}) = W(\varprojlim_{\text{Frob}} \widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}/p\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}})$ のコホモロジー $R\nu_*A_{\text{inf}}(\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}})$ に適用することにより，次のように定義された.[9]

$$A\Omega_{\mathfrak{X}} = L\eta_\mu R\nu_*A_{\text{inf}}(\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}), \quad R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X}) = R\Gamma(\mathfrak{X}_{\text{Zar}}, A\Omega_{\mathfrak{X}}). \tag{3.2}$$

定理 3.3 (Bhatt-Morrow-Scholze [10]). $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X})$ は A_{inf} 加群の完全複体であり，次の自然な同型を持つ．$\overline{k}$ は $O_{\overline{K}}$ の剰余体を表す．

$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X}) \otimes^L_{A_{\text{inf}}} W(\overline{k}) \cong R\Gamma_{\text{crys}}(\mathfrak{X}_{\overline{k}}/W(\overline{k}))$$
$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X}) \otimes^L_{A_{\text{inf}},\theta} O_C \cong R\Gamma_{\text{dR}}(\mathfrak{X}/O_C)$$
$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X})[\tfrac{1}{\mu}] \cong R\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{inf}}[\tfrac{1}{\mu}]$$

[8]論文 [10] の Introduction で miracle と述べられている．

[9]μ は次のように定義される A_{inf} の元である．1 の原始 p^n 乗根の系 $\zeta_{p^n} \in O_{\overline{K}}$ $(n \geq 0)$, $\zeta^p_{p^{n+1}} = \zeta_{p^n}$ をとると $O^\flat_C$ の元 $\varepsilon = (\zeta_{p^n} \bmod p)_{n\geq 0}$ が定まる．μ は，この Teichmüller lift $[\varepsilon] \in A_{\text{inf}} = W(O^\flat_C)$ を用いて $\mu = [\varepsilon] - 1$ と定義される．$A_{\text{inf}} = W(O^\flat_C)$ の Frobenius 自己同型を φ で表すと，Fontaine の写像 $\theta\colon A_{\text{inf}} \to O_C$ と φ^{-1} の合成 $\theta \circ \varphi^{-1}$ による μ の像が $\zeta_p - 1$ となっており，$A\Omega_{\mathfrak{X}}$ は $L\eta_{\zeta_p-1}R\nu_*\widehat{\mathcal{O}}^+_{\mathrm{X}}$ の $\theta \circ \varphi^{-1}$ についての「変形」を与えている．

注 3.4. (1) $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ は局所的には $\mathfrak{X}$ の A_{inf} 上への持ち上げとその座標に伴う「q-de Rham 複体」により表される．この記述は座標の取り方に依存しているため，$\mathfrak{X}$ が仮に大域的に A_{inf} 上に持ち上げを持ったとしても（例えば $\mathfrak{X}$ が $W(\bar{k})$ 上の固有スムース形式スキームの基底変換の場合），$A\Omega_{\mathfrak{X}}$ の大域的な複体による具体的表示は与えない．

(2) その後の関連研究として，$\mathfrak{X}$ が semi-stable reduction を持つ場合 (Česnavičius-Koshikawa [45])，相対コホモロジーの場合 (Gaisin-Koshikawa [25])，係数理論（Morrow-著者 [37]）の研究などがある．

prismatic コホモロジー (Bhatt-Scholze [12])

A_{inf} コホモロジーはエタール・コホモロジー，ガロア・コホモロジーよりの視点から導入されたが，Bhatt-Scholze はクリスタリン・コホモロジーよりの視点から prismatic コホモロジーと名付けられた新たな整 p 進コホモロジーを導入した．A_{inf} コホモロジーは A_{inf} 上でのみ扱えるが，prismatic コホモロジーはより一般の基底（あるいは基底なし）を許し，A_{inf} コホモロジーよりも汎用性の高いコホモロジー論である．論文が 2019 年に arXiv に掲載されて以降その注目度は高く，すでに非常に多くの論文に引用されている．上に述べたように従来の整 p 進 Hodge 理論では，クリスタリン・コホモロジーにおける divided powers の存在が，コホモロジーの次数などについての制限なく理論を構築する上での障害となっていた．A_{inf} コホモロジー論では décalage を用いることにより，微分加群をその整構造も含めて pro-étale コホモロジーを用いて完全に記述できたことが鍵となった．prismatic コホモロジーでは絶対 Frobenius の持ち上げ（より一般には δ 構造）を付加構造として導入することにより，分母に $n!$ を付け加える操作を取り除くことに成功している．その様子を簡単に紹介する．

観察 1　R を p-torsion free な $\mathbb{Z}_p$ 代数，$\varphi\colon R \to R$ を R/pR の絶対 Frobenius の持ち上げとする．このとき $x \in R$ に対し，$\frac{x^p}{p} \in R$ ならば，すべての正の整数 n に対して $\frac{x^n}{n!} \in R$ が成り立つ．すなわち絶対 Frobenius の持ち上げがあれば，x の divided powers が R に入るためには，x の pth divided power $\frac{x^p}{p!}$ が R に入っていれば十分である．

（証明：$n = \sum_{m=0}^{N} a_m p^m$ $(a_m \in \mathbb{N} \cap [0, p-1])$ に対して，$v_p(n!) = \sum_{m=0}^{N} a_m v_p(p^m!)$ なので，n が p 冪の場合に示せばよい．$v_p(p^{m+1}!) = pv_p(p^m!) + 1$ と，$\varphi(x) \in pR$ より $\varphi(\frac{x^{p^m}}{p^m!}) \in \frac{p^{p^m}}{p^m!}R \in pR$ となることを用いて，帰納的に $\frac{x^{p^m}}{p^m!} \in R$ $(m \geq 1)$ を示せる．）

観察 2　$A_{\mathrm{inf}} = W(O_C^\flat)$ は $A_{\mathrm{inf}}/pA_{\mathrm{inf}} = O_C^\flat$ の絶対 Frobenius の持ち上げ φ をもち，φ は自己同型である．$O_C^\flat = \varprojlim_{\mathrm{Frob}} O_C/pO_C$ は積についてのモノイドとして $\varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ と同型である．1 の原始 p 乗根の系 $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ をとり，$q = [\varepsilon] \in A_{\mathrm{inf}}, \xi = \frac{q-1}{\varphi^{-1}(q)-1} = \frac{q-1}{q^{\frac{1}{p}}-1} \in A_{\mathrm{inf}}$ と定める．$q-1$ は A_{inf} コホモロジーの定義に用いた μ に他ならない．また Fontaine の写像 $\theta\colon A_{\mathrm{inf}} \to O_C$ の核は ξ で生成されている．従って divided power $\frac{\xi^n}{n!}$ をどう避けるかが目下の問題である．A_{inf} を $q-1$ で割った商 $A_{\mathrm{inf}}/(q-1)A_{\mathrm{inf}}$ を考えると，これは次の性質を持つ．

(i) p-torsion free.

(ii) A_{inf} の φ より，$A_{\mathrm{inf}}/(q-1)A_{\mathrm{inf}}$ の φ が誘導される．

(iii) $\varphi(\xi \bmod (q-1)) \subset p \cdot A_{\mathrm{inf}}/(q-1)A_{\mathrm{inf}}$.

（証明：$\varphi(\xi) = 1 + q + \cdots + q^{p-1} \equiv p \mod (q-1)A_{\mathrm{inf}}$).

これらの性質と観察 1 より，$q-1$ で割った商 $A_{\mathrm{inf}}/(q-1)A_{\mathrm{inf}}$ では x の divided power $\frac{\xi^n}{n!}$ $(n \geq 1)$ は $A_{\mathrm{inf}}/(q-1)A_{\mathrm{inf}}$ に入ることが分かる．

q-PD ideal

観察2で現れた $\varphi(\xi) = 1 + q + \cdots + q^{p-1}$ は p の q 類似として知られている．整数 n の q 類似は $\frac{q^n-1}{q-1}$ である．以後これを $[n]_q$ で表すことにする．観察2では $[p]_q$ が mod $q-1$ で p となることが鍵となって，mod $q-1$ では ξ が divided powers を許すことが導かれている．Bhatt と Scholze は p の q 類似 $[p]_q$ を用いて，次のように divided power 構造の q 変形を定義した．

p-torsion free ではない環を扱う場合は，絶対 Frobenius の持ち上げでは不十分で，δ 構造を用いる．環 R の δ 構造は写像 $\delta\colon R \to R$ であって，$\varphi(x) = x^p + p\delta(x)$ が R/pR の絶対 Frobenius の持ち上げを与えるようなものである．R が p-torsion free な場合，δ 構造と絶対 Frobenius の持ち上げは一対一に対応し，上に定義した φ が環準同型となるための δ の条件は $\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$ と，$\delta(x+y)$ および $\delta(xy)$ を $x, y, \delta(x), \delta(y)$ で表す等式としてかける．一般の環の δ 構造はこれらの等式を公理として定義される．

環 $\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ に $\varphi(q) = q^p$ で定まる Frobenius 持ち上げに対応する δ 構造を入れる．$\delta(q) = 0$ である．（観察2の q は ε の Teichmüller 持ち上げであることから，$\varphi(q) = q^p$ を満たしている．）$[p]_q$-torsion free な $\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ 代数 A に，$\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ の δ 構造と compatible な δ 構造が与えられているとする．A のイデアル I が $\varphi(I) \subset [p]_q A$ かつ $\frac{\varphi(x)}{[p]_q} - \delta(x) \in I$ を満たしているとき，I を A の q-PD イデアルと呼ぶ．[12] では A にいくつかの技術的条件を課しているがここでは省略する．$q = 1$ 従って $[p]_q = p$ のとき，$x \in I$ に対して $\frac{\varphi(x)}{[p]_q} - \delta(x) = \frac{x^p}{p} \in I$ となり，I は操作 $x \to \frac{x^n}{n!}$ $(n \geq 1)$ で閉じていることが従う．

q クリスタリン・コホモロジー

Bhatt と Scholze は q-PD イデアルをクリスタリン・コホモロジー論における PD イデアルの代わりに用いて，q クリスタリン・コホモロジーを定義した．$A = A_{\mathrm{inf}}$, $I = (\xi)$ のとき，$\varphi(\xi) = [p]_q$ と $\delta(\xi) = p^{-1}(\varphi(\xi) - \xi^p) \equiv p^{-1}p = 1 \bmod I$ より，I は A の q-PD イデアルであることが分かる．A_{inf} コホモロジー $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathfrak{X})$ は $O_C = A_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ 上の p 進形式スキーム $\mathfrak{X}$ の $(A_{\mathrm{inf}}, (\xi))$ 上の q クリスタリン・コホモロジーと一致することが示されている．

prism

クリスタリン・コホモロジー論では，環とイデアルの組 (A, J) に形式的に $\frac{x^n}{n!}$ $(n \geq 1, x \in J)$ を付け加える PD-envelope と呼ばれる操作が用いられる．この q-PD イデアルでの類似は，$\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ 上の δ 代数 A（δ 構造付きの代数）と A のイデアル J の組 (A, J) に対して，$\delta^n(\frac{\varphi(x)}{[p]_q})$ $(n \geq 1, x \in J)$ を形式的に加える操作により得られる[10]．これを $A[\frac{\varphi(J)}{[p]_q}]_\delta$ で表すことにする．分子は J の φ による像をとっていることから，これは A の $\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ 上の「相対 Frobenius 持ち上げ」$A^{(1)} = A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[q-1]],\varphi} \mathbb{Z}_p[[q-1]] \to A; a \otimes b \mapsto \varphi(a)b$ に沿った降下 $A^{(1)}[\frac{J^{(1)}}{[p]_q}]_\delta$（$A^{(1)}$ に形式的に $\delta^n(\frac{x}{[p]_q})$, $x \in J^{(1)} = JA^{(1)}$ を加えて得られる環）を持つ．Bhatt と Scholze は，q クリスタリン・コホモロジーに対し同様の降下を与える prismatic コホモロジーの理論を構築した．

定義 3.5. δ 構造を持つ環 A（δ 環と呼ぶ）と A の可逆イデアル I の組 (A, I) で次の条件をみたすものを prism と呼ぶ．

(i) A/I の p 冪 torsion の指数は有界．つまり $(A/I)[p^\infty] = A/I[p^N]$ $(N >> 0)$.

(ii) A は (p, I) 進完備：$A \cong \varprojlim_n A/(p, I)^n$.

(iii) $p \in I + \varphi(I)A$.（$I = dA$ のとき，(ii) のもとでこれは $\delta(d) \in A^\times$ と同値．）

[10] 正確には，このような操作がうまくできるためには組 (A, J) に条件が必要である．

prism の間の射は，δ 構造と両立しかつイデアルを保つ環準同型と定める．

正確には，これは Bhatt と Scholze の意味で bounded prism である．prismatic コホモロジーの定義では bounded prism のみ用いるので，ここでは bounded を略して単に prism と呼ぶことにする．$(\mathbb{Z}_p[[q-1]], ([p]_q))$, $(A_{\mathrm{inf}}, ([p]_q))$ は prism である．prism は PD イデアルや q-PD イデアルと異なり，次の剛性を持つ．

命題 3.6 ([12, Lemma 3.5])**.** prism の射 $f\colon (A, I) \to (A', I')$ は $I' = f(I)A$ をみたす．

この剛性により, 上で考えた q-PD-envelope の相対 Frobenius 持ち上げに沿った降下 $A^{(1)}[\frac{J^{(1)}}{[p]_q}]_\delta$ ((A, J) についての適当な仮定のもと存在）は $(A^{(1)}, J^{(1)})$ の $(\mathbb{Z}_p[[q-1]], ([p]_q))$ 上の「prismatic envelope」となることが導かれる．

prismatic site

prismatic site は，クリスタリン site で考える PD イデアルで定義される closed immersion を prism のイデアルから定まる closed immersion に置き換えて，次のように定義される．

(A, I) を prism，$\mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spf}(A/I)$ 上の p 進形式スキームとする．$\mathfrak{X}$ の (A, I) 上の prismatic site $(\mathfrak{X}/(A, I))_{\mathbb{\Delta}}$ は (A, I) 上の prism (B, I_B) と $\mathrm{Spf}(A/I)$ 上の射 $\mathrm{Spf}(B/I_B) \to \mathfrak{X}$ からなる．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spf}(B/I_B) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(B) \\ \downarrow & & \\ \mathfrak{X} & & \downarrow \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Spf}(A/I) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(A) \end{array}$$

位相は（(p, I) 進的な）flat 位相を与え，構造層は $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/A,\mathbb{\Delta}}(B) = B$ で定義する．prism の射の剛性より，クリスタリン site とは異なり，上の図式は常に cartesian になっている．

定理 3.7 (Bhatt-Scholze [12])**.** (1) O_C 上の固有スムースな p 進形式スキーム $\mathfrak{X}$ に対して，次の自然な同型がある．

$$R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathfrak{X}) \cong R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{X}/(A_{\mathrm{inf}}, ([p]_q)))$$

(2) prism (A, I) と $\mathrm{Spf}(A/I)$ 上の固有スムースな p 進形式スキーム $\mathfrak{X}$ に対して，$R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{X}/(A, I))$ は A 加群の完全複体となり，次の自然な同型がある．

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{X}/(A, I)) \otimes^L_{A,\varphi} A/I &\cong R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}/(A/I)) \\ R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{X}/(A, I)) \otimes^L_{A,\varphi} A &\cong R\Gamma_{\mathrm{crys}}(\mathfrak{X}/A) \quad (I = pA \text{ のとき}) \\ (R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{X}/(A, I))[\tfrac{1}{I}]/p^n)^{\varphi=1} &\cong R\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ &(A/I \text{ が perfectoid のとき．X は } \mathfrak{X} \text{ の adic 生成ファイバー}) \end{aligned}$$

絶対 prismatic F クリスタルとクリスタリン表現

p 進形式スキーム $\mathfrak{X}$ に対し，上に述べた prismatic site の定義で (A, I) をなくしたもの，つまり prism (B, I_B) と射 $\mathrm{Spf}(B/I_B) \to \mathfrak{X}$ からなる site を考えることもできる．これを $\mathfrak{X}$ の絶

対 prismatic site と呼び $\mathfrak{X}_{\Delta}$ で表す．構造層 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\Delta}$ も同様に $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\Delta}(B) = B$ で定義される．$\mathfrak{X}$ が $\mathrm{Spf}(O_K)$ のとき，Bhatt と Scholze は $\mathfrak{X}_{\Delta}$ 上の局所有限型自由な F クリスタル（Frobenius 構造付きのクリスタル）の圏がちょうど G_K のクリスタリン表現の格子のなす圏と圏同値になることを示した [13]．クリスタリン表現の格子は K が絶対不分岐な場合は Wach 加群の理論，一般の場合は Breuil-Kisin 加群の理論が知られていた．これらの加群はこの Bhatt と Scholze の定理を通して，F クリスタルの $\mathfrak{X}_{\Delta}$ のある対象上での切断として統一的に解釈することが可能となった．結果はきれいだが，その証明は既存の理論にくらべてやさしく扱いやすくなった訳ではなく，先行研究の技術も駆使しつつ perfectoid による被覆に沿った降下を構成することにより証明されている．

注 3.8. (1) prismatic コホモロジーの log 構造付き形式スキーム版の定義とそれに対する定理 3.7の類似が Koshikawa と Yao により与えられている [32]，[33].

(2) 上に述べたクリスタリン表現の格子の絶対 prismatic site 上の F クリスタルによる解釈の O_K 上のスムース p 進形式スキームでの類似が Du-Liu-Moon-Shimizu [20] および Guo-Reinecke [27] により，独立に証明されている．Guo-Reinecke はさらに O_K 上のスムース p 進形式スキームの間の固有スムース射の相対コホモロジーと圏同値の compatibility も示している．

(3) G_K の semi-stable 表現の格子のなす圏が，$\mathrm{Spf}(O_K)$ に O_K の極大イデアルから定まる log 構造を与えたもの上の局所有限型自由な絶対 prismatic F クリスタルのなす圏と圏同値になることが，Du-Liu および Yao により独立に示されている [19], [48].

(4) クリスタリン site 上のクリスタルおよびそのコホモロジーは（局所的に）接続付き加群およびその de Rham 複体を用いて記述されることが知られている．q クリスタリン site, q-prismatic site 上のクリスタルでも q 接続などを用いた類似の記述が与えられている（[15], [37], [26], [44] など）.

4 p 進 Simpson 対応

複素数体上の射影代数多様体 X 上の Higgs 束：局所有限型自由 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{O}_X$ 線型な写像 $\theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ の組で $\theta \wedge \theta = 0$ をみたすもの，のうち semi-stable かつ Chern 類が消えるものと，$X(\mathbb{C})$ の基本群の有限次元 $\mathbb{C}$ 表現の間の対応が，1990 年代までの Weil, Narasimhan-Seshadri, Donaldson, Hitchin, Corlette, Simpson らの研究により知られていた．

p 進 Simpson 対応は，この p 進体上の代数多様体での類似を考えるもので，2000 年代半ばの，Faltings [23] と Deninger-Werner [17]（Higgs 場 θ が消えている場合）の独立な研究に始まる．$\mathcal{X}$ を O_K 上の固有スムースなスキーム[11]とする．p 進 Simpson 対応では，$\mathcal{X}_{\overline{K}}$ の基本群の有限次元連続 C 表現と $\mathcal{X}_C$ 上の Higgs 束の対応を考える．p 進 Hodge 理論のコホモロジーの比較定理の研究の際に Faltings 自身により証明されていたエタール・コホモロジーと Faltings コホモロジーの比較（定理 2.4の係数付き版）の帰結として，$\mathcal{X}_{\overline{K}}$ の基本群の有限次元連続 C 表現の圏は，$\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ 上の $((\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})_{m\in\mathbb{N}})_{\mathbb{Q}}$ 上のベクトル束の圏 $\mathbf{Vect}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$ へ忠実充満に埋め込まれることが分かる．

[11] Faltings は $\mathcal{X}$ が semi-stable あるいはより一般に log smooth な場合も扱っているが，log 構造を導入する必要があるためここでは簡単にスムースとする．

$$(\pi_1(\mathcal{X}_{\overline{K}})\text{ の有限次元連続 } C \text{ 表現}) \hookrightarrow \mathbf{Vect}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$$

圏 $\mathbf{Vect}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$ の対象は定理 2.1で考えた各 $\mathcal{U} = \mathrm{Spf}(R) \subset \mathcal{X}$ 上では，$G_R = \pi_1(\mathcal{U}_{\overline{K}})$ が連続半線型に作用する有限生成射影 $\widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}]$ 加群で記述される．Faltings は $\mathbf{Vect}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$ の対象や上の連続半線型表現を（$\mathcal{X}$ あるいは $\mathcal{U}$ 上の）一般化表現と呼んだ．定理 2.1の帰結として，$\mathcal{U}$ 上の一般化表現の圏は Γ_R が連続半線型に作用する有限生成射影 $\widehat{R}_\infty[\frac{1}{p}]$ 加群の圏と圏同値であることが示される．さらに $\mathcal{U}$ 上の一般化表現に small [12]という条件を課すと，Γ_R が連続線型に作用する有限生成射影 $\widehat{R_{O_{\overline{K}}}}[\frac{1}{p}]$ 加群のうち small なもののなす圏と圏同値になる[13]．Γ_R の線型作用の log をとることにより，$\widehat{R_{O_{\overline{K}}}}[\frac{1}{p}]$ 上の Higgs 束が構成される．Faltings はこの構成が座標 $t_1, \ldots, t_d$ の取り方によらないことを示し，これを $\mathcal{X}$ 上で貼り合わせることにより，$\mathcal{X}$ 上の small 一般化表現の圏 $\mathbf{Vect}_{\mathrm{small}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$ と $\mathcal{X}_C$ 上の small Higgs 束の圏の圏同値を構成した. [14]

$$\mathbf{Vect}_{\mathrm{small}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}) \simeq (\mathcal{X}_C\text{ 上の small Higgs 束})$$

ここで用いた $\mathcal{U}$ 上の局所理論では small の仮定は欠かせない．$\mathcal{X}$ 上での大域的な対応については，Faltings はさらに，$\mathcal{X}$ が O_K 上の曲線の場合に small の条件なしで対応を構成した. [15]

Faltings site の代わりに, Scholze が導入した adic 空間の proétale site 上のベクトル束でも同様の理論を展開できると期待するのは自然である．最近 B. Heuer により, C 上の固有スムースなリジッド空間 X に対して, X 上の Higgs 束のなす圏と, $\mathrm{X}_{\mathrm{proét}}$ 上の $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X}}$ 加群のベクトル束の圏の間の圏同値を証明する論文が書かれている [30]．Faltings と同様 X の $B^+_{\mathrm{dR}}/\xi^2 B^+_{\mathrm{dR}} = (A_{\mathrm{inf}}/\xi^2 A_{\mathrm{inf}})[\frac{1}{p}]$ へのスムースな持ち上げと，C の log 写像の section $\mathrm{Exp}\colon C \to 1 + \mathfrak{m}_C$ を一つとる．

$$\mathbf{Vect}(\mathrm{X}_{\mathrm{proét}}) \simeq (\mathrm{X}\text{ 上の Higgs 束})$$

局所的な p 進 Simpson 対応では，Γ_R の有限生成射影 $\widehat{R_{O_{\overline{K}}}}[\frac{1}{p}]$ 加群への作用の log をとることによって Higgs 束が構成された．この逆操作である exp は，small でない一般の Higgs 束では収束せず意味を持たない．この exp に対応する操作を大域的にいかに構成するかが問題解決の鍵となる．この論文では次のような流れで Higgs 束から $X_{\mathrm{proét}}$ 上のベクトル束を構成している．X 上の Higgs 束は X のエタール site 上で考え，ν を topos の射 $\mathrm{X}^\sim_{\mathrm{proét}} \to \mathrm{X}^\sim_{\mathrm{ét}}$ とする．X 上の Higgs 束 $\mathcal{M}$ の Higgs 場 θ を与えることは，X の接束 $\mathcal{T}_{\mathrm{X}}$ の対称テンソル環 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\mathcal{T}_{\mathrm{X}}$ から $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\mathcal{M}$ への $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ 代数の準同型を与えることと同値で，この写像は有限 $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ 代数商 B を経由する．ガロア・コホモロジーと微分加群を結びつける同型 (2.2) の座標によらない構成において導入された

[12] G_R 作用で安定な有限生成部分 $\widehat{R_{O_{\bar{k}}}}$ 加群の格子をうまくとると，mod p^α が G_R 不変な元で生成されるような有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ が存在する．

[13] Faltings の原論文 [23] ではこの証明が不完全であることが Abbes 氏により指摘された．Faltings の議論を修正する形で，著者の論文 [43] で圏同値の証明が与えられている．

[14] 厳密には貼り合わせの際に，$\mathcal{X}_{O_C}$ の $A_{\mathrm{inf}}/\xi^2 A_{\mathrm{inf}}$ へのスムースな持ち上げを一つとる必要がある．一般化表現を考えていることにより，Higgs 束に対する semi-stable，Chern 類の消滅という条件が不要となっている．この圏同値の詳細な基礎づけが Abbes-Gros-著者の本 [2] で与えられている．

[15] 厳密には，この構成では O_C の log 写像 $\log\colon 1 + \mathfrak{m}_C \to C$ の section を一つとる必要がある．Higgs 束から一般化表現の構成で圏 $\mathbf{Vect}_{\mathrm{small}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}})$ の対象の $\mathcal{X}_{\overline{K}}$ の有限エタール被覆に対する降下を使うが，その証明は論文に与えられていない．D. Xu は，基本群 $\pi_1(\mathcal{X}_{\overline{K}})$ の有限次元連続 C 表現の場合に，Deninger-Werner の手法と Faltings の手法をうまく組み合わせることにより対応を構成している [47].

Faltingsの議論を用いて，X の $(A_{\mathrm{inf}}/\xi^2 A_{\mathrm{inf}})[\frac{1}{p}]$ へのスムースな持ち上げから，$X_{\text{proét}}$ 上の $\widehat{\mathcal{O}}_X$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \nu^* B \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

が構成される．また X が固有スムースな場合，$\mathrm{Exp}\colon C \to 1+\mathfrak{m}_C$ を用いて

$$\log_B\colon H^1(X_{\text{proét}}, (\nu^* B)^\times) \to H^1(X_{\text{proét}}, \nu^* B)$$

の section Exp_B が構成される[16]．Exp_B による $\mathcal{E}$ の類の像から可逆 ν^*B 加群の層 $\mathcal{L}_\theta$ が得られる．Higgs 束 $(\mathcal{M},\theta)$ に対応する $X_{\text{proét}}$ 上のベクトル束は $\nu^*\mathcal{M} \otimes_{\nu^* B} \mathcal{L}_\theta$ で与えられる．

Faltingsの設定でも，$\mathcal{X}$ の $A_{\mathrm{inf}}/\xi^2 A_{\mathrm{inf}}$ 上のスムースな持ち上げから，$\mathcal{X}_{\mathrm{Falt}}$ 上での完全列(4.1)の類似が作れる．Higgs 束がsmallな場合は，完全列の適切な格子上でexponentialが収束し，small な場合の Faltings の p 進 Simpson 対応が局所的にも大域的にも再現される．Heuer の Exp_B の構成では，局所的な一般化表現を考える際に X のエタール被覆による局所化が許されていることが本質的に用いられていると思われる．O_K 上のスムース（あるいはlogスムース）モデル $\mathcal{X}$ の Zariski 位相（あるいは étale 位相）による局所化のみ許す Faltings site で類似の議論を考えることは，そのままでは難しく思われる．$\mathcal{X}$ の特殊ファイバーに沿う admissible blow-up で極限をとることも考えられるが，log スムースでないスキームの Faltings site の扱いが必要となり容易ではなさそうである．pro-étale site 上のベクトル束を扱う技術的な難しさはあるものの（その詳細を筆者は追っていない），局所化の自由度の高い Scholze の pro-étale site の優位性が出た証明と思われる．

注 4.2. (1) prism (A,I) と A/I 上スムースなアフィン p 進形式スキーム $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ に対し，$(\mathfrak{X}/(A,I))_{\Delta}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/A,\Delta}/I\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/A,\Delta}$ 加群の局所有限型自由クリスタルのなす圏は，Higgs 場がある種の収束条件をもつ $\mathfrak{X}$ 上の Higgs 束の圏と圏同値になることが Y. Tian により証明されている [41]．このことから，このようなクリスタルと一般化表現の対応として p 進 Simpson 対応を定式化する研究がある．(Min-Wang [36], Anschütz-Heuer-Le Bras [6] など）

(2) $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の情報も含む $\mathcal{X}_K$ の基本群 $\pi_1(\mathcal{X}_K)$ の有限次元連続 C 表現および一般化表現についての研究もある．(Liu-Zhu [35], 著者 [43], T. He [29] など).

(3) 基本群 $\pi_1(\mathcal{X}_{\overline{K}})$ の有限次元連続 C 表現に対応する Higgs 束の特徴づけが基本的な問題として残されている．曲線の場合は，D. Xu によりある種の特徴づけが与えられ，特に対応する Higgs 束は semi-stable で Chern 類が消えることが分かっている [47].

5 syntomic コホモロジーとその係数理論

$\mathcal{X}$ を O_K 上の固有スムースなスキームとする．ℓ が p と異なる素数であるとき，$\mathcal{X}$ 上の 1 の ℓ^n 乗根のなす有限群スキーム μ_{ℓ^n} は $\mathcal{X}$ 上有限エタールとなり，$\mathcal{X}$ のエタール site 上の局所定数層 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(1)$ を定める．そのテンソル積 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r) = (\mu_{\ell^n})^{\otimes r}$ $(r \in \mathbb{Z})$ を係数に持つコホモロジー $H^i(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r))$ は $\mathcal{X}$ の数論の「ℓ 進的性質」の研究において重要な役割を担う．syntomic コホモロジーは，その p 進コホモロジーにおける類似で，p 進 Hodge 理論におけるコホモロジーの比較定理の研究において Fontaine-Messing により導入された [24].

[16] より正確には $(\nu^*B)^\times$ のある部分群の層を用いている

Fontaine-Messing は $\mathcal{X}$ の mod p^n $\mathcal{X}_n$ の syntomic site $(\mathcal{X}_n)_{\mathrm{syn}}$ 上で $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(r)$ $(r\in\mathbb{N})$ の p 進類似 S_n^r を導入し，そのコホモロジーとして syntomic コホモロジーを定義したが，ここでは syntomic 複体を用いた K. Kato による構成 [31] を紹介する．k を O_K の剰余体，W を k に係数を持つ Witt 環 $W(k)$, $W_n=W/p^nW$，$\mathcal{X}_n$ を $\mathcal{X}$ の mod p^n とする．このとき $\mathcal{X}$ の syntomic 複体 $\mathscr{S}_{\mathcal{X},n}(r)$ $(r\in\mathbb{N}\cap[0,p-1])$ は，$\mathcal{X}_n$ の W_n 上のクリスタリン topos $(\mathcal{X}_n/W_n)^\sim_{\mathrm{crys}}$ から $\mathcal{X}_n$ のエタール topos $\mathcal{X}^\sim_{n,\text{ét}}$ への射影 $u_{\mathcal{X}_n/W_n}\colon(\mathcal{X}_n/W_n)^\sim_{\mathrm{crys}}\to\mathcal{X}^\sim_{n,\text{ét}}$ による構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n/W_n}$ の導来順像 $C_n=Ru_{\mathcal{X}_n/W_n*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n/W_n}$ とその上の Hodge filtration Fil^mC_n $(m\in\mathbb{Z})$ を用いて，次のように定義される．

$$\mathscr{S}_{\mathcal{X},n}(r):=\mathrm{fiber}(1-p^{-r}\varphi\colon\mathrm{Fil}^rC_n\to C_n)\quad(r\in\mathbb{N}\cap[0,p-1])$$

$\mathcal{X}$ の syntomic コホモロジーは $H^i(\mathcal{X}_{n,\text{ét}},\mathscr{S}_{\mathcal{X},n}(r))$ として定義される．

(C_n,Fil^mC_n) は，$\mathcal{X}$ 上局所的には次のように具体的に記述される．$\mathcal{X}$ 上のエタール・スキーム $\mathcal{U}$ に対し，$\mathcal{U}$ から W 上スムースなスキーム $\mathcal{Z}$ への closed immersion $i\colon\mathcal{U}\hookrightarrow\mathcal{Z}$ が与えられているとする．このとき i mod p^n の divided power envelope $\mathcal{X}_n\hookrightarrow\mathcal{D}_n\to\mathcal{Z}_n$ をとると，自然な同型 $C_n|_{\mathcal{U}_n}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{D}_n}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{Z}}\Omega^\bullet_{\mathcal{Z}/W}$, $\mathrm{Fil}^mC_n|_{\mathcal{U}_n}\cong\mathcal{J}_{\mathcal{D}_n}^{[m-\bullet]}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{Z}}\Omega^\bullet_{\mathcal{Z}/W}$ がある．ここで $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_n}$ は $\mathcal{X}_n\hookrightarrow\mathcal{D}_n$ を定義する $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_n}$ の PD イデアル，$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_n}^{[r]}$ はその rth divided power を表す．$\mathcal{Z}$ の Frobenius 持ち上げ $F_\mathcal{Z}$ を取ると，$p^{-r}\varphi$ の記述も得られる[17]．$0\le m\le p-1$ の場合にしか $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{D}_n}^{[m]})\subset p^m\mathcal{O}_{\mathcal{D}_n}$ が成り立たないため，上の定義では仮定 $0\le r\le p-1$ が必要となっている．[18]

Fontaine-Messing は syntomic コホモロジーから étale コホモロジーへ写像を構成することにより，$O_K=W$ で $\mathcal{X}_K$ の次元が p より小さい場合の p 進エタール・コホモロジーとクリスタリン, de Rham コホモロジーの比較定理の証明を与えたが，より精密に syntomic 複体のレベルで étale コホモロジーと結びつくことが知られている．

定理 5.1 (M. Kurihara [34]). $0\le r<p-1$ をみたす整数 r に対し，自然な distinguished triangle

$$\mathscr{S}_{\mathcal{X},n}(r)\to\tau_{\le r}i_{\text{ét}*}Rj_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)\to W_n\Omega^{r-1}_{\mathcal{X}_k,\log}[-r]\to$$

がある．ここで $\mathcal{X}_k$ は $\mathcal{X}$ の特殊ファイバー，i, j は closed immersion $\mathcal{X}_k\to\mathcal{X}$, open immersion $\mathcal{X}_K\to\mathcal{X}$ を表す．

注 5.2. (1) この定理より前に，Kato により $O_{\overline{K}}$ 上で同様の結果がえられていた [31]．この $O_{\overline{K}}$ 上の結果は上の定理から導くこともできる．また semi-stable reduction の場合も，O_K 上，$O_{\overline{K}}$ 上での類似が Kato により示されている．これらの variants では $W_n\Omega^{r-1}_{X_k,\log}$ の項は現れない．

(2) $r\ge p$ の場合も，例えば $p^r-\varphi$ の fiber を考えることにより syntomic 複体を定義することができる．一般の r の場合は，指数が n によらない up to isogeny で同様の定理が成り立つことが，semi-stable reduction の場合も含め，著者（[42] $O_{\overline{K}}$ 上）および Colmez-Nizioł（[16], O_K 上．ただし K が十分多くの 1 の p 冪根を含む場合）により示されている．

一般の r では，定理 5.1のような正確な形で étale コホモロジーとの比較が成り立つような syntomic 複体を，クリスタリン・コホモロジーの理論を用いて構成することは難しく，適切な syntomic 複体の定義を r の制限なしに与えることは長らく未解決であった．

[17] $p^{-r}\varphi$ の定義には，$F_\mathcal{Z}$ より誘導される $\mathcal{D}_{n+r}$ の Frobenius 持ち上げを用いる

[18] Fontaine-Messing は r が p 以上の場合も層 S_n^r を定義しているが，φ による像が p^r で割れるような Fil^r の部分層をとる人工的な操作を行なって構成している．

クリスタリン site $(\mathcal{X}_n/W_n)_{\mathrm{crys}}$ を $\mathcal{X}$ に伴う p 進形式スキーム $\mathfrak{X}$ の絶対 prismatic site $\mathfrak{X}_{\Delta}$ におきかえ，Hodge filtration の代わりに Frobenius 構造から定まる Nygaard filtration を用いることにより，この問題が解決された．

$O_{\overline{K}}$ 上のスムース・スキーム $\mathcal{X}$ の従来の syntomic 複体は $\mathcal{X}_n$ の A_{crys}/p^n 上のクリスタリン site を用いて定義できる．この prismatic コホモロジーでの類似では，O_C 上のスムース形式スキーム $\mathfrak{X}$ の $(A_{\mathrm{inf}}, ([p]_q))$ 上の prismatic site を考えるのが自然である．これは $\mathfrak{X}$ の絶対 prismatic site と一致する．topos の射 $u_{\mathfrak{X}/A_{\mathrm{inf}}}\colon (\mathfrak{X}/(A_{\mathrm{inf}}, ([p]_q)))_{\Delta}^{\sim} \to \mathfrak{X}_{\text{ét}}^{\sim}$ による構造層の導来順像 $Ru_{\mathfrak{X}/A_{\mathrm{inf}}*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/A_{\mathrm{inf}},\Delta}$ は A_{inf} コホモロジーで考えた $\mathfrak{X}_{\text{ét}}$ 上の複体 $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ と一致する．Bhatt-Morrow-Scholze は，prismatic コホモロジー論が導入されるより前に，$A\Omega_{\mathfrak{X}}$ の Breuil-Kisin 捻り $A\Omega_{\mathfrak{X}}\{r\}$ 上に Nygaard filtration $\mathcal{N}^{\geq m}$ $(m \in \mathbb{Z})$ を構成し，$\mathfrak{X}$ の syntomic 複体 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)_{\mathfrak{X}}$ を

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)_{\mathfrak{X}} = \mathrm{fiber}(\varphi_r - 1\colon \mathcal{N}^{\geq r}A\Omega_{\mathfrak{X}}\{r\} \to A\Omega_{\mathfrak{X}}\{r\})/p^n$$

により定義し，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)_{\mathfrak{X}}$ が nearby cycles 複体（の形式スキームでの類似）$R\psi_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)$ の truncation $\tau_{\leq r}R\psi_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)$ と同型になることを示した [11, Theorem 10.1]．

Bhatt-Lurie は，より一般の p 進形式スキームの絶対 prismatic コホモロジーの Breuil-Kisin 捻り上に Nygaard filtration を構成し，syntomic 複体 $\mathbb{Z}_p(r)$ を定義した [8, §7.4]．彼らは更にスキーム X に対し，$X[\frac{1}{p}]_{\text{ét}}$ 上の通常の $\mathbb{Z}_p(r)$ と X の p 進完備化 $\mathfrak{X}$ 上の syntomic 複体 $\mathbb{Z}_p(r)$ を貼り合わせることにより，X の syntomic 複体も定義し [8, §8.4]，X 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の Chern 類が syntomic コホモロジーの中に構成できることを示している [8, §9]．定理 5.1の類似については，$\mathbb{Z}$ 上の正則スキームを含むより一般の X に対して成り立つことが，Bhatt-Mathew により証明されている [9]．T. V. Bouis により独立に類似の結果も得られている [14]．

注 5.3. (1) syntomic コホモロジーの係数理論も Bhatt-Lurie, Drinfeld により研究が進められている [7], [18]．prismatic site 上のクリスタルをある stack（Bhatt-Lurie は Cartier-Witt stack と呼んでいる [8]）上の層として解釈する形で研究が進められている．

(2) 注 5.2 (2) のクリスタリン局所系に係数を持つ類似が，Abhinandan により得られている．Wach 加群の相対版を考え，それに Colmez-Niziołの手法を適用している [3]．

参考文献

[1] A. Abbes and M. Gros, *Les suites spectrales de Hodge-Tate*, Astérisque (2024), no. 448, xii+465.

[2] A. Abbes, M. Gros, and T. Tsuji, *The p-adic Simpson correspondence*, Annals of Mathematics Studies, vol. 193, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.

[3] Abhinandan, *Syntomic complex and p-adic nearby cycles*, arXiv:2308.10736v2 [math.NT].

[4] P. Achinger, *Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces*, Invent. Math. **210** (2017), no. 2, 453–499.

[5] F. Andreatta, *Generalized ring of norms and generalized (ϕ, Γ)-modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 4, 599–647.

[6] J. Anschütz, B. Heuer, and A.-C. Le Bras, *Hodge-Tate stacks and non-abelian p-adic Hodge theory of v-perfect complexes on rigid spaces*, arXiv:2302.12747v3 [math.AG].

[7] B. Bhatt, *Prismatic F-gauges*, https://www.math.ias.edu/ bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf

[8] B. Bhatt and J. Lurie, *Absolute prismatic cohomology*, arXiv:2201.06120v1 [math.AG].

[9] B. Bhatt and A. Mathew, *Syntomic complexes and p-adic étale Tate twists*, Forum Math. Pi **11** (2023), Paper No. e1, 26.

[10] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **128** (2018), 219–397.

[11] ———, *Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **129** (2019), 199–310.

[12] B. Bhatt and P. Scholze, *Prisms and prismatic cohomology*, Ann. of Math. (2) **196** (2022), no. 3, 1135–1275.

[13] ———, *Prismatic F-crystals and crystalline Galois representations*, Camb. J. Math. **11** (2023), no. 2, 507–562.

[14] T. V. Bouis, *Cartier smoothness in prismatic cohomology*, J. Reine Angew. Math. **805** (2023), 241–282.

[15] A. Chatzistamatiou, *q-crystals and q-connections*, arXiv:2010.02504 [math.AG].

[16] P. Colmez and W. Nizioł, *Syntomic complexes and p-adic nearby cycles*, Invent. Math. **208** (2017), no. 1, 1–108.

[17] C. Deninger and A. Werner, *Vector bundles on p-adic curves and parallel transport*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 4, 553–597.

[18] V. Drinfeld, *Prismatization*, Selecta Math. (N.S.) **30** (2024), no. 3, Paper No. 49, 150.

[19] H. Du and T. Liu, *A prismatic approach to $(\varphi, \widehat{G})$-modules and F-crystals*, arXiv:2107.12240 [math.NT].

[20] H. Du, T. Liu, Y. S. Moon, and K. Shimizu, *Completed prismatic F-crystals and crystalline $\mathbb{Z}_p$-local systems*, Compos. Math. **160** (2024), no. 5, 1101–1166.

[21] G. Faltings, *p-adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 255–299.

[22] ———, *Almost étale extensions*, no. 279, 2002, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, pp. 185–270.

[23] ———, *A p-adic Simpson correspondence*, Adv. Math. **198** (2005), no. 2, 847–862.

[24] J.-M. Fontaine and W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), Contemp. Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 179–207.

[25] I. Gaisin and T. Koshikawa, *Relative A_{inf}-cohomology*, arXiv:2206.07983v1 [math.NT].

[26] M. Gros, B. Le Stum, and A. Quirós, *Cartier transform and prismatic crystals*, Tunis. J. Math. **5** (2023), no. 3, 405–456.

[27] H. Guo and E. Reinecke, *A prismatic approach to crystalline local systems*, Invent. Math. **236** (2024), no. 1, 17–164.

[28] T. He, *Cohomological descent for Faltings' p-adic Hodge theory and applications*, arXiv:2104.12645v2 [math.AG].
[29] ———, *Sen operators and Lie algebras arising from Galois representations over p-adic varieties*, arXiv:2208.07519v1 [math.AG].
[30] B. Heuer, *A p-adic Simpson correspondence for smooth proper rigid varieties*, arXiv:2307.01303v2 [math.AG].
[31] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing)*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 207–251.
[32] T. Koshikawa, *Logarithmic prismatic cohomology I*, arXiv:2007.14037v3 [math.AG].
[33] T. Koshikawa and Z. Yao, *Logarithmic prismatic cohomology II*, arXiv:2306.00364v1 [math.AG].
[34] M. Kurihara, *A note on p-adic étale cohomology*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63** (1987), no. 7, 275–278.
[35] R. Liu and X. Zhu, *Rigidity and a Riemann-Hilbert correspondence for p-adic local systems*, Invent. Math. **207** (2017), no. 1, 291–343.
[36] Y. Min and Y. Wang, *p-adic Simpson correpondence via prismatic crystals*, arXiv:2201.08030v4 [math.AG].
[37] M. Morrow and T. Tsuji, *Generalised representations as q-connections in integral p-adic Hodge theory*, arXiv:2010.04059v2 [math.NT].
[38] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), 245–313.
[39] ———, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77.
[40] ———, *Perfectoid spaces: a survey*, Current developments in mathematics 2012, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 193–227.
[41] Y. Tian, *Finiteness and duality for the cohomology of prismatic crystals*, J. Reine Angew. Math. **800** (2023), 217–257.
[42] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 233–411.
[43] ———, *Notes on the local p-adic Simpson correspondence*, Math. Ann. **371** (2018), no. 1-2, 795–881.
[44] ———, *Prismatic crystals and q-Higgs fields*, arXiv:2403.11676 [math.AG].
[45] K. Česnavičius and T. Koshikawa, *The A_{inf}-cohomology in the semistable case*, Compos. Math. **155** (2019), no. 11, 2039–2128.
[46] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 1, 59–89.
[47] D. Xu, *Parallel transport for Higgs bundles over p-adic curves*, arXiv:2201.06697v2 [math.AG].
[48] Z. Yao, *$\mathbb{Z}_p$-lattices in semistable Galois representations*, arXiv:2308.15468 [math.NT].