Selmer 複体と p 進 BSD 予想

佐野 昂迪（大阪公立大学）
Takamichi Sano (Osaka Metropolitan University)

概要

Mazur-Tate-Teitelbaum は 1986 年に BSD 予想の p 進類似である p 進 BSD 予想を定式化した．同じ頃に，Perrin-Riou，Schneider，Jones は，Mazur-Tate-Teitelbaum 予想が岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導かれることを示した．一方，Bertolini-Darmon は 1996 年に Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化した．本稿では，Bertolini-Darmon の予想が Heegner 点の岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導かれることを示す．証明には Nekovář の Selmer 複体を用いる．本稿は論文 [San23] の一部の要約である．

1 序

本稿のテーマは p 進 BSD 予想である[*1]．まずは通常の BSD 予想の復習をしよう．

E を $\mathbb{Q}$ 上で定義された楕円曲線とし，$r := \mathrm{rank}(E(\mathbb{Q}))$ とおく．$L(E,s)$ を E の Hasse-Weil L 関数とする．このとき，BSD 予想は次のように述べられる．

予想 1.1 (BSD 予想)**.**

(i) $\mathrm{ord}_{s=1}L(E,s) = r$ が成り立つ．

(ii) $L^{(r)}(E,1) := \lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}L(E,s)$ とおくと，

$$L^{(r)}(E,1) = \frac{\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})\cdot \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}^2}\cdot \Omega_E \cdot R_E$$

が成り立つ．ここで，

- Ш$(E/\mathbb{Q})$: Tate-Shafarevich 群[*2],
- $\mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})$: 玉河因子の積,
- Ω_E: 実 Néron 周期,
- R_E: Néron-Tate レギュレーター

である．

次に，Mazur-Tate-Teitelbaum [MTT86] によって定式化された p 進 BSD 予想を述べよう．簡単のため，p を奇素数とする．$\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし，$\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ とおく．岩澤代数を $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とし，$I := \ker(\Lambda \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p)$ を augmentation イデアルとする．p 進 BSD 予想は E の p で

*1 “BSD”ばもちろん Birch と Swinnerton-Dyer を指す．
*2 有限であると予想されており，このことも BSD 予想の一部である．

の還元によって定式化が異なるが，簡単のため，ここでは E が p で良い通常（good ordinary）還元を持つ場合のみ考える．このとき，$a_p := p+1-\#E(\mathbb{F}_p)$ は p で割れないので，多項式 x^2-a_px+p は p 進単数根 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ を持つ[*3]．また，E の p 進 L 関数

$$\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

及び p 進レギュレーター

$$R_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r/I^{r+1}$$

が構成できる．p 進 BSD 予想は次のように述べられる．

予想 1.2 (p 進 BSD 予想（Mazur-Tate-Teitelbaum [MTT86]）)**.**

(i) $\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r$ が成り立つ．
(ii) $\mathcal{L}_p$ の $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r/I^{r+1}$ における像を $\mathcal{L}_p^{(r)}$ と表すと，

$$\mathcal{L}_p^{(r)} = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})\cdot \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}^2}\cdot R_p$$

が成り立つ[*4]．

さて，p 進 BSD 予想に関して，次の古典的な結果が知られている．

定理 1.3 (Perrin-Riou [Per82], Schneider [Sch85])**.** 次を仮定する．

- $\text{Ш}(E/\mathbb{Q})$ の p 部分 $\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty]$ は有限である．
- p 進高さペアリングは非退化（すなわち，$R_p \neq 0$）である．

このとき，（E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する）岩澤主予想が正しければ，

$$\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r$$

が成り立ち，さらに

$$\mathcal{L}_p^{(r)} = u\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty]\cdot \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}^2}\cdot R_p$$

を満たす単数 $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ が存在する．

大雑把に言うと，定理 1.3 は

「岩澤主予想が正しければ，p 進 BSD 予想は p 進単数のずれを除いて正しい」

ということを述べている．ここでは E が p で良い通常還元を持つ場合のみに限って述べたが，乗法的（multiplicative）還元を持つ場合は Jones [Jon89] によって，良い超特異（good supersingular）還元を持つ場合は Perrin-Riou [Per93] によってこのタイプの結果が得られている．

[*3] もう一つの根は p 進単数ではない．
[*4] $\text{Ш}(E/\mathbb{Q})$ の有限性を仮定している．

最近の進展として，Burns-Kurihara-Sano [BKS] は，加藤のオイラー系（[Kat04] 参照）を用いて定理 1.3 の別証明を与えた．この結果は，乗法的還元及び良い超特異還元の場合も含み，さらに，仮定 “$R_p \neq 0$” も外している．[BKS] における証明の方法を少し説明すると，まず，加藤のオイラー系に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化し（「一般 Perrin-Riou 予想（generalized Perrin-Riou conjecture)」という)，そこから p 進 BSD 予想を導いた．また，この一般 Perrin-Riou 予想を岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導くことで，定理 1.3 の別証明を与えたのである．つまり，[BKS] は

$$\text{岩澤主予想} \overset{p\text{ 進単数のずれ}}{\Rightarrow} \text{一般 Perrin-Riou 予想} \Rightarrow p\text{ 進 BSD 予想}$$

という流れで定理 1.3 を証明した．ちなみに，p 進 BSD 予想とは異なり，一般 Perrin-Riou 予想の定式化は E の p での還元によらず，特に加法的還元を持つ場合にも定式化される．

一方，Bertolini-Darmon [BeDa96] は，Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化した．筆者は [San23] において，定理 1.3 の Bertolini-Darmon 予想に対する類似を証明した．すなわち，(Heegner 点に対する）岩澤主予想が正しければ，Bertolini-Darmon 予想は p 進単数のずれを除いて正しいことを示したのである．証明には Nekovář の Selmer 複体（[Nek06] 参照）を本質的に用いる．また，[San23] の方法を用いると，定理 1.3 の Selmer 複体を用いた別証明を与えることもできる（ここでも仮定 “$R_p \neq 0$” は外せる)．この別証明には加藤のオイラー系を用いず，[BKS] において与えた定理 1.3 の別証明よりも「直接的」である．なお，この直接的な方法は，乗法的還元の場合にも適用可能だが，超特異還元の場合は良い “integrality” を持つ Selmer 複体が（現時点では）うまく定義されないので適用できないことに注意しておく．

本稿の構成は以下の通りである．まず，§2 で Bertolini-Darmon 予想の定式化をし，主結果（定理 2.2）を述べる．§3 で Selmer 複体の定義を述べる．§4 で Heegner 点に対する岩澤主予想の定式化をする．§5 で主結果の証明に用いる代数的な「降下理論」について述べる．§6 で主結果の証明を与える．最後に，§7 で定理 1.3 の Selmer 複体を用いた証明を与える．

2 Bertolini-Darmon 予想

本節では，Bertolini-Darmon によって定式化された，Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を述べる（[BeDa96, Conjecture 4.5(1)], [AgCa21, Conjecture 3.11] 参照)．また，それに対する定理 1.3 の類似を述べる（定理 2.2 参照)．

E を $\mathbb{Q}$ 上で定義された楕円曲線とし，その導手を N とする．p を奇素数とし，E は p で良い通常還元を持つとする．K を虚 2 次体とし，p は K で不分岐とする．次の「Heegner 条件」を仮定する：

$$N \text{ の任意の素因子は } K \text{ で分解する．}$$

K_∞/K を反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし，$\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, $I := \ker(\Lambda \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p)$ とおく[*5]．また，$r := \mathrm{rank}(E(K))$, $r^+ := \mathrm{rank}(E(\mathbb{Q}))$, $r^- := r - r^+$ とおく．このとき，Bertolini-Darmon は

[*5] §1 では円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対して Γ, Λ, I を定義したが，本節では反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K_∞/K しか考えないので，同じ記号を用いることにする．

Heegner 点を用いて p 進 L 関数の類似

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)$$

を構成した．また，「導来（derived）p 進レギュレーター」

$$R_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu/I^{\nu+1})$$

を構成した[*6]．ここで

$$\nu := 2(\max\{r^+, r^-\} - 1)$$

である[*7]．Bertolini-Darmon 予想は次のように述べられる．

予想 2.1 (Bertolini-Darmon 予想)**.**

(i) $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu)$ が成り立つ．

(ii) $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}$ の $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu/I^{\nu+1})$ における像を $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)}$ と表すと，

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu/I^{\nu+1})$$

であり，

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} = A_p^2 \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K) \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\mathrm{tors}}^2} \cdot R_p^{\mathrm{BD}}$$

が成り立つ．ここで

$$A_p := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\alpha^2} & p \text{ が } K \text{ で惰性するとき，} \\ \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 & p \text{ が } K \text{ で分解するとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

である．

次の定理が本稿の主結果である．

定理 2.2. $\text{Ш}(E/K)$ の p 部分 $\text{Ш}(E/K)[p^\infty]$ は有限であると仮定する．このとき，Heegner 点に対する岩澤主予想（以下の予想 4.1 参照）が正しければ，

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu)$$

が成り立ち，さらに

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} = u \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\mathrm{tors}}^2} \cdot R_p^{\mathrm{BD}}$$

を満たす単数 $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ が存在する．

[*6] 構成には Bertolini-Darmon [BeDa95] が導入した「導来 p 進高さ（derived p-adic height）」を用いる．導来 p 進高さは，Howard [How04]，Nekovář [Nek06, §11.5] により異なる構成法が与えられている．本稿では，Nekovář による定義を用いる（定義 6.1 参照）．

[*7] Heegner 条件を仮定すると，r は奇数になることが知られているので，$\nu \geq 0$ である．

3 Selmer 複体

定理 2.2 の証明には Nekovář の Selmer 複体を用いる．本節では，Selmer 複体の定義を述べる．

K を一般の代数体とする．K の代数閉包 $\overline{K}$ を固定する．p の上の K の素点全体の集合を S_p とする．K の無限素点全体の集合を S_∞ とする．S を，K の素点の有限集合で，$S_p \cup S_\infty$ を含むものとする．また，$S_f := S \setminus S_\infty$ とおく．K_S/K を，S の外で不分岐な最大ガロア拡大とし，$G_{K,S} := \mathrm{Gal}(K_S/K)$ とおく．K の各素点 v に対し，v の上の $\overline{K}$ の素点を固定し，その分解群を K_v の絶対ガロア群 G_{K_v} と同一視する．K の有限素点 v に対し，K_v^{ur}/K_v を最大不分岐拡大とし，$I_v := G_{K_v^{\mathrm{ur}}} \subset G_{K_v}$ を惰性群とする．

X を $\mathbb{Z}_p$ 加群で，$G_{K,S}$ の連続な作用が入っているものとする．$\mathbf{R}\Gamma(G_{K,S}, X) := C^\bullet(G_{K,S}, X)$ を，連続ガロア・コホモロジーの複体とする（例えば [Ser02, §I.2.2] 参照）．$\mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X)$ なども同様に定義される．有限素点 v に対し，不分岐ガロア・コホモロジーの複体を

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{ur}}(G_{K_v}, X) := \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ur}}/K_v), X^{I_v})$$

と定める．このとき，自然な膨張（Inflation）射

$$\mathrm{Inf} : \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{ur}}(G_{K_v}, X) \to \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X)$$

がある．これを用いて

$$\mathbf{R}\Gamma_{/\mathrm{ur}}(G_{K_v}, X) := \mathrm{Cone}\left(\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{ur}}(G_{K_v}, X) \xrightarrow{-\mathrm{Inf}} \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X)\right)$$

とおく．

定義 3.1 ([Nek06, §6.1] 参照)**.** 次が与えられているとする：

$$(*) \quad \text{各 } v \in S_p \text{ に対し，} \mathbb{Z}_p[G_{K_v}] \text{ 加群の完全列 } 0 \to X_v^+ \to X \to X_v^- \to 0.$$

これに対して，Selmer 複体[*8]を

$$\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, X) := \mathrm{Cone}\left(\mathbf{R}\Gamma(G_{K,S}, X) \to \bigoplus_{v \in S_p} \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X_v^-) \oplus \bigoplus_{v \in S_f \setminus S_p} \mathbf{R}\Gamma_{/\mathrm{ur}}(G_{K_v}, X)\right)[-1]$$

と定める（右辺の射は制限写像から誘導される）．これは擬同型を除いて S のとり方によらない ([Nek06, Proposition 7.8.8(ii)] 参照)．

注意 3.2. E を K 上定義された楕円曲線とし，S は悪い素点[*9]をすべて含むとする．このとき，X として E の p 進 Tate 加群 $T_p(E)$ がとれる．E は任意の $v \in S_p$ で良い通常還元を持つと仮定すると，$(*)$ として次の標準的なものがとれる：$v \in S_p$ に対し，

$$0 \to T_p(\widehat{E}_v) \to T_p(E) \to T_p(\widetilde{E}_v) \to 0.$$

ここで $\widehat{E}_v, \widetilde{E}_v$ は，E を $\mathcal{O}_{K_v}$ 上の楕円曲線とみなしたときの，それぞれ E の形式群，E の mod v での還元を表す．$T_p(\widehat{E}_v)$, $T_p(\widetilde{E}_v)$ は階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群である．

[*8] より正確には，「Greenberg 局所条件」に関する Selmer 複体である（[Nek06, §7.8] 参照）．

[*9] すなわち，E が v で悪い還元を持つような K の素点 v のこと．

4　Heegner 点に対する岩澤主予想

§2 の設定に戻る．本節では，Heegner 点に対する岩澤主予想を定式化する．

注意 3.2 のように，K の素点の有限集合 S を，$S_p \cup S_\infty$ 及び悪い素点をすべて含むようにとる．$T := T_p(E)$ を E の p 進 Tate 加群とする．このとき，

$$\mathbb{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

とおく．これに $G_{K,S}$ の作用を

$$\sigma \cdot (t \otimes \lambda) := \sigma t \otimes \overline{\sigma}^{-1} \lambda \quad (\sigma \in G_{K,S},\ t \in T,\ \lambda \in \Lambda)$$

で定める．ここで $\overline{\sigma} \in \Gamma$ は，自然な全射 $G_{K,S} \twoheadrightarrow \Gamma$ による σ の像を表す．

E は p で良い通常還元を持つと仮定しているので，注意 3.2 で述べたように，各 $v \in S_p$ に対して $\mathbb{Z}_p[G_{K_v}]$ 加群の標準的な完全列

$$0 \to T_v^+ \to T \to T_v^- \to 0$$

がある．これに対して Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,T)$ を定義する（定義 3.1 参照）．$\mathbb{T}$ に対する Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,\mathbb{T})$ も同様に定義される．

有限生成 Λ 加群の有界な複体 C に対して，$\det_\Lambda(C)$ をその determinant 加群とする．また，$\det_\Lambda^{-1}(C) := \mathrm{Hom}_\Lambda(\det_\Lambda(C), \Lambda)$ とおく．

$Q(\Lambda)$ を Λ の商体とする．このとき，Heegner 点を用いて「Heegner 元」

$$\widetilde{\mathfrak{z}}_\infty \in Q(\Lambda) \otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,\mathbb{T}))$$

が定義できる．これを用いて，Heegner 点に対する岩澤主予想は次のように定式化できる．

予想 4.1 (Heegner 点に対する岩澤主予想)**.** $\Lambda \cdot \widetilde{\mathfrak{z}}_\infty = \det_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,\mathbb{T}))$ が成り立つ．

注意 4.2. Heegner 点に対する岩澤主予想はもともと Perrin-Riou [Per87] により別の形で定式化されたが，それが予想 4.1 と同値であることは [KaSa22, Proposition 5.12] において示された．

5　降下理論

本節では，定理 2.2 の証明に用いる「降下理論」について述べる．本節の内容は純粋に代数的である．

一般に，可換環 R と R 加群 M に対して

$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

とおく．M の R ねじれ（torsion）部分加群を M_{tors} とし，ねじれ自由（torsion-free）商を

$$M_{\mathrm{tf}} := M/M_{\mathrm{tors}}$$

とおく．

$\mathcal{R}$ を離散付値環とし，$\mathcal{P}$ をその極大イデアル，$\mathcal{F} := \mathcal{R}/\mathcal{P}$ を剰余体とする．次の形の複体を考える：

$$C = [\mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^{d'}].$$

ここで $d, d' \geq 0$ で，$\mathcal{R}^d$ は次数 1 におく．σ, τ をそれぞれ $H^1(C)$, $H^2(C)$ の $\mathcal{R}$ 階数とし，

$$\rho := \mathrm{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\mathrm{tors}})$$

とおく．($\mathrm{Fitt}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\mathrm{tors}}) = \mathcal{P}^\rho$ が成り立つことに注意する．ここで Fitt は Fitting イデアルを表す.）また，

$$C_0 := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} C = [\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}^{d'}]$$

とおく．

次の 4 つの写像を考える：

$$\varphi : \mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(C) = \mathrm{det}_{\mathcal{R}}(H^1(C)) \otimes_{\mathcal{R}} \mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(H^2(C)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^\rho \cdot {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^*,$$

$$\pi : \mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(C) \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(C) \simeq \mathrm{det}_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0),$$

$$\mathrm{Der} : \mathcal{P}^\rho \cdot {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^* \to {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho/\mathcal{P}^{\rho+1},$$

$$\mathrm{Reg} : \mathrm{det}_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) \to {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho/\mathcal{P}^{\rho+1}.$$

φ は自然な同型

$$\mathrm{det}_{\mathcal{R}}(H^1(C)) \simeq {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C),\ \mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(H^2(C)) \simeq \mathrm{Fitt}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\mathrm{tors}}) \cdot {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^*$$

から誘導される．π は自然な全射である．Der は "modulo $\mathcal{P}^{\rho+1}$" による自然な写像である．Reg の定義は少し複雑なので，本節の最後で述べる．

次が [San23] における代数的な主結果である．

定理 5.1. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{det}_{\mathcal{R}}^{-1}(C) \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathcal{P}^\rho \cdot {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} {\bigwedge}_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^* \arrow[d, "\mathrm{Der}"] \\
\mathrm{det}_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) \arrow[r, "\mathrm{Reg}"] & {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} {\bigwedge}_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho/\mathcal{P}^{\rho+1}.
\end{tikzcd}$$

注意 5.2. $\sigma = \tau = 0$ のとき，定理 5.1 は本質的に Nekovář [Nek06, (11.6.12.2)] によって示されている．また，$\mathcal{P} \cdot H^2(C)_{\mathrm{tors}} = 0$ のとき，定理 5.1 は本質的に Burns-Kurihara-Sano [BKS16, Lemma 5.22] によって示されている．

写像 Reg の定義を述べる．以後，記号の簡略化のため

$$\mathcal{Q}^i := \mathcal{P}^i/\mathcal{P}^{i+1}$$

とおく．まず，C のフィルター付け $\{\mathcal{P}^i C\}_i$ から，

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^i$$

なるスペクトル系列 $E_k^{i,j}$ が定まる[*10]．いま，

$$\sigma_k := \dim_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,1}),\ \tau_k := \dim_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,2})$$

とおく．さらに，

$$k_0 := \min\{k \geq 1 \mid \mathcal{P}^k \cdot H^2(C)_{\mathrm{tors}}\}$$

とおく．すると，

$$E_{k_0+1}^{0,1} \simeq H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F},\ E_{k_0+1}^{0,2} \simeq H^2(C)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \tag{5.1}$$

が示せる．特に，

$$\sigma_{k_0} = \sigma,\ \tau_{k_0} = \tau \tag{5.2}$$

である．また，

$$\rho = \sum_{k=1}^{k_0} k(\tau_{k-1} - \tau_k) \tag{5.3}$$

が示せる．

微分

$$\beta^{(k)} := d_k^{0,1} : E_k^{0,1} \to E_k^{k,2-k}$$

を考える．($k=1$ のとき，$\beta^{(1)} : H^1(C_0) = E_1^{0,1} \to E_1^{1,1} = H^2(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2$ は Bockstein 写像[*11]と一致するので，$\beta^{(k)}$ は Bockstein 写像の一般化である．) スペクトル系列の定義より，完全列

$$0 \to E_{k+1}^{0,1} \to E_k^{0,1} \xrightarrow{\beta^{(k)}} E_k^{k,2-k} \to E_{k+1}^{k,2-k} \to 0$$

がある．自然な同一視 $E_k^{i,2-i} = E_k^{0,2} \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^i$ ができることに注意すると，上の完全列より同型

$$\lambda_k : \det_{\mathcal{F}}(E_k^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_k^{0,2}) \simeq \det_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_{k+1}^{0,2}) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{k(\tau_{k-1}-\tau_k)}$$

が誘導される．(5.1), (5.2), (5.3) に注意して，写像 Reg を

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg} := \lambda_{k_0} \circ \cdots \circ \lambda_1 : \det_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) &= \det_{\mathcal{F}}(E_1^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_1^{0,2}) \\ &\xrightarrow{\sim} {\textstyle\bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma}}(H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{F}} {\textstyle\bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau}}(H^2(C)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F})^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{\rho} \\ &\subset {\textstyle\bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma}} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} {\textstyle\bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau}} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{\rho}\end{aligned}$$

と定める．

注意 5.3. 構成より，写像 Reg は単射である．

[*10] スペクトル系列は普通 $E_r^{p,q}$ と表されるが，本稿では p は素数，r は Mordell-Weil 群の階数を表しているので，記号を $E_k^{i,j}$ に変える．

[*11] 複体の短完全列

$$0 \to C_0 \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2 \to C \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/\mathcal{P}^2 \to C_0 \to 0$$

に付随する接続準同型

$$\delta : H^1(C_0) \to H^2(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2$$

を Bockstein 写像という．

6　定理 2.2 の証明

本節では，定理 2.2 の証明について解説する．$\text{Ш}(E/K)[p^\infty]$ が有限であることと，Heegner 点に対する岩澤主予想（予想 4.1）を仮定する．

Λ の I での局所化 $\mathcal{R} := \Lambda_I$ を考える．$\mathcal{R}$ は離散付値環で，極大イデアルは $\mathcal{P} := I\mathcal{R}$，剰余体は $\mathbb{Q}_p$ である．$\mathcal{P}^i/\mathcal{P}^{i+1} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^i/I^{i+1}$ に注意する．

Selmer 複体の I での局所化

$$C := \mathcal{R} \otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})$$

を考える．これは $[\mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^{d'}]$ の形の複体で代表され，§5 の結果が適用できる．また，このとき，$\sigma = \tau = 1$ である．よって定理 5.1 より可換図式

$$\begin{CD}
\det^{-1}_{\mathcal{R}}(C) @>{\varphi}>{\simeq}> \mathcal{P}^\rho \cdot H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)^* \\
@V{\pi}VV @VV{\mathrm{Der}}V \\
\det^{-1}_{\mathbb{Q}_p}(C_0) @>{\mathrm{Reg}}>> H^1(C_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{P}^\rho/\mathcal{P}^{\rho+1}.
\end{CD} \tag{6.1}$$

を得る．

定理 2.2 の前半，すなわち，

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu) \tag{6.2}$$

を示すことは比較的やさしいので，手短に証明の概略を述べる．まず，$\nu \le \rho$ であることが示せる．岩澤主予想（予想 4.1）より，特に

$$\widetilde{\mathfrak{z}}_\infty \in \mathcal{R} \otimes_\Lambda \det^{-1}_\Lambda(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})) = \det^{-1}_{\mathcal{R}}(C)$$

が成り立つので，元 $\varphi(\widetilde{\mathfrak{z}}_\infty) \in \mathcal{P}^\rho \cdot H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)^*$ が定まる．この元と $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}}$ を比較することで，それほど困難なく

$$\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\rho) \tag{6.3}$$

が示せる．よって，$\nu \le \rho$ より，(6.2) が従う．

次に，定理 2.2 の後半，すなわち，

$$\exists u \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ s.t. } \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} = u \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)^2_{\mathrm{tors}}} \cdot R_p^{\mathrm{BD}} \tag{6.4}$$

を示す．

ここで，R_p^{BD} の定義を述べよう．$V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ とおく．まず，Selmer 複体のよく知られている性質

$$\mathbb{Z}_p \otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}) \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T) \tag{6.5}$$

より，

$$C_0 = \mathbb{Q}_p \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{R}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, V)$$

であることに注意する．仮定 $\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty] < \infty$ より，

$$H^1(C_0) \simeq \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(K)$$

である．また，双対性より

$$H^2(C_0) \simeq H^1(C_0)^*$$

である．よって，同一視

$$\det\nolimits^{-1}_{\mathbb{Q}_p}(C_0) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}} \right) \tag{6.6}$$

ができる．

定義 6.1. 導来 p 進レギュレーター

$$R_p^{\mathrm{BD}} \in H^1(C_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{P}^\nu/\mathcal{P}^{\nu+1} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu/I^{\nu+1})$$

を次で定める[*12]：$E(K)_{\mathrm{tf}}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{x_1, \ldots, x_r\}$ をとり，

$$R_p^{\mathrm{BD}} := \begin{cases} \mathrm{Reg}((x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)) & \nu = \rho \text{ のとき}, \\ 0 & \nu < \rho \text{ のとき}. \end{cases}$$

（これは $\{x_1, \ldots, x_r\}$ のとり方によらない．）

さて，(6.4) を示す．$\nu < \rho$ のときは，(6.3) より $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} = 0$ であり，R_p^{BD} も定義より 0 なので，(6.4) は自明である．

よって，以後 $\nu = \rho$ とする．このとき，

$$\mathrm{Der}(\varphi(\widetilde{\mathfrak{z}}_\infty)) = \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

であることが（ほぼ定義から）示せる．よって，岩澤主予想（予想 4.1）より

$$\mathrm{Der}(\varphi(\det\nolimits^{-1}_\Lambda(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})))) = \mathbb{Z}_p \cdot \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

が従う．これと可換図式 (6.1) 及び

$$\pi(\det\nolimits^{-1}_\Lambda(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}))) = \det\nolimits^{-1}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))$$

であること（(6.5) より従う）に注意すると，

$$\mathrm{Reg}(\det\nolimits^{-1}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

が得られる．よって，(6.4) を示すためには，

$$\mathrm{Reg}(\det\nolimits^{-1}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)^2_{\mathrm{tors}}} \cdot R_p^{\mathrm{BD}} \tag{6.7}$$

を示せば十分である．

(6.7) は計算により示される．次の事実が鍵となる．

---

*12 R_p^{BD} のこの定義の仕方は本質的に Nekovář [Nek06, §11] による．この定義と Bertolini-Darmon [BeDa96] によるものが一致することについては [San] に詳しく書く予定である．

補題 6.2 (Greenberg [Gre97]). $v \in S_p$ とする．$H^0(G_{K_v}, T_v^-) = 0$ なので，$H^1(G_{K_v}, T_v^+) \subset H^1(G_{K_v}, T)$ とみなせることに注意する．Kummer 写像 $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_v) \to H^1(G_{K_v}, T)$ の像を $H^1_f(G_{K_v}, T)$ とする．このとき，$H^1(G_{K_v}, T_v^+) \subset H^1_f(G_{K_v}, T)$ であり，

$$\#\left(H^1_f(G_{K_v}, T)/H^1(G_{K_v}, T_v^+)\right) = \#\widetilde{E}_v(\mathbb{F}_v)[p^\infty]$$

が成り立つ．ここで $\mathbb{F}_v$ は v の剰余体を表し，$\widetilde{E}_v(\mathbb{F}_v)[p^\infty]$ は $\widetilde{E}_v(\mathbb{F}_v)$ の p 部分を表す．

(6.7) の証明の概略を述べよう．まず，ガロア・コホモロジーの長完全列や双対性を用いると，同一視 (6.6) の下で

$$\begin{aligned}
&\det{}^{-1}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,T)) \\
&= \left(\prod_{v\in S_p} \#\left(\frac{H^1_f(G_{K_v}, T)}{H^1(G_{K_v}, T_v^+)}\right)\right) \cdot \left(\prod_{v\in S_p} \#\widetilde{E}_v(\mathbb{F}_v)\right) \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty]\cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)^2_{\mathrm{tors}}} \\
&\qquad \times \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}}\right)
\end{aligned}$$

と計算できる．次に，A_p の定義（(2.1) 参照）から

$$\mathbb{Z}_p \cdot A_p = \mathbb{Z}_p \cdot \prod_{v\in S_p} \#\widetilde{E}_v(\mathbb{F}_v)$$

が容易にわかる．よって，補題 6.2 より

$$\det{}^{-1}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K,T)) = A_p^2 \cdot \frac{\#\text{Ш}(E/K)[p^\infty]\cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)^2_{\mathrm{tors}}} \cdot \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^r_{\mathbb{Z}} E(K)_{\mathrm{tf}}\right)$$

となる．これと R_p^{BD} の定義より (6.7) が従う． □

7 定理 1.3 の証明

定理 1.3 は，定理 2.2 と同様に Selmer 複体を用いて証明できる．（定理 1.3 の仮定 “$R_p \neq 0$” は外せる．）その概略を述べよう．

§1 の記号を用いる．E は p で良い通常還元を持つとする．$T := T_p(E)$, $\mathbb{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$, $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ とおく．$Q(\Lambda)$ を Λ の商体とする．E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する岩澤主予想は次と同値である．

予想 7.1 (E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する岩澤主予想). Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ のコホモロジーはねじれ Λ 加群であり，

$$\varphi : Q(\Lambda) \otimes_\Lambda \det{}^{-1}_\Lambda(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})) \xrightarrow{\sim} Q(\Lambda)$$

を標準的な同型とすると，

$$\Lambda \cdot \mathcal{L}_p = \varphi(\det{}^{-1}_\Lambda(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})))$$

が成り立つ．

注意 7.2. よく知られている岩澤主予想の定式化は

$$\Lambda \cdot \mathcal{L}_p = \mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

である．ここで $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は通常の p^∞-Selmer 群であり，$(-)^\vee$ は Pontryagin 双対を表す．これが予想 7.1 と同値であることは，$\widetilde{H}^2_f(\mathbb{Q},\mathbb{T}) \simeq (\varinjlim_n \widetilde{H}^1_f(\mathbb{Q}_n, V/T))^\vee$ と $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee$ が擬同型であること（[Nek06, Propositions 9.6.6, 9.6.7.5] 参照）及び

$$\varphi(\det\nolimits_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q},\mathbb{T}))) = \mathrm{char}_\Lambda(\widetilde{H}^2_f(\mathbb{Q},\mathbb{T}))$$

であることから従う．

以下，$\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] < \infty$ と岩澤主予想（予想 7.1）を仮定する．

前節と同様に，Λ の I での局所化 $\mathcal{R} := \Lambda_I$ を考える．$\mathcal{R}$ の剰余体は $\mathbb{Q}_p$ と同型である．複体

$$C := \mathcal{R} \otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q},\mathbb{T})$$

に対して定理 5.1 を適用すると，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & I^\rho \cdot \mathcal{R} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Der}} \\ \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) & \xrightarrow{\mathrm{Reg}} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^\rho/I^{\rho+1} \end{array}$$

が得られる．ここで，$C_0 := \mathbb{Q}_p \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{R}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q},V)$，$\rho := \mathrm{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C))$ である．

岩澤主予想（予想 7.1）を仮定すると

$$\mathcal{L}_p \in \varphi(\det\nolimits_{\mathcal{R}}^{-1}(C)) = I^\rho \cdot \mathcal{R} \tag{7.1}$$

がわかる．一方，$r \leq \rho$ は容易に示すことができる*13．よって，

$$\mathcal{L}_p \in I^r \cdot \mathcal{R}$$

が従う．これで定理 1.3 の前半が示された．

定理 1.3 の後半を示す前に，p 進レギュレーター R_p の定義を述べよう．(6.6) と同様に，同一視

$$\det\nolimits_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tf}} \right)$$

ができることに注意する．

*13 証明：$\mathbb{Q}_p \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{R}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q},V)$ と双対性より

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C) \simeq \widetilde{H}^2_f(\mathbb{Q},V) \simeq \widetilde{H}^1_f(\mathbb{Q},V)^* \simeq \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})^*$$

である（最後の同型で $\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] < \infty$ を用いる）．よって

$$r = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)) \leq \mathrm{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C)) = \rho$$

が従う．

定義 7.3. p 進レギュレーター

$$R_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r/I^{r+1}$$

を次で定める：$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tf}}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{x_1, \ldots, x_r\}$ をとり，

$$R_p := \begin{cases} (-1)^r \mathrm{Reg}((x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)) & r = \rho \text{ のとき}, \\ 0 & r < \rho \text{ のとき}. \end{cases}$$

（これは $\{x_1, \ldots, x_r\}$ のとり方によらない．）

注意 7.4. p 進高さペアリング

$$\langle -, - \rangle_p : E(\mathbb{Q}) \times E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I/I^2$$

は次で定義される：

$$\langle x, y \rangle_p := -\beta^{(1)}(x)(y).$$

ここで

$$\beta^{(1)} : \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) \simeq H^1(C_0) \to H^2(C_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} I/I^2 \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}), \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I/I^2)$$

は Bockstein 写像である（§5 参照）．このとき，

$$R_p = \det(\langle x_i, x_j \rangle_p)_{1 \le i,j \le r}$$

が成り立つことが確かめられる．（p 進高さペアリングが非退化であるための必要十分条件は $r = \rho$ であることもわかる．）

定理 1.3 の後半，すなわち，

$$\exists u \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ s.t. } \mathcal{L}_p^{(r)} = u \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}^2} \cdot R_p \tag{7.2}$$

を示す．$r < \rho$ のときは，(7.1) より $\mathcal{L}_p^{(r)} = 0$ であり，R_p も定義より 0 なので，(7.2) は自明である．よって $r = \rho$ と仮定してよい．このとき，定理 2.2 の証明と同様に，(7.2) は次を示すことに帰着される：

$$\mathrm{Reg}(\mathrm{det}_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}^2} \cdot R_p$$

これの証明は (6.7) と全く同様の計算でなされる． □

注意 7.5. 本稿では，簡単のために定理 1.3 は E が p で良い通常還元を持つ場合にのみ述べたが，E が p で乗法的還元を持つ場合の類似の結果も，Selmer 複体を用いて以上と同様の方法により証明できる．

注意 7.6. [San23] では，Agboola-Castella [AgCa21] により定式化された Bertolini-Darmon-Prasanna の p 進 L 関数に対する p 進 BSD 予想に関しても，定理 2.2 の類似を証明している．また，§1 で述べた「一般 Perrin-Riou 予想」の Heegner 点に対する類似に関しても同様の結果を得ている．

参考文献

[AgCa21] A. Agboola, F. Castella, On anticyclotomic variants of the p-adic Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, J. Théor. Nombres Bordeaux (Iwasawa 2019 special issue) **33** no.3.1 (2021) 629-658.

[BeDa95] M. Bertolini, H. Darmon, Derived p-adic heights, Amer. J. Math. **117** no.6 (1995) 1517-1554.

[BeDa96] M. Bertolini, H. Darmon, Heegner points on Mumford-Tate curves, Invent. Math. **126** no.3 (1996) 413-456.

[BKS16] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, Doc. Math. **21** (2016) 555-626.

[BKS] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On derivatives of Kato's Euler system for elliptic curves, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Gre97] R. Greenberg, Iwasawa theory for elliptic curves, in *Arithmetic theory of elliptic curves* (Cetraro, 1997), 51-144, Lecture Notes in Math., 1716, Springer, Berlin.

[How04] B. Howard, Derived p-adic heights and p-adic L-functions, Amer. J. Math. **126** (2004) 1315-1340.

[Jon89] J. W. Jones, Iwasawa L-functions for multiplicative abelian varieties, Duke Math. J. **59** no.2 (1989) 399-420.

[KaSa22] T. Kataoka, T. Sano, On Euler systems for motives and Heegner points, preprint, arXiv:2203.08342.

[Kat04] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque, (295):ix, 117-290, 2004. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[MTT86] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. math. **84**(1) (1986) 1-48.

[Nek06] J. Nekovář, Selmer complexes, Astérisque **310** (2006).

[Per82] B. Perrin-Riou, Descente infinie et hauteur p-adique sur les courbes elliptiques à multiplication complexe, Invent. Math. **70** no.3 (1982) 369-398.

[Per87] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques, théorie d'Iwasawa et points de Heegner, Bulletin de la Société Mathématique de France **115** no.4 (1987) 399-456.

[Per93] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** no.4 (1993) 945-995.

[San23] T. Sano, Derived Bockstein regulators and anticyclotomic p-adic Birch and Swinnerton-Dyer conjectures, preprint. arXiv:2308.08875

[San] T. Sano, Bockstein maps and derived p-adic heights, in preparation.

[Sch85] P. Schneider, p-adic height pairings, II, Invent. Math. **79** no.2 (1985) 329-374.

[Ser02] J.-P. Serre, *Galois Cohomology*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2002.