The Hasse norm principle for some non-Galois extensions of square-free degree

北海道大学　大学院理学研究院数学部門　沖　泰裕
Yasuhiro Oki
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University

概要

本稿では, 代数的整数論の古典的な問題の 1 つである Hasse ノルム原理に関して著者が得た結果を紹介する. また, 証明で用いるノルム 1 トーラスおよびその Tate–Shafarevich 群に関する一般論についても説明する.

1　Hasse ノルム原理 (HNP)

本稿では, k を代数体とする. K/k を有限次拡大とするとき,

$$Ш(K/k) := (k^\times \cap \mathrm{N}_{K/k}(\mathbb{A}_K^\times))/\,\mathrm{N}_{K/k}(K^\times)$$

とおく. ここで, $\mathbb{A}_K^\times$ は K のイデール群である.

定義 1.1. K/k を有限次拡大とする. $Ш(K/k) = 0$ となるとき, K/k に対する **Hasse ノルム原理** (以下, HNP) が成り立つという.

すなわち, HNP とは, 代数体の有限次拡大に付随する大域的なノルム写像と局所的なノルム写像との「ずれ」について扱う問題である.

HNP の最も古典的な結果は, Hasse による以下の結果である.

命題 1.2 ([Has31]).　(i) K/k が巡回拡大のとき, $Ш(K/k) = 0$ が成り立つ.

(ii) $Ш(\mathbb{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})) \cong \mathbb{Z}/2$ が成り立つ.

命題 1.2 (i) は大域類体論の証明にも現れる重要な結果である. 一方, 命題 1.2 (ii) より HNP は一般には成り立たないことが分かる.

上記の結果は, 後に Tate によって Galois 拡大の場合に一般化された.

命題 1.3 ([Tat67, p. 198])**.** K/k を有限次 Galois 拡大とする. G の分解群からなる集合を $\mathcal{D}$ とするとき, 同型

$$\text{Ш}(K/k) \cong \operatorname{Coker}\left(\widehat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{D\in\mathcal{D}} \widehat{H}^{-3}(D,\mathbb{Z})\right)$$

が存在する. ここで, $\widehat{H}^i$ は i 次 Tate コホモロジー群である.

命題 1.3 より, HNP を満たさないような Galois 拡大を無限個構成することができる.

補題 1.4. (i) 任意の有限巡回群 G に対し, $\widehat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z})$ は自明である.

(ii) 正整数 d_1, d_2 について, $d_1 \mid d_2$ が成り立つとする. $G := \mathbb{Z}/d_1 \times \mathbb{Z}/d_2$ とおくと, 同型

$$\widehat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d_1$$

が存在する.

Proof. [Bro82, Theorem V.6.4] より, $\widehat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z}) \cong \bigwedge^2 G$ が成り立つ.

(i): G が巡回群のとき $\bigwedge^2 G = 0$ となることから従う.

(ii): 簡単な計算から, 同型

$$\bigwedge^2 G \cong \left(\bigwedge^2 \mathbb{Z}/d_1\right) \oplus \left(\bigwedge^2 \mathbb{Z}/d_1\right) \oplus (\mathbb{Z}/d_1 \otimes \mathbb{Z}/d_2)$$

が分かる. よって, 主張は (i) および同型 $\mathbb{Z}/d_1 \otimes \mathbb{Z}/d_2 \cong \mathbb{Z}/d_1$ から従う. ■

系 1.5. d を平方因子をもつ正整数とする. 任意の代数体 k に対し, 次数 d の拡大 K/k で HNP が成り立たないものが存在する.

Proof. 素数 p および正整数 d について, $d = p^2 d'$ が成り立つとする. このとき, [片山 85] と同じ手法から, 有限次 Galois 拡大 K/k で次の 2 条件を満たすものが存在する:

- $\mathrm{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/pd'$,
- K/k のすべての分解群は巡回的である.

一方, 補題 1.4 より, 以下が成り立つ:

$$\widehat{H}^{-3}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}) = 0, \quad \widehat{H}^{-3}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p.$$

よって, 主張は命題 1.3 より従う. ■

注意 1.6. 命題 1.2 (ii) の拡大は系 1.5 の証明で構成した Galois 拡大の条件を満たす. 実際, Legendre 記号の等式

$$\left(\frac{-3}{13}\right) = \left(\frac{13}{3}\right) = 1$$

および合同式

$$-39 \equiv 1 \bmod 8$$

より, $\mathbb{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$ の分解群はすべて巡回群となる.

2 主定理

前節の系 1.5 より, 平方因子をもつ正整数 d を与えたとき, HNP が不成立となるような次数 d の拡大が存在することを見た. そこで, d が平方因子をもたない場合に同様の主張が成り立つかどうかを考える. すなわち, 以下の問題について議論する.

(Q) d を平方因子をもたない正整数とする. このとき, 次数 d の拡大 K/k であって, HNP が不成立となるようなものが存在するか?

以下の主張より, 問題 (Q) は非 Galois 拡大を扱う必要があることが分かる.

命題 2.1 ([Gur78], [EM75, Theorem 2.3])**.** K/k を次数が平方因子をもたない Galois 拡大とすると, $\text{Ш}(K/k) = 0$ が成り立つ.

与えられた整数 d が素数のとき, (Q) は Bartels によって否定的に解決されている.

命題 2.2 ([Bar81, Lemma 4])**.** K/k を素数次拡大とすると, $\text{Ш}(K/k) = 0$ が成り立つ.

d が 15 以下の合成数については, 一部の k について (Q) は肯定的であることが星明考氏, 金井和貴氏, 山崎愛一氏の研究から導かれる.

命題 2.3 ([HKY22], [HKY23])**.** d を 15 以下の合成数とする. このとき, ある代数体 k およびその有限次拡大 K/k で, HNP が成り立たないようなものが存在する.

$d = 6$ のとき, 命題 2.3 は Drakokhrust と Platonov の結果として知られている ([DP87]).

注意 2.4. [DP87], [HKY22], [HKY23] では, 次数 15 以下の有限次拡大において HNP が成立するための必要十分条件を完全に決定している. 彼らの手法は問題 (Q) より詳細な情報が得られる反面, 以下の問題点がある.

- HNP が成り立たない有限次拡大の基礎体 k を制御することはできない. 例えば, 命題 2.3 において, $d = 14$ のとき k を有理数体 $\mathbb{Q}$ ととれるかどうかは未解決である.
- 証明の方針は, Galois 群の分類を用いて個別に計算を行うというものである. さらに, [HKY22], [HKY23] ではそれらの計算を計算機で行っている. したがって, 次数が大きい場合に彼らの手法を適用することは容易でない.

著者は, 従前とは異なる手法を採用することで, 任意の代数体 k と無限個の d に対して (Q) が肯定的であることを証明した.

定理 2.5 ([Oki23, Corollary 1.2])**.** *d を 3, 55, 91, 95 のいずれかで割り切れる平方因子をもたない合成数とする. 任意の代数体 k に対し, 次数 d の拡大 K/k で, HNP が成り立たないものが存在する.*

3 ノルム 1 トーラスと Tate–Shafarevich 群

以下の記号を用いる.

- $\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$ を k 上の乗法群スキームとする.
- K/k を有限次拡大, T を K 上のトーラスとするとき, $\operatorname{Res}_{K/k} T$ を T の k 上への Weil 制限とする. すなわち, k-代数 R に対し

$$(\operatorname{Res}_{K/k} T)(R) := T(R \otimes_k K)$$

  で定義される k 上のトーラスである.

定義 3.1. K/k を有限次拡大とするとき,

$$T_{K/k} := \operatorname{Ker}(\mathrm{N}_{K/k} \colon \operatorname{Res}_{K/k} \mathbb{G}_{m,K} \to \mathbb{G}_m)$$

は k 上のトーラスである. $T_{K/k}$ を K/k に付随する**ノルム 1 トーラス**と呼ぶ. 定義より, 以下の完全列を得る:

$$1 \to T_{K/k} \to \operatorname{Res}_{K/k} \mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/k}} \mathbb{G}_m \to 1.$$

定義 3.2. A を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-加群とするとき,

$$Ш^i(k, A) := \mathrm{Ker}\left(H^i(k, A) \to \prod_v H^i(k_v, A)\right)$$

を A の i 次 Tate–Shafarevich 群とよぶ. ここで, v は k の素点であり, k_v は k の素点 v による完備化である.

Hasse ノルム原理は, 対応するノルム 1 トーラスの Tate–Shafarevich 群を用いて記述できる.

命題 3.3 ([Ono63, p. 70], [PR94, p. 307])**.** K/k を有限次拡大とするとき, 同型

$$Ш(K/k) \cong Ш^1(k, T_{K/k})$$

が存在する.

Proof. k 上のトーラスの完全列

$$1 \to T_{K/k} \to \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/k}} \mathbb{G}_m \to 1$$

を考える. この完全列の Galois コホモロジーをとると, Hilbert 定理 90 より次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} k^\times / \mathrm{N}_{K/k}(K^\times) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "t \mapsto (t)_v"] & H^1(k, T_{K/k}) \arrow[d, "(\mathrm{Res}_{k_v/k})_v"] \\ \prod_v k_v^\times / \mathrm{N}_{K/k}((K \otimes_k k_v)^\times) \arrow[r, "\cong"] & \prod_v H^1(k_v, T_{K/k}). \end{tikzcd}$$

よって, 主張は上の図式の縦 2 つの写像に関する核をとることで得られる. ■

定理 3.3 の同型の右辺について, より扱いやすい対象に書き換える.

定義 3.4. T を k 上のトーラスとするとき,

$$X^*(T) := \mathrm{Hom}_{\overline{k}\text{-group}}(T \otimes_k \overline{k}, \mathbb{G}_{m,\overline{k}})$$

とする. これは (離散位相に関して) 連続な $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-作用をもつ有限生成自由アーベル群である. $X^*(T)$ を T の**指標群**とよぶ.

K/k を有限次拡大, T を K 上のトーラスとする. K を含む k 上の Galois 拡大体 $\widetilde{K}$ をとり, $G := \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k)$, $H := \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ とおく. このとき, G-加群としての同型

$$X^*(\mathrm{Res}_{K/k}\,T) \cong \mathrm{Ind}_H^G\,X^*(T) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} X^*(T)$$

が存在する. 特に, $X^*(\mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}[G/H]$ が成り立つ.

命題 3.5 (Poitou–Tate 双対性; [PR94, Theorem 6.10])**.** T を k 上のトーラスとするとき, 同型

$$Ш^1(k,T) \cong Ш^2(k, X^*(T))^\vee$$

が存在する. ここで, $(-)^\vee$ は Pontryagin 双対である.

命題 3.3 と命題 3.5 をまとめると, 以下の主張が従う.

系 3.6. K/k を有限次拡大とするとき, 同型

$$Ш(K/k) \cong Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))^\vee$$

が存在する.

注意 3.7. 系 3.6 の右辺は有限群のコホモロジーとして記述することができる. 実際, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の $X^*(T_{K/k})$ への作用が有限商 G を経由すると仮定する. G に対応する有限次 Galois 拡大の分解群からなる集合を $\mathcal{D}$ とおくと, 自然な同型

$$Ш^2(k, X^*(T_{K/k})) \cong \mathrm{Ker}\left(H^2(G, X^*(T_{K/k})) \to \bigoplus_{D\in\mathcal{D}} H^2(D, X^*(T_{K/k})) \right)$$

が存在する.

注意 3.8. 命題 1.3 (Tate の定理) は, 系 3.6 と自然な完全列

$$0 \to T_{K/k} \to \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/k}} \mathbb{G}_m \to 1$$

より誘導される指標群の Galois コホモロジーに関する考察を組み合わせることで得られる. また, [DP87] の理論も上記の手法を基にしている. 詳しくは [金井 20] を参照せよ.

4 主定理の証明の概略

簡単のため, 本稿では d の素因数が 2 つの場合のみ扱う. すなわち,

$$d \in \{3p \mid p \neq 3\} \cup \{55, 91, 95\} \tag{1}$$

を満たす状況に限定して定理 2.5 の証明を解説する. 一般の場合については (1) を満たすケースに帰着可能である.

補題 4.1. p を 3 でない素数, ℓ を奇素数かつ p^2-1 の約数とする. $G' := \mathbb{Z}/\ell$ とするとき, 以下を満たす G' の 2 次元 $\mathbb{F}_p$-表現 S_p が存在する:

(i) $S_p^{G'} = \{0\}$,

(ii) G' の作用で安定でない S_p の 1 次元部分空間が存在する.

Proof. 準同型

$$G' \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p);\ 1 \bmod \ell \mapsto \begin{cases} \mathrm{diag}(\zeta_\ell, \zeta_\ell^{-1}) & (p \equiv 1 \bmod \ell), \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \zeta_\ell + \zeta_\ell^p \end{pmatrix} & (p \equiv -1 \bmod \ell) \end{cases}$$

に対応する 2 次元 $\mathbb{F}_p$-表現を S_p とすればよい. ■

補題 4.2. p, ℓ を素数とし, S_p を $\mathbb{Z}/\ell$ の有限次元 $\mathbb{F}_p$-表現とする. $G := S_p \rtimes \mathbb{Z}/\ell$ とおく. このとき, Galois 群が G と同型であるような有限次 Galois 拡大 $\widetilde{K}/k$ が存在する.

Proof. $\mathbb{Z}/\ell$ と S_p はアーベル群であるから, 定義より G は可解群である. よって, 主張は Shafarevich による可解群に対する Galois 逆問題の証明から従う ([NSW00, Chapter IX, §6] を参照). ■

以下, 有限アーベル群 A および素数 p に対し,

$$A[p^\infty] := \{a \in A \mid \text{ある } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ に対し } p^n a = 0\}$$

とおく.

定理 4.3. 記号は補題 4.1 と同じとする. 特に, $2 < \ell \mid p^2-1$, $G' := \mathbb{Z}/\ell$, $G := S_p \rtimes G'$ であり, S_p は G' の 2 次元 $\mathbb{F}_p$-表現である. L を G' の作用で安定でない S_p の 1 次元部分空間とし, $H := L \rtimes \{0\}$ とおく. また, $\widetilde{K}/k$ を $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k) \cong G$ となるような有限次 Galois 拡大とする ($\widetilde{K}/k$ の存在は補題 4.2 より従う).

(i) K/k の Galois 閉包は $\widetilde{K}/k$ に一致する.

(ii) $Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))[p^\infty]$ は $\mathbb{Z}/p$ と同型である.

定理 2.5 は, 定理 4.3 と系 3.6 を組み合わせることで直ちに従う. 実際, 素数のペア (p, ℓ) を $(p, 3)$ $(p \neq 3)$, $(11, 5)$, $(13, 7)$, $(19, 5)$ のいずれかとおけば, 求める結果を得る.

Proof. (i): L が G' の作用で安定でないことから従う.

(ii): G の唯一の p-Sylow 部分群 $V \rtimes \{0\}$ に対応する $\widetilde{K}/k$ の中間体を K_0 とおく. 定義より, これは K/k の中間体である. よって, K/K_0 に関するノルム写像は k 上のトーラスの完全列

$$1 \to \operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0} \to T_{K/k} \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/K_0}} T_{K_0/k} \to 1$$

を誘導する. この完全列の指標群の G-係数群コホモロジーを取ることで, 完全列

$$\begin{aligned} H^1(G, X^*(T_{K/k})) \to H^1(G, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) \to H^2(G, X^*(T_{K_0/k})) \\ \xrightarrow{\widehat{N}_{K/K_0}} H^2(G, X^*(T_{K/k})) \to H^2(G, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) \end{aligned}$$

を得る. いま, 注意 3.7 より $Ш^2(k, X^*(T_{K/k})) \subset H^2(G, X^*(T_{K/k}))$ が成り立つ. よって, $Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))$ の $\widehat{N}_{K/K_0}$ による逆像を H' とおくと, 次の完全列が従う:

$$\begin{aligned} H^1(G, X^*(T_{K/k})) \to H^1(G, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) \xrightarrow{\delta} H' \\ \xrightarrow{\widehat{N}_{K/K_0}} Ш^2(k, X^*(T_{K/k})) \to Ш^2(k, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})). \end{aligned}$$

一方, 簡単な計算から $H^1(G, X^*(T_{K/k}))$ の位数は p と互いに素であり, $H^1(G, X^*(T_{K/k}))$ は $\mathbb{Z}/p$ と同型であることが分かる. よって, δ は単射である. また, Shapiro の補題と命題 2.2 より $Ш^2(k, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) = 0$ が成り立つ. 以上より, 完全列

$$0 \to \mathbb{Z}/p \to H'[p^\infty] \to Ш^2(k, X^*(T_{K/k})) \to 0$$

を得る. ゆえに, $H'[p^\infty] = H^2(G, X^*(T_{K_0/k}))$ が分かれば,

$$H^2(G, X^*(T_{K_0/k})) \cong S_p \cong (\mathbb{Z}/p)^2$$

より求める結果を得る. この同型は, Mackey 分解を用いることで, すべての分解群 D に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} H^1(G, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\operatorname{Res}_{G/D}"] & H^2(G, X^*(T_{K_0/k})) \arrow[d, "\operatorname{Res}_{G/D}"] \\ H^1(D, X^*(\operatorname{Res}_{K_0/k} T_{K/K_0})) \arrow[r, "\delta"] & H^2(D, X^*(T_{K_0/k})) \end{tikzcd}$$

を詳細に調べることで証明することができる. 詳しくは [Oki23, Section 4.2] を参照せよ. ■

注意 4.4. 定理 4.3 で構成した拡大 K/k について, $Ш(K/k) = Ш(K/k)[p^\infty]$ であることが証明できる. 特に, $Ш(K/k)$ は $\mathbb{Z}/p$ と同型である. また, $(p, \ell) = (2, 3)$ および $(p, \ell) = (5, 3)$ のとき, 上述の構成はそれぞれ [DP87] および [HKY22] における HNP の反例の 1 つと一致する.

5 補足

p を素数とする. [Oki23] では, 有限次拡大 K/k が以下 2 つの条件を満たすときに $Ш(K/k)[p^\infty]$ の構造を完全に決定している:

(a) $[K : k]$ の p-order は 1 である,

(b) $\widetilde{K}/k$ を K/k の Galois 閉包とするとき, $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k)$ の p-Sylow 部分群は正規部分群である.

以下, このことについて説明する.

補題 5.1. K/k を素数 p に関して条件 (a), (b) を満たす有限次拡大とする. $\widetilde{K}/k$ を K/k の Galois 閉包とすると, 同型

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k) \cong S_p \rtimes G', \quad \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k) \cong L \rtimes H'$$

が存在する. ここで, S_p は 0 でない有限次元 $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間, L は S_p の余次元 1 の部分空間, G' は位数が p と互いに素な有限群, H' は G' の部分群である.

定理 4.3 で扱う有限次拡大は, 補題 5.1 のうち $\dim_{\mathbb{F}_p}(V) = 2$ の場合に該当する.

Proof. Schur–Zassenhaus の定理と条件 (a), (b) より従う. 詳しくは [Oki23, Lemma 4.4 (i), (iii)] の証明を参照せよ. ■

定理 5.2. 有限次拡大 K/k は素数 p に関して条件 (a), (b) を満たすとする. 同型 $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k) \cong S_p \rtimes G'$ を補題 5.1 の通りとする. $\dim_{\mathbb{F}_p}(S_p) \neq 2$ ならば, 等式

$$Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))[p^\infty] = 0$$

が成り立つ.

Proof. $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k)$ の唯一の p-Sylow 部分群 $S_p \rtimes \{1\}$ に対応する $\widetilde{K}/k$ の中間体を K_0 で表す. また, $\mathrm{Res}_{K_0/k}$ と $\mathrm{Cor}_{K_0/k}$ をそれぞれ Galois コホモロジーにおける K_0/k に

付随する制限写像と corestriction 写像とする．このとき,

$$\mathrm{Cor}_{K_0/k} \circ \mathrm{Res}_{K_0/k} = [K_0 : k]$$

である ([NSW00, (1.5.7) Corollary]). K_0 の定義より $[K_0 : k]$ は p と互いに素であるから, $\mathrm{Res}_{K_0/k}$ は単射

$$Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))[p^\infty] \hookrightarrow Ш^2(K_0, X^*(T_{K/k}))$$

を誘導する．一方, K と K_0 の定義から, d 個の K_0 の p 次 Galois 拡大 $K_1, \ldots, K_d$ および K_0-代数としての同型 $K \otimes_k K_0 \cong \prod_{i=1}^d K_i$ が存在する．特に,

$$T_{K/k} \otimes_k K_0 \cong \mathrm{Ker}\left((\mathrm{N}_{K_i/k})_i \colon \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{K_i/K_0} \mathbb{G}_{m,K_i} \to \mathbb{G}_{m,K_0} \right)$$

が成り立つ．また, $\widetilde{K}$ の定義より $K_1, \ldots, K_d$ の合成体は $\widetilde{K}$ に一致する．いま, 仮定より

$$[K_1 \cdots K_d : K_0] = [\widetilde{K} : K_0] = p^{\dim_{\mathbb{F}_p}(S_p)} \neq p^2$$

であるから, 主張は以下の命題 5.3 より従う． ■

命題 5.3 ([BLP19, Theorem 8.5])**.** $K_1, \ldots, K_d$ を k の p 次 Galois 拡大とし,

$$T := \mathrm{Ker}\left((\mathrm{N}_{K_i/k})_i \colon \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{K_i/k} \mathbb{G}_{m,K_i} \to \mathbb{G}_m \right)$$

とおく．$[K_1 \cdots K_d : k] \neq p^2$ ならば

$$Ш^2(k, X^*(T)) = 0$$

が成り立つ.

注意 5.4. 命題 5.3 で現れるトーラスは多重ノルム 1 トーラスと呼ばれるものである．第 3 節で紹介した理論は, 多重ノルム 1 トーラスと HNP の多重化版 (多重ノルム原理) との関係に拡張することができる.

実は, 補題 5.1 の S_p が $\mathbb{F}_p$ 上 2 次元であるとき, S_p に対する補題 4.1 の条件 (i), (ii) は $Ш^2(k, X^*(T_{K/k}))[p^\infty] \neq 0$ を特徴づけることが証明できる．したがって, 定理 5.2 と定理 4.3 を組み合わせることで, (a), (b) を満たす有限次拡大 K/k における $Ш^2(k, T_{K/k})[p^\infty]$ の解析が完了する．詳しくは [Oki23, Theorem 4.11] とその証明を参照せよ.

謝辞. 2023 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「代数的整数論とその周辺」にて講演の機会を与えてくださった, プログラム委員の千田 雅隆先生, 三枝 洋一先生, 甲斐 亘先生に感謝申し上げます. また, 本研究は JSPS 科研費 (22KJ0041) の助成を受けて実施されました.

参考文献

[Bar81] H. J. Bartels, *Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen*, J. Alg. **70** (1981), 179–199.

[BLP19] E. Bayer-Fluckiger, T.-Y. Lee, R. Parimala, *Hasse principle for multinorm equations*, Adv. Math. **356** (2019), 106818.

[Bro82] K. Brown, *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math., 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[DP87] Y. A. Drakokhrust, V. P. Platonov, *The Hasse norm principle for algebraic number fields* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50** (1986), 946–968; translation in Math. USSR-Izv. **29** (1987), 299–322.

[EM75] S. Endo, T. Miyata, *On a classification of the function fields of algebraic tori*, Nagoya Math. J. **56** (1975), 85–104.

[Gur78] S. Gurak, *On the Hasse norm principle*, J. Angew. Math. **299**/**300** (1978), 16–27.

[Has31] H. Hasse, *Beweis eines Satzes und Wiederlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol*, Nschrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1931), 64–69.

[HKY22] A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki, *Norm one tori and Hasse norm principle*, Math. Comput. **91** (2022), 2431–2458.

[HKY23] A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki, *Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree* 12 *case*, J. Number Theory **244** (2023), 84–110.

[NSW00] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer Verlag, 2000.

[Oki23] Y. Oki, *The Hasse norm principle for some non-Galois extensions of square-free degree*, preprint, arXiv:2307.12550, 2023.

[Ono63] T. Ono, *On Tamagawa numbers of algebraic tori*, Ann. Math. (2) **78** (1963), 47–73.

[PR94] V. P. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Pure and applied mathematics, 139, Academic Press, 1994.

[Tat67] J. Tate, *Global class field theory*, Algebraic Number Theory, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union, Edited by J. W. S. Cassels and F. Flölich, 162–203, Academic Press, London; Thompson Book Co., Inc., Washington, D.C. 1967.

[片山 85] 片山 真一, Algebraic torus の玉河数について, 数学, **37**, no. 1 (1985), 81–83.

[金井 20] 金井 和貴, Norm one tori and Hasse norm principle, 第 27 回整数論サマースクール報告集「構成的ガロア逆問題と不変体の有理性問題」(2020), 239–254.