粗凸空間の自由積の境界について

東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻　松家　拓稔 *
Takumi Matsuka
Department of Mathematical Sciences, Faculty and Graduate School of Science,
Tokyo Metropolitan University

概要

粗凸空間は深谷友宏氏と尾國新一氏により導入された非正曲率をもつ距離空間のクラスの 1 つである. 距離空間の自由積とは, 群の自由積の距離空間におけるアナロジーである. 粗凸空間の自由積もまた粗凸空間であるか, という問題は具体例の構成の観点からも重要である. 筆者と深谷友宏氏は過去の研究において, 距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるならば, 距離空間の自由積 $X * Y$ もまた測地的粗凸空間であるという結果を得た. 粗凸空間上には無限遠にのびる擬測地光線の集合として, 理想境界が定義される. 我々は測地的粗凸空間の自由積 $X * Y$ の理想境界のコホモロジーやホモロジー, 位相次元を X および Y のそれによって計算する公式を得た. 本稿の内容は深谷友宏氏 (東京都立大学) との共同研究 (arXiv:2402.06862) に基づく.

1　導入

Gromov は Riemann 多様体とは限らない距離空間に対して,「空間が負に曲がっている」という概念を定式化した. これを Gromov 双曲空間という. Gromov 双曲空間は負曲率をもつ距離空間とみなせるものである. また, 非正曲率 Riemann 多様体がもつ距離空間としての性質を抽象化して, CAT(0) 空間や Busemann 空間という距離空間のクラスが導入された. これらは非正曲率をもつ距離空間とみなせるクラスである.

粗凸空間は深谷友宏氏と尾國新一氏により導入された非正曲率をもつ距離空間のクラスの 1 つである ([6]). 粗凸空間には次のような顕著な性質がある. 擬測地的な距離空間 X および Y が擬等長同型であるとする. このとき, X が粗凸空間ならば Y もまた粗凸空間である. さらに距離空間 X および Y が粗凸空間であれば, その直積空間 $X \times Y$ もまた粗凸空間である. また, 非正曲率をもつ単連結完備 Riemann 多様体においては, Cartan–Hadamard の定理が成り立つが, 深谷氏と尾國氏は粗凸空間においてこの定理のアナロジーを示した ([6, Theorem 1.1]). また, 粗 Baum–Connes 予想とは「良い」固有距離空間の位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学において重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗 Baum–Connes 予想が成り立つことを示した ([6, Theorem 1.3]). **測地的粗凸空間**は粗凸空間の重要なサブクラスで

* 本研究集会の参加にあたって，京都大学数理解析研究所には多大なるご支援をいただきました．御礼申し上げます．This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

ある．測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間, Busemann 空間および有限次元 systolic 複体は測地的粗凸空間である．

測地的 Gromov 双曲空間や CAT(0) 空間には, 無限遠にのびる測地光線の集合を適切な同値関係でわることにより, 理想境界が定義される．粗凸空間 X に対してもほとんど同様にして理想境界 ∂X が定義される．これらの空間のクラスにおいて, 粗 Baum–Connes 予想が成立することは理想境界を用いて示される．空間 X 自身を調べる上で, 理想境界 ∂X は重要な概念である．

群の自由積と同様に距離空間に自由積とみなせるものが定義できる．特に, 群 G および H が距離空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用するとき, この距離空間の自由積に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する．すなわち, このとき群の自由積と距離空間の自由積は擬等長同型である．筆者と深谷友宏氏は [4] において, この距離空間の自由積と粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるならば, 距離空間の自由積 $X * Y$ もまた測地的粗凸空間であるという結果を得た．よって, 測地的粗凸空間の自由積 $X * Y$ 上には理想境界が構成できる．我々は [5] において, この理想境界のコホモロジーやホモロジー, 位相次元を X および Y のそれによって計算する公式を得た．本稿ではこの結果について概説する．幾何学的群論や粗幾何学, 粗凸空間のすぐれた解説として, 深谷友宏氏のモノグラフ [9] をあげる．

2　基本的な概念

本稿で用いられる基本的な概念を導入する．以降, (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする．

Definition 1 (擬等長同型)**.** (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする．次の 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ が存在するとき X と Y は**擬等長同型**であるという．

(1) $\lambda \geq 1$ および $k \geq 0$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\lambda^{-1} d_X(x, x') - k \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + k$$

を満たす．写像 f を**擬等長埋め込み写像**という．距離空間 X から Y に擬等長埋め込み写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, X は Y に**擬等長埋め込み可能**であるという．

(2) 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在して $d_Y(y, f(x)) \leq C$ を満たす．

また, この 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ を擬等長同型写像という．

Definition 2 (擬測地線分および擬測地空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする．定数 $\lambda \geq 1$ および $k \geq 0$ が存在し, 任意の 2 点 $x, x' \in X$ に対して次の 2 条件を満たす写像 $\gamma : [a, b] \to X$ が存在する．

(1) $\gamma(a) = x$ および $\gamma(b) = x'$ が成り立つ．

(2) 任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して,

$$\lambda^{-1}|t - t'| - k \leq d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \leq \lambda|t - t'| + k$$

が成り立つ．

このとき, 距離空間 (X, d_X) を**擬測地空間**といい, 写像 $\gamma : [a, b] \to X$ を (λ, k)**-擬測地線分**とよぶ．

Definition 3 (固有距離空間)**.** X を距離空間とする．X の任意の有界閉集合がコンパクトであるとき, X の距離は固有であるという．固有な距離をもつ距離空間を**固有距離空間**という．

Definition 4 (粗稠密集合)**.** (X, d_X) を距離空間とする．A を X の部分集合, また $C \geq 0$ とする．

(1) 部分集合 A が C-**離散**であるとは, 任意の相異なる $a, a' \in A$ に対し, $d(a, a') \geq C$ が成り立つときをいう．
(2) 部分集合 A が C-**稠密**であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, $a \in A$ が存在し $d(x, a) \leq C$ が成り立つときをいう．

Remark 1. 極大な C-離散部分集合 $A \subset X$ は $2C$-稠密な部分集合である．

群の距離空間への「良い」作用を定義する．続いて, 群が距離空間に「良い」作用をするとき, その群と距離空間を粗く同一視できることを主張する Švarc, Milnor の定理を述べる．

Definition 5 (幾何学的な作用)**.** (X, d_X) を距離空間とし, G は X に等長変換により作用する群とする．

(1) 任意のコンパクト集合 $B \subset X$ に対し, 集合 $\{g \in G \mid g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ が有限集合となるとき, 作用は**固有**であるという．
(2) あるコンパクト集合 $K \subset X$ で, $G(K) = X$ なるものが存在するとき, 作用は**余コンパクト**であるという．
(3) 作用が固有かつ余コンパクトであるとき, 作用は**幾何学的**であるという．

Theorem 1 (Švarc, Milnor の定理)**.** X を固有な距離をもつ擬測地空間とし, X に群 G が幾何学的に作用しているとする．このとき, 次が成り立つ．

(1) G は有限生成である．
(2) 任意の点 $x_O \in X$ の軌道 $G \to X : g \mapsto g(x_O)$ は擬等長同型写像である．すなわち, G と X は擬等長同型である．ただし, G にはある有限生成系に関する語距離[*1] を入れる．

3 粗凸空間

本節の詳細な解説として [9, 第 6 章, 第 8 章] を参考にされたい．深谷友宏氏と尾國新一氏は粗凸空間とよばれる距離空間のクラスを導入した [6]. これは非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物とみなせるものである．以下のような重要な例がある．

(1) 測地的 Gromov 双曲空間
(2) Busemann 空間, 特に, CAT(0) 空間
(3) 有限次元 systolic 複体 [10].
(4) Hierarchically hyperbolic spaces [8].

[*1] 語距離とは有限生成群に対し純粋に代数的な操作のみで定まる距離である．

(5) Proper injective metric spaces [3], 特に, 局所有限な coarsely Helly graph の injective hulls [2].

さらに, **粗凸空間のなす距離空間のクラスは擬等長同型に関して閉じている.** すなわち, 擬測地空間 X および Y が擬等長同型であるとき, X が粗凸空間ならば Y もまた粗凸空間である. また**直積に関しても閉じている.** 粗凸空間は距離空間に対して, 性質の良い擬測地線分の族の存在を仮定し定義される.

Definition 6 (粗凸空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする. $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1$ および $C \geq 0$ を定数とする. また, $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする. そして $\mathcal{L}$ を (λ, k)-擬測地線分の族とする. 以下の条件が成り立つとき, X は $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$**-粗凸**であるという.

(CC1) 2 点 $v, w \in X$ に対し, 閉区間 $[0, a]$ 上で定義された擬測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ および $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する.

(CC2) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$, および $c \in [0, 1]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq (1 - c)E d_X(\gamma(0), \eta(0)) + cE d_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

この不等式を**粗凸不等式**という.

(CC3) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a]$ および $s \in [0, b]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$|t - s| \leq \theta(d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s))).$$

条件 (CC1), (CC2) および (CC3) を満たす族 $\mathcal{L}$ を**良い擬測地線分の族**といい, 元 $\gamma \in \mathcal{L}$ を**良い擬測地線分**という. 特に族 $\mathcal{L}$ が測地線分のみから成るとき, X を**測地的粗凸**であるという.

粗凸空間上の理想境界の構成を概説する. 定義域が 0 以上の実数全体の擬測地線分を擬測地光線という. 粗凸空間上の理想境界はある条件を満たす擬測地光線全体の集合として定義される. 以下, X を $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$-粗凸空間とする.

Definition 7. $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ とする. また, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\gamma_n : [0, a_n] \to X$ を X の擬測地線分とし, $a_n \to \infty$ とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\gamma_n \in \mathcal{L}, \quad \gamma_n(0) = \gamma(0)$$

が成立し, 列 $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が γ に $\mathbb{N}$ 上で各点収束するとき, 列 $\{(\gamma_n, a_n)\}_n$ を γ の $\mathcal{L}$-近似列という. γ に対する $\mathcal{L}$-近似列が存在するとき, γ は $\mathcal{L}$-近似可能であるという.

Remark 2. $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ を $\mathcal{L}$-近似可能とする. パラメタをうまく取り換えて, 任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, $\gamma(t) = \gamma(\lfloor t \rfloor)$ を満たすものとする. このとき, 簡単な議論により γ は $(\lambda, \lambda + k)$-擬測地光線となる.

$\mathcal{L}^\infty$ を $\mathcal{L}$-近似可能な写像 $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ で, 任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, $\gamma(t) = \gamma(\lfloor t \rfloor)$ を満たすもの

全体として定義する．また, $O \in X$ とする．$\mathcal{L}_O^\infty$ を

$$\mathcal{L}_O^\infty := \{\gamma \in \mathcal{L}^\infty \colon \gamma(0) = O\}$$

として定義する．$\gamma, \eta \in \mathcal{L}_O^\infty$ に対して,

$$\sup\{d(\gamma(t), \eta(t)) \colon t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} < \infty$$

を満たすとき, γ と η は漸近的に等しいといい, $\gamma \sim \eta$ であらわす．これは, $\mathcal{L}_O^\infty$ 上の同値関係を定める．

Definition 8. $\mathcal{L}_O^\infty / \sim$ を X の**理想境界**といい, $\partial_O X$ によりあらわす．

Remark 3. Gromov 積という量により, $\partial_O X$ に位相を定めることができる．基点をとりかえても, 理想境界は同相となる．

4 距離空間の自由積

群 G および H が距離空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用しているとする．このとき, Bridson–Haefliger は群の自由積 $G * H$ が幾何学的に作用する距離空間を構成した ([1, Theorem II.11.18])．我々はこの構成を一般化し, 群作用を仮定しない状況で距離空間の自由積を定義した．まず, その構成のためネットとよばれる概念を定義する．

Definition 9 (ネット)**.** (X, d_X) を距離空間とする．また X_0 を集合とする．写像 $i_X : X_0 \to X$ を任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し, $\# i_X^{-1}(K) < \infty$ を満たすものとする．また $e_X \in i_X(X_0)$ とする．この三つ組み (X_0, i_X, e_X) を距離空間 X の**ネット**という．

Example 1. 群 G が距離空間 X に幾何学的に作用しているとする．基点 e_X をとり, その軌道写像 $o(e_X) : G \to X, g \mapsto g(e_X)$ をとる．このとき, 三つ組み $(G, o(e_X), e_X)$ は X のネットである．特にこのネットを G**-ネット**とよぶ．

距離空間の自由積を定義するために必要な記号をまとめる．

Notation 1. (X_0, i_X, e_X) および (Y_0, i_Y, e_Y) を距離空間 X および Y のネットとする．

- $e_X = i_X(x_0)$ を満たす $x_0 \in X_0$ を 1 つとり, ϵ_X と定める．同様にして, $e_Y = i_Y(y_0)$ を満たす $y_0 \in Y_0$ を 1 つとり, ϵ_Y と定める．
- $X_0^* := X_0 \setminus \{\epsilon_X\}$ および $Y_0^* := Y_0 \setminus \{\epsilon_Y\}$ とする．
- $X_0^* \sqcup Y_0^*$ 上の語とは有限列 $w_0 w_1 \cdots w_n \quad (n \geq 0, w_i \in X_0^* \sqcup Y_0^*)$ であって, 任意の i について

$$w_i \in X_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in Y_0^*,$$
$$w_i \in Y_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in X_0^*$$

  を満たすものとする．

- $X_0^* \sqcup Y_0^*$ 上の語全体と空語 $\{\epsilon\}$ の和集合を W とする．またその部分集合として,

$$W_X \coloneqq \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin X_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\},$$
$$W_Y \coloneqq \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin Y_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\}$$

  とする．

Definition 10 (距離空間の自由積)**. 距離空間の自由積** $X * Y$ は以下の面と垂直辺からなる距離空間である．図 1 を参照されたい．

- (面): $\{\omega\} \times X$ および $\{\tau\} \times Y$ からなる, ただし $\omega \in W_X$ および $\tau \in W_Y$ とする．簡単のため $\{\omega\} \times X$ および $\{\tau\} \times Y$ をそれぞれ ωX および τY とあらわす．
- (垂直辺): 以下の 3 タイプよりなる．
  - $(\epsilon, e_X) \in \{\epsilon\} \times X$ と $(\epsilon, e_Y) \in \{\epsilon\} \times Y$ を結ぶ辺．
  - 任意の $\omega \in W_X$ および $x_0 \in X_0^*$ に対して, $(\omega, i_X(x_0)) \in \{\omega\} \times X$ と $(\omega x_0, e_Y) \in \{\omega x_0\} \times Y$ を結ぶ辺．
  - 任意の $\tau \in W_Y$ および $y_0 \in Y_0^*$ に対して, $(\tau, i_Y(y_0)) \in \{\tau\} \times Y$ と $(\tau y_0, e_X) \in \{\tau y_0\} \times X$ を結ぶ辺．

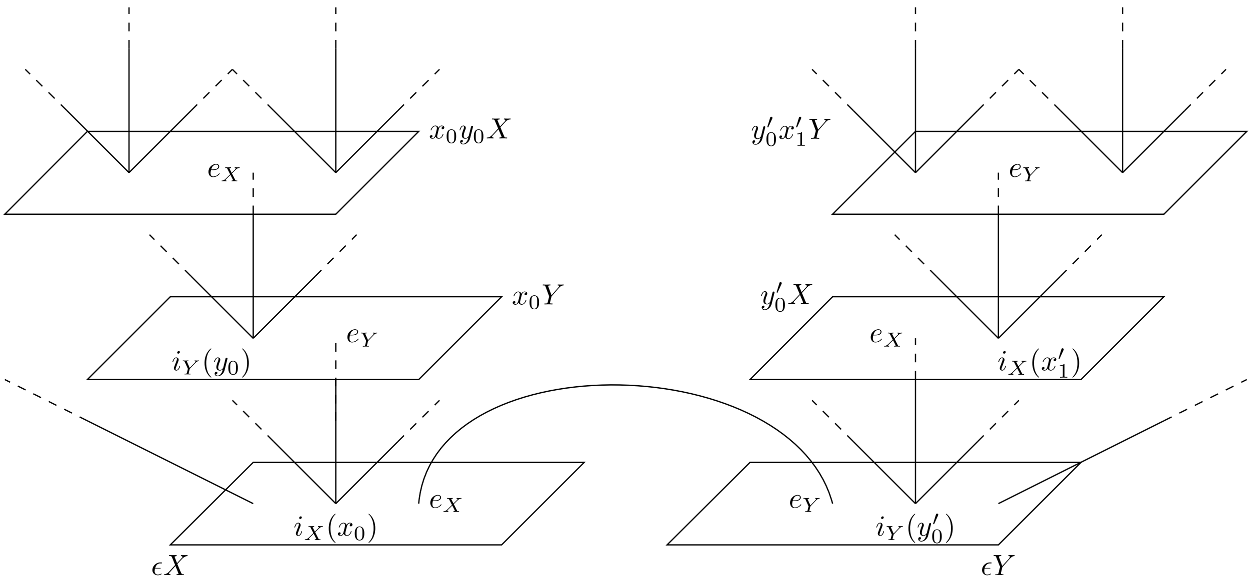

図 1　距離空間の自由積 $X * Y$．ただし $x_0, x_1' \in X_0^*$ および $y_0, y_0' \in Y_0^*$ とする．

図 1 のように, 距離空間の自由積は木の分岐する点たちに距離空間 X および Y を交互に貼り合わせていくように構成される．その構造から距離 d_* が自然に定まり自由積 $X * Y$ は距離空間となる．

Remark 4. 群 G および H が固有な擬測地空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用しているとする．このとき, Example 1 にて言及した G-ネットおよび H-ネットで距離空間の自由積を構成できる．これは Bridson–Haefliger ([1, Theorem II.11.18]) によって構成された $G * H$ が幾何学的に作用する距離空間に一致する．よって Švarc, Milnor の定理より群の自由積 $G * H$ は G-ネットおよび

H-ネットに関する距離空間の自由積 $X*Y$ に擬等長同型である.

5 先行研究

我々は [4] において, 各因子が測地的粗凸空間であるような自由積を考察し, 次の結果を得た.

Theorem 2. [4, Theorem 3.1] 距離空間 X および Y が測地的粗凸空間*2 であるとする. このとき, ネットのとり方によらず, 距離空間の自由積 $X*Y$ もまた測地的粗凸空間である.

$X*Y$ 上で測地線分族を構成し, これが $X*Y$ 上の良い測地線分族であることを証明することで Theorem 2 は示される. この $X*Y$ 上の良い測地線分族の構成の概略を述べる. いま自由積の各面は測地的粗凸空間であると仮定している. 各面における良い測地線分を 1 つとり, それらをつなぎ合わせることで $X*Y$ の測地線分族の元を構成する.

(X_0, i_X, e_X) を X のネットととし, (Y_0, i_Y, e_Y) を Y のネットとする. また自由積 $X*Y$ の面をすべて集めた集合を $\mathcal{S}$ とする. さらに垂直辺をすべて集めた集合を E とする. 自由積の各面は測地的粗凸空間である. 各 $S \in \mathcal{S}$ および $x, y \in S$ に対して, x を始点とし y を終点とする S 上の良い測地線分を 1 つとる. これを $\gamma_S(x,y)$ とする. また, 各 $e \in E$ および $v, w \in e$ に対して, $\gamma_e(v,w)$ を, 始点が v であり終点が w である e 上の測地線分とする. ここで $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} \coloneqq \{\gamma_S(x,y) \mid S \in \mathcal{S},\ x, y \in S\} \bigsqcup \{\gamma_e(v,w) \mid e \in E, v, w \in e\}$$

と定義する. 点 $a, b \in X*Y$ に対して, a を始点とし b を終点とする $X*Y$ 上の測地線分 $\Gamma(a,b)$ を $\mathcal{L}$ の各元をつなぎ合わせることで定義する. その具体例を図示する.

$a = (ux_0y_0, x)$ および $b = (ux_0', y)$ とする. ここで $u \in W_X$ は最大の共通語である. また $x_0, x_0' \in X_0^*$, $y_0 \in Y_0^*$, $x \in X$, および $y \in Y$ である. 測地線分 $\Gamma(a,b) : [0, d_*(a,b)] \to X*Y$ は次のように定義される (図 2 参照): $\overline{x_0} = i_X(x_0)$ および $\overline{y_0} = i_Y(y_0)$ とする. その他の点も同様である.

$$\Gamma(a,b)(t) = \begin{cases} \gamma_{ux_0y_0X}(x, e_X)(t) & 0 \le t \le d_X(e_X, x), \\ \gamma_{e_1}(e_X, \overline{y_0})(t - t_1) & t_1 \le t \le t_1 + 1, \\ \gamma_{ux_0Y}(\overline{y_0}, e_Y)(t - (t_1+1)) & t_1 + 1 \le t \le t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1, \\ \gamma_{e_2}(e_Y, \overline{x_0})(t - t_2) & t_2 \le t \le t_2 + 1, \\ \gamma_{uX}(\overline{x_0}, \overline{x_0'})(t - (t_2+1)) & t_2 + 1 \le t \le t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x_0'}) + 1, \\ \gamma_{e_3}(\overline{x_0'}, e_Y)(t - t_3) & t_3 \le t \le t_3 + 1, \\ \gamma_{ux_0'Y}(e_Y, y)(t - (t_3+1)) & t_3 + 1 \le t \le t_3 + d_Y(e_Y, y) + 1. \end{cases}$$

ただし $t_1 = d_X(e_X, x)$, $t_2 = t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1$, および $t_3 = t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x_0'}) + 1$ とする. また e_1, e_2, および e_3 は垂直辺である. $\mathcal{L}_* = \{\Gamma(a,b) : a, b \in X*Y\}$ とする. $\mathcal{L}_*$ が $X*Y$ 上の良い測地線分族であることを示すことで, Theorem 2 は証明される.

---

*2 [4, Theorem 3.1] においては “symmetric” という条件を仮定しているが, arXiv に投稿後この仮定は除けることがわかった.

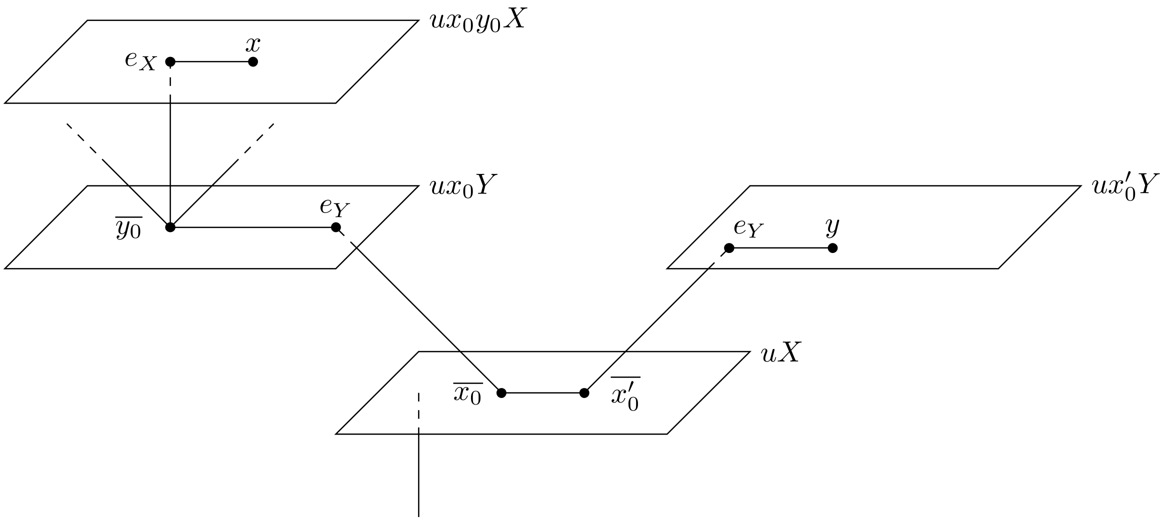

図 2　$a = (ux_0y_0, x)$ および $b = (ux'_0, y)$ に対する $\Gamma(a, b)$

6　主定理

[5] における主定理をのべるために, 添加空間という空間を説明する. Groves と Manning は [7] において, 組み合わせ論的ホロボールと添加空間という概念を導入し, それによって相対双曲群の 1 つの定義を与えた. まず, これらの概念を説明する. X を距離空間とし, $X^{(0)} \subset X$ を 1-離散かつ 2-稠密な部分集合とする.

Definition 11. 以下のような頂点集合 $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})^{(0)}$ と辺集合 $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})^{(1)}$ をもつ距離グラフを**組み合わせ論的ホロボール**といい, $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})$ であらわす.

(1) $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})^{(0)} := X^{(0)} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$.
(2) $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})^{(1)}$ は次の 2 つのタイプの辺からなる:
  (a) 任意の $x \in X^{(0)}$ および $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, (x, l) と $(x, l+1)$ をむすぶ.
  (b) $x, y \in X^{(0)}$ および $l \in \mathbb{N}$ に対して,

$$0 < d_X(x, y) \leq 2^l$$

  を満たすならば, (x, l) と (y, l) をむすぶ.

各辺の長さを 1 として, $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(X^{(0)})$ に length metric を入れ, 測地空間とみなす.

組み合わせ論的ホロボールは双曲空間におけるホロボールの組み合わせ論的アナロジーである. $\mathcal{S}$ を距離空間の自由積 $X * Y$ の面全体の集合とする. 全単射 $\mathbb{N} \to \mathcal{S}$ を 1 つ定める. すなわち, $\mathcal{S} = \{Z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とする. 各面 Z_k に対して, $Z_k^{(0)} \subset Z_k$ を 1-離散かつ 2-稠密な部分集合とする.

Definition 12. 距離空間の自由積 $X * Y$ において, すべての面 $Z_k \in \mathcal{S}$ に組み合わせ論的ホロボール $\mathcal{H}_{\mathsf{comb}}(Z_k^{(0)})$ を貼り合わせた空間を**添加空間**といい, A_0 であらわす.

主定理における設定をまとめる.

Setting 1. 以下に述べる主定理たちに共通する設定は次である.

- X および Y を固有な距離をもつ測地的粗凸空間とする.
- $\mathcal{S}$ を距離空間の自由積 $X * Y$ の面全体の集合とし, $\mathcal{S} = \{Z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とする. 各面 Z_k に対して定まっているネットを (N_k, i_k, e_k) とする.

Theorem 2 より, 固有な距離をもつ測地的粗凸空間の自由積 $X * Y$ は固有な距離をもつ測地的粗凸空間となる. また, 添加空間 A_0 も固有な距離をもつ測地的粗凸空間となる. よって, $X * Y$ および A_0 上に理想境界を構成できる.

Theorem 3 (主定理 I)**.** [5, Theorem 1.1] ∂X, ∂Y, $\partial(X*Y)$, および ∂A_0 をそれぞれ X, Y, $X*Y$, および A_0 の理想境界とする. $M^* = (M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を K-theory, もしくは Alexander-Spanier コホモロジーとする. このとき,

$$\tilde{M}^p(\partial(X*Y)) \cong \tilde{M}^p(\partial A_0) \oplus \bigoplus_{\mathbb{N}} \tilde{M}^p(\partial X) \oplus \bigoplus_{\mathbb{N}} \tilde{M}^p(\partial Y) \tag{1}$$

また, $M_* = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を K ホモロジー, もしくは Steenrod ホモロジーとする. このとき,

$$\tilde{M}_p(\partial(X*Y)) \cong \tilde{M}_p(\partial A_0) \times \prod_{\mathbb{N}} \tilde{M}_p(\partial X) \times \prod_{\mathbb{N}} \tilde{M}_p(\partial Y). \tag{2}$$

が成り立つ. ここで $\tilde{M}_p$ および $\tilde{M}^p$ は被約 (コ) ホモロジーである.

特に, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, $i_k(N_k)$ が Z_k 上の C-稠密な部分集合であるとき, ∂A_0 は Cantor 空間になる. よって, 主定理は次のように書ける.

$$\tilde{M}^p(\partial(X*Y)) \cong \tilde{M}^p(\mathcal{C}) \oplus \bigoplus_{\mathbb{N}} \tilde{M}^p(\partial X) \oplus \bigoplus_{\mathbb{N}} \tilde{M}^p(\partial Y)$$

ただし, $\mathcal{C}$ は Cantor 空間である.

深谷氏と尾國氏は固有な距離をもつ粗凸空間が粗 Baum–Connes 予想を満たすことを示した. この事実と Theorem 3 の (2) を組み合わせることで, 測地的粗凸空間の自由積 $X * Y$ の Roe 代数の K-theory を計算することができる. 粗 Baum–Connes 予想について概説する. 固有距離空間 V に対して,

- $K_*(C^*(V))$: 解析的情報である Roe 代数の K-theory
- $KX_*(V)$: 位相幾何的情報である粗 K ホモロジー

という 2 つの群が定まる. **粗 Baum–Connes 予想**とは「良い」固有距離空間においてはこの両者が一致する, という予想である. 詳しくは [9, 第 8 章] を参考にされたい. 深谷氏と尾國氏は [6, Theorem 1.3] で, 固有な距離をもつ粗凸空間 V において, 次の写像 μ_* が同型写像であることを示した.

$$\mu_* \colon KX_*(V) \to K_*(C^*(V)).$$

すなわち, 固有な距離をもつ粗凸空間が粗 Baum–Connes 予想を満たすことを示した．さらに次のような同型が成立することを示した ([6, Theorem 6.7]).

$$T_{\partial V}\colon KX_*(V) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial V).$$

よって, 合成により次のような同型写像が得られる.

$$T_{\partial V} \circ \mu_*^{-1}\colon K_*(C^*(V)) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial V). \tag{3}$$

Theorem 3 の (2) と同型写像 (3) を組み合わせると, 以下のことが示される.

Theorem 4 (主定理 II)**.** [5, Theorem 1.2] ∂X, ∂Y, および ∂A_0 をそれぞれ X, Y, および A_0 の理想境界とする．$K_p(C^*(X * Y))$ を $X * Y$ の Roe 代数の K-theory とする．このとき,

$$K_p(C^*(X * Y)) \cong \tilde{K}_{p-1}(\partial A_0) \times \prod_{\mathbb{N}} \tilde{K}_{p-1}(\partial X) \times \prod_{\mathbb{N}} \tilde{K}_{p-1}(\partial Y).$$

さらに, 我々は $\partial(X * Y)$ の位相次元を計算した.

Theorem 5 (主定理 III)**.** [5, Theorem 1.4] ∂X, ∂Y, および $\partial(X * Y)$ をそれぞれ X, Y, および $X * Y$ の理想境界とする．dim を位相次元とする．このとき,

$$\dim(\partial(X * Y)) = \max\{\dim \partial X, \dim \partial Y\}$$

が成立する.

参考文献

[1] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, Vol. 319 of *Grundlehren Math. Wiss.* Berlin: Springer, 1999.

[2] Jérémie Chalopin, Victor Chepoi, Anthony Genevois, Hirai Hiroshi, and Damian Osajda. Helly groups. arXiv:2002.06895, 2022.

[3] Dominic Descombes and Urs Lang. Convex geodesic bicombings and hyperbolicity. *Geom. Dedicata*, Vol. 177, pp. 367–384, 2015.

[4] Tomohiro Fukaya and Takumi Matsuka. Free products of coarsely convex spaces and the coarse Baum-Connes conjecture. *To appear in Kyoto. J. Math.*

[5] Tomohiro Fukaya and Takumi Matsuka. Boundary of free products of metric spaces. *arXiv preprint arXiv:2402.06862*, 2024.

[6] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, Vol. 12, No. 3, pp. 857–895, 2020.

[7] Daniel Groves and Jason Fox Manning. Dehn filling in relatively hyperbolic groups. *Isr. J. Math.*, Vol. 168, pp. 317–429, 2008.

[8] Thomas Haettel, Nima Hoda, and Harry Petyt. Coarse injectivity, hierarchical hyperbolicity and semihyperbolicity. *Geom. Topol.*, Vol. 27, No. 4, pp. 1587–1633, 2023.

[9] 深谷友宏. **粗幾何学入門**, Vol. 152 of *SGC* **ライブラリ**. サイエンス社, 2019.

[10] Damian Osajda and Piotr Przytycki. Boundaries of systolic groups. *Geom. Topol.*, Vol. 13, No. 5, pp. 2807–2880, 2009.