無限積空間における D-空間の一般化たち

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

神奈川大学　矢島　幸信[*2]
Yukinobu Yajima
Kanagawa University

1　D-空間

本稿におけるすべての空間（位相空間）は Hausdorf ($=T_2$) であり, 基数はすべて無限とする。特に，ω と ω_1 はそれぞれ可算基数と最初の非可算基数を表す。$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ は無限可算離散空間を表す。

先ずは D-空間の定義から始めたい。

定義 1. 空間 X の**近傍対応** U とは，$U: X\to\tau(X)$ で $x\in U(x)$ $(\forall x\in X)$ となる対応のこと，ここで $\tau(X)$ は X の位相を表す。空間 X が **D-空間**であるとは，X の任意の近傍対応 U に対して，X のある離散閉集合 D で，$\bigcup\{U(x): x\in D\}=X$ となるものが存在するとき。

D-空間の概念は 1970 年代に van Douwen によって導入された（[10] 参照）。その後約 20 年間くらいは注視される研究対象ではなかったが，van Douwen-Lutzer [9] と Arhangel'skiĭ-Buzuyakova [3] の論文を契機に，D-空間の研究は注目され急速に発展してきたように思える。2000 年ごろから 2020 年くらいの間に，実に多くの論文が発表されている。この 20 年間を半分くらいを境に前期と後期に分けるとしたら，D-空間研究前期の状況を知るためには，Gruenhage による survey [13] が便利である。

空間の「被覆性」とは，任意の開被覆がある種の開（閉）細分をもつ性質を意味する。代表的な被覆性は Lindelöf 性や paracompact 性であろう。なぜ D-空間研究が興味深いかというと，D-空間は被覆性のひとつにもかかわらず，他の被覆性との関係が全く分かっていないことである。特に強調される問題「正則 Lindelöf 空間が D-空間となるか？」は

*1 本研究は科研費 (課題番号:23K03206) の助成を受けたものである.
*2 本講究録は京大数理解析研究所の協力によるものである.

未だに解かれていない。正則性を除けば，集合論的な仮定のもとで，反例があることは知られている（[26] 参照）が，この問題の完全解決にはまだ遠い。

最近までの 4 半世紀の間に，確かに D-空間研究は大幅に進歩してきたが，重要な問題はまだ少なからず残されている。その一方で，D-空間の一般化として，いくつかの概念が創出され研究されてもきた。そのうちの 3 つの一般化およびそれに関する結果を，以下に述べていく。その大部分は講演後に出版された論文 [18] において掲載されている。詳しくはそれを参照されたい。

2 Dual discrete 性

D-空間の自然な一般化としては，Mill-Tkachuk-Wilson [22] によって 2007 年に導入された次の概念がある。

定義 2. 空間 X が **dually discrete** であるとは，X の任意の近傍対応 U に対して，X のある離散部分集合 D で，$\bigcup\{U(x) : x \in D\} = X$ となるものが存在するとき。

これは D-空間の定義における「離散閉集合」を「離散集合」に置き換えただけのものである。しかし，離散閉集合は全体空間 X に関連しているが，この場合の離散集合は離散空間全体によるクラスの要素として扱える。これは離散空間のクラスをさらに一般的な空間のクラス $\mathcal{P}$ に拡張させて，このクラス $\mathcal{P}$ が self-dual かどうかという新たな問題を生じさせる（詳しくは [22] 参照）。

その一方では，dually discrete 空間と D-空間はかなり異なる。実際，すべての正則非可算基数の空間は D-空間ではないが，Peng [24] は「すべての GO-空間は dually discrete である」ことを示した。従って，dually discrete 空間のクラスは，D-空間のそれよりはるかに広いものとなっている。

我々は 2015 年に次のことを証明した。

定理 2.1 ([16])**.** $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は D-空間ではない。

それは自然と次の問題を生じる。

問題 2.2 ([16])**.** $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は dually discrete となるか？

これに対する部分解として，[7, Theorem 2.5] の証明と同じ手法を用いて，次を示すことができる。

命題 2.3. S-空間の存在を仮定すると，$\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ は dually discrete ではない。

CH のもとでは，S-空間は存在するから，

系 2.4. CH のもとで，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は dually discrete ではない。

それでも次の問題が残るが，いまだ未解決である。

問題 2.5. Martin's Axim + ¬CH のもとで，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は dually discrete となるか？

この問題はもともと [7, Problem 4.7] に起因したものである。

定義 3. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を無限積空間とする。その任意の 1 点 $s = \langle s_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda} \in X$ をとる。ここで，X の部分空間

$$\Sigma = \{x = \langle x_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda} \in X : \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq s_\lambda\} \text{ は高々可算 }\}$$

を $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ からなる **Σ-積空間**という。その点 s は Σ の**基点**（通常は省略）という。
特にここでは，ω_1 個の $\mathbb{N}$ のコピーからなる Σ-積空間を $\Sigma\mathbb{N}^{\omega_1}$ で表す（基点は通常 $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\omega_1}$ をとる）。

上記の定理 2.1 をより正確に述べると，次のようになる。

定理 2.1*([16]). $\mathbb{N}^{\omega_1}$ のある dually discrete 閉集合 F で D-空間でなく，$\Sigma\mathbb{N}^{\omega_1}$ に含まれるものが存在する。

これより自然に次の問題が生じる。

問題 2.6. $\Sigma\mathbb{N}^{\omega_1}$ は dually discrete となるか？

この問題は残念ながら未解決であるが，その部分解として次の結果を証明できた。

定理 2.7. コンパクト距離空間からなる Σ-積空間は，dually discrete となる。

この定理の証明にあまり予備知識は必要ないが，理解するためには帰納法に習熟していることが望ましい。かなり複雑で分かりにくいかもしれない。

系 2.8. 2 点の離散空間 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ からなる Σ-積空間は，dually discrete となる。

一般のコンパクト距離空間に比べて，2 点の離散空間 $\mathbf{2}$ はかなり単純な空間である。問題 2.6 の部分解として，最初に系 2.8 の証明から着手して，その後に定理 2.7 の証明へと発展していった。しかし，この系 2.8 の直接証明は定理 2.7 のそれに比べてかなり簡単そうであるが，実際にはその複雑さに大きな違いはない。

3 Irreducible 性

D-空間の一般化の中では，今後は irreducible 性がもっとも研究されるべき課題であると考えている。従って，本講究録ではこの性質に重点を置いて述べていく。先ずは，その定義から述べよう。

定義 4. 集合 S の被覆 $\mathcal{A}$ が **minimal** であるとは，任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A} \setminus \{A\}$

が S の被覆とならないとき。空間 X が **irreducible** であるとは，X の任意の開被覆がある minimal 開細分をもつとき。

上記は極めてクラシカルな概念で，1950 年に Arens-Dugundji [1] により導入された。そこで，彼らは metacompact 空間（＝任意の開被覆が点有限な開細分をもつ）が irreducible であることを示した。その後，1984 年に Mashburn [21] により，submetalindelöf 空間が irreducible になると一般化された。しかし，weakly submetacompact 空間では，irreducible 性が従わない例がある（[11] 参照)。

ほとんどの被覆性はその定義から閉集合に関して保存される。ところが，irreducible 性は被覆性のひとつであるにもかかわらず「閉集合に関して保存されない」という特殊な状況にある（[8, p.221] 参照)。そのためか，これまで irreducible 性は単純な定義でありながらも，現在までの 4 分の 3 世紀もの長い間，散発的に研究されるだけであった。そこで，我々がそのような比較的マイナーと思われる位相的性質の研究に至った理由から説明していきたい。

D-空間研究前期のいくつかの論文（[14, p.562], [10, p.371], [13, p.15-16] 等）において，次の主張:

($*$) D-空間でない弱い被覆性をもつ重要な空間は，これまで見つかっていない

が指摘されている。

$\mathbb{N}^{\omega_1}$ はよく知られた重要な空間ではあるが, 定理 2.1 から D-空間ではない。それだけでなく, ほぼすべての被覆性をもたない。実際，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は normal 性，weakly submetalindelöf 性，weakly suborthocompact 性，countably metacompact 性等のかなり弱い被覆性さえもたない（例えば [17] 参照)。それ故，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は上の ($*$) には適合しないと思われる。後述の補題 4.2 から簡単にわかるように，D-空間は irreducible である。そこで，irreducible 性は被覆性のひとつだから「$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は irreducible でない」と考えるのは自然である。ところが，反対に次を証明できてしまった。

定理 3.1 ([18])**.** $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は irreducible である。

これは全くの予想外の結果であった。同時に irreducible 性がいかに特殊な被覆性かを如実に示している。第 5 節において，定理 3.1 はかなり一般的な形で証明される。それだけでなく，基数 κ の取り方によって「$\mathbb{N}^{\kappa}$ の irreducible 性が決定できない」という，さらに予想外の結果へと発展していく。

一般に「意外な結果」はそれだけに止まらない。実際，その奥には大抵研究すべき課題が少なからず眠っていることが多い。このように，我々が比較的マイナーな概念と思われる irreducible 性に注目したのは，D-空間研究の延長上にその概念があったからのみならず，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ に関する意外な結果が得られたからである。

4　2 つの基数関数

空間 X に対して，次の Lindelöf degree $L(X)$ と extent $e(X)$：

$$L(X) = \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は，基数 } \kappa \text{ 以下の部分被覆をもつ }\},$$
$$e(X) = \min\{\kappa : X \text{ の任意の離散閉集合は，基数 } \kappa \text{ 以下となる }\}$$

はよく知られている。これらをわずかに修正して得られる 2 つの基数関数

$$L^+(X) = \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は，基数 } \kappa \text{ 未満の部分被覆をもつ }\},$$
$$e^+(X) = \min\{\kappa : X \text{ の任意の離散閉集合は，基数 } \kappa \text{ 未満となる }\}$$

を新たに定義する。ともに「以下」を「未満」に変更しただけである。

事実 4.1. 空間 X に対して，次が成り立つ。

(1) $L(X) \le L^+(X) \le (L(X))^+$,
(2) $L(X)$ が successor 基数ならば, $L^+(X) = (L(X))^+$,
(3) $e(X) \le e^+(X) \le (e(X))^+$,
(4) $e(X)$ が successor 基数ならば, $e^+(X) = (e(X))^+$,
(5) $e^+(X) \le L^+(X)$,
(6) もし F が X の閉集合ならば，$L^+(F) \le L^+(X)$ かつ $e^+(F) \le e^+(X)$.

最初に述べた irreducible 性の定義は分かり易いが，使いにくい面がある。その点では，次の補題が便利である。

補題 4.2 ([6])**.** 空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ がある minimal 開細分をもつための必要十分条件は，X のある離散閉部分集合 D と，ある対応 $D \ni \forall d \mapsto U_d \in \mathcal{U}$ $(d \in U_d)$ で，$\bigcup\{U_d : d \in D\} = X$ となるものが存在すること。

この補題から，D-空間が irreducible であること，また次の結果も明らかである。

事実 4.3. もし空間 X が irreducible ならば，$e(X) = L(X)$ かつ $e^+(X) = L^+(X)$.

5　無限積空間の irreducible 性

空間 X と基数 κ に対して，X^κ は κ 個の X のコピーからなる無限積空間を表す。特に，X^ω は可算個の X のコピーからなる積空間を表す，即ち $X^\omega = X \times X \times \cdots$ である。

積空間 X^ω の irreducible 性について，次のすっきりした形の必要十分条件が求まる。

定理 5.1. 空間 X に対して，X^ω が irreducible であるための必要十分条件は，等式 $L^+(X^\omega) = e^+(X^\omega)$ が成り立つことである。

定理 5.1 の証明は論文 [18] にて発表済みであるが，その証明は長くはないものの，かなり分かりにくいかもしれない。ここでは 2 つの補題に分けて，多少分かり易いように証明を再整理してみたい。

補題 5.2. 無限積空間 $Z = X^\omega$ において, 以下の (i)-(iv) が成り立つ。

(i) Z の base $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$,
(ii) Z から Z への連続写像の列 $\langle g_i : i \in \omega\rangle$,
(iii) 関数 $\varphi_L : \omega \to \omega$ が存在して,
(iv) 任意の $z, c \in Z$ と $m \in \omega$ に対して, 次の 2 条件を満たす $d \in Z$ が存在する。
(iv-1) $\{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : d \in B\} = \{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : z \in B\}$,
(iv-2) $\omega \setminus \{\varphi_L(n) : n < m\} \subset \{i \in \omega : g_i(d) = c\}$.

[証明] 各 $n \in \omega$ に対して, $\pi_n : X^\omega \to X^n$ は projection とする。$\mathcal{B}_n = \{{\pi_n}^{-1}[V] : V$ は X^n の開集合 $\}$ とすれば, (i) $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ は $Z = X^\omega$ の base である。

全単射 $\varphi : \omega \to \omega \times \omega$ を 1 つ固定する。φ の逆写像 $\psi : \omega \times \omega \to \omega$ をとると, 分解 $\omega = \bigoplus_{i\in\omega}\{\psi(i,j) : j \in \omega\}$ が得られる。 各 $i \in \omega$ ごとに, $x = \langle x(n) : n \in \omega\rangle \in X^\omega = Z$ の $\{\psi(i,j) : j \in \omega\}$ 部分のファクターを切り出す全射連続写像 $g_i : Z \to Z$, $g_i(x) = \langle x(\psi(i,j)) : j \in \omega\rangle$, をとって, (ii) を得る。また, 各 $n \in \omega$ に対して, $\varphi(n) = \langle \varphi_L(n), \varphi_R(n)\rangle$ として, (iii) の関数を取る。

$z, c \in Z$, $m \in \omega$ とする。$i \in \omega \setminus \{\varphi_L(n) : n < m\}$ ならば $\{\psi(i,j) : j \in \omega\}$ は m 未満を含まないので，$d \in Z$ を，$\pi_m(d) = \pi_m(z)$，かつ $\omega \setminus \{\phi_L(n) : n < m\} \subset \{i \in \omega : g_i(d) = c\}$ となるようにとれる。$B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n$ ならば, $x \in Z$ が B に属すかどうかは $\pi_m(x)$ で決まるので, $\{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : d \in B\} = \{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : z \in B\}$ である。よって，(iv) が成り立つ。 $\Box$

補題 5.3. 上の (i)-(iv) の条件を満たす空間 Z が irreducible であるための必要十分条件は，等式 $L^+(Z) = e^+(Z)$ が成り立つことである。

[証明] $L^+(Z) = e^+(Z)$ を仮定して, Z の開被覆 $\mathcal{U}$ が minimal 開細分をもつことを示す。$\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ の場合を考えれば十分である。$\mathcal{U}$ の部分被覆 $\mathcal{W}$ で, $|\mathcal{W}| < L^+(Z) = e^+(Z)$ となるものが存在し, よって, $\mathcal{W}$ から Z のある離散閉集合 C への単射 $\mathcal{W} \ni W \mapsto c_W \in C$ も取れる。各 $W \in \mathcal{W}$ に対して, $W \in \mathcal{B}_{n(W)}$ となる $n(W) \in \omega$ をとる。$W \not\subset \bigcup\{W' \in \mathcal{W} : n(W') < n(W)\}$ と考えてもよい。$m = n(W)$, $c = c_W$ に対して (iv) を使えば,

- $d_W \in W \setminus \bigcup\{W' \in \mathcal{W} : n(W') < n(W)\}$,
- $\omega \setminus \{\varphi_L(n) : n < n(W)\} \subset \{i \in \omega : g_i(d_W) = c_W\}$

となる $d_W \in Z$ を取ることができる。

$D = \{d_W : W \in \mathcal{W}\}$ とする。$z \in Z$ に対して, $z \in W_z^*$ となる $W_z^* \in \mathcal{W}$ と, $i_z^* \in \omega \setminus \{\varphi_L(n) : n < n(W_z^*)\}$ を一つ固定する。$g_{i_z^*}(z)$ の開近傍 P_z で $|P_z \cap C| \leq 1$ となるものをとり, $O_z = {g_{i_z^*}}^{-1}[P_z]$ とすると, $O_z \cap W_z^*$ は z の開近傍である。そうすると, $d_W \in O_z \cap W_z^*$ となる $W \in \mathcal{W}$ は高々 1 つしかない。なぜならば, $d_W \notin \bigcup\{W' \in \mathcal{W} : n(W') < n(W)\}$ なので, $n(W) \leq n(W_z^*)$, $i_z^* \in \omega \setminus \{\varphi_L(n) : n < n(W)\}$, $g_{i_z^*}(d_W) = c_W \in P_z \cap C$ であるから, そのような c_W は高々 1 つしかなく, 単射性から W も高々 1 つしかない。 よって, D は Z における離散閉集合である。

$d \in D$ に対して, $d_W = d$ となる $W \in \mathcal{W}$ が存在するが, $d_W = d \in O_d \cap W_d^*$ なので, そのような W は 1 つしかない。その W を $W\lceil d\rceil$ で表せば, 対応 $D \ni d \mapsto W\lceil d\rceil = W \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ $(d = d_W \in W = W\lceil d\rceil)$ が得られる。$z \in Z$ に対して, $d = d_{W_z^*}$ を取れば $d \in D$, $z \in W_z^* = W\lceil d\rceil$ なので, $\bigcup\{W\lceil d\rceil : d \in D\} = Z$ である。補題 4.2 より, $\mathcal{U}$ は minimal 開細分をもつ。 □z

注意 5.4. 定理 5.1 において，X^ω の ω 乗を削除することができないことは容易に分かる。

基数 κ は無限だから，$\kappa \cdot \omega = \kappa$ より，X^κ は $(X^\kappa)^\omega$ と同相になる。そこで定理 5.1 は，容易に次のように拡張される。

系 5.5. 空間 X と基数 κ に対して，X^κ が irreducible であるための必要十分条件は，等式 $L^+(X^\kappa) = e^+(X^\kappa)$ が成り立つことである。

基数 κ 以下に弱到達不可能基数（＝正則な極限基数）が存在しなければ, Mycielski の結果 [23] から，$e(\mathbb{N}^\kappa) = \kappa$ かつ $e^+(\mathbb{N}^\kappa) = \kappa^+$ を得る。さらに，$w(\mathbb{N}^\kappa) = \kappa$ から，$e^+(\mathbb{N}^\kappa) = L^+(\mathbb{N}^\kappa) = (w(\mathbb{N}^\kappa))^+ = \kappa^+$ が従うので，系 5.5 は次を生じる。

系 5.6. 基数 κ 以下に弱到達不可能基数が存在しなければ, $\mathbb{N}^\kappa$ は irreducible である。

注意 5.7. ZFC が無矛盾ならば「ZFC+“弱到達不可能基数は存在しない”」も無矛盾であることはよく知られている。そこで，系 5.6 から

「すべての基数 κ に対して，$\mathbb{N}^\kappa$ は irreducible である」

とみなしても，矛盾は生じない。ところが，これが ZFC だけで証明できるかというと，そうもいかないようである。

集合論的に supercompact 基数という巨大な基数の存在の無矛盾性を仮定すると，

「ω_1-strongly compact 基数という巨大基数が存在して，その最小基数が特異である」

というような ZFC のモデルが存在することが知られており, そこでは,

「$\mathbb{N}^\kappa$ が irreducible でないような基数 κ が存在する」

という上記と反対の結果が生じてくる。

この ω_1-strongly compact 基数の詳細に関しては，ここで述べる余裕はないので，論文 [4, 5, 27] などを参照されたい。

ω_1 以下には弱到達不可能基数が存在しないのは明らかなので，先に述べた定理 3.1 は系 5.6 の特別な場合である。

注意 5.8. 定理 3.1 に先立って，Larson [20] は「2 点からなる離散空間 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ の ω_1 個による積空間から 1 点 p を除去した空間 $\mathbf{2}^{\omega_1} \setminus \{p\}$ は irreducible である」を示した。

6　GO-空間の irreducible 性

2024 年 6 月の講演後に，irreducibility の研究は著しく進展した。その内容は論文 [19] にまとめられ，今後発表の予定である。その一部をこの節で紹介したい。

D-空間でない簡単な空間といえば，順序数空間 ω_1 であろう。実際，ω_1 の開被覆 $\{[0, \alpha] : \alpha \in \omega_1\}$ は minimal 開細分をもたないから，ω_1 は irreducible ですらない。順序数空間を一般化すると，GO-空間となる。

GO-空間（一般順序位相空間）とは，トリプル $\langle X, <, \tau \rangle$ のことで，$<$ と τ はそれぞれ X 上の全順序と位相であり, その base は X の凸集合からなっている。ここで，全順序集合 $(X, <)$ の部分集合 I が**凸集合**であるとは，任意の $a, b \in I$ $(a < b)$ に対して，$(a, b)_X = \{x \in X : a < x < b\} \subset I$ となるとき。

GO-空間はある全順序位相空間の（閉）部分空間として特徴付けされる。そこで，任意の順序数空間の部分空間および任意の全順序位相空間は GO-空間となる。

まず，GO-空間の位置関係を述べておく。

$$\begin{tikzcd} \text{順序数空間の部分空間} \arrow[r] & \text{GO-空間} \arrow[r] & \text{単調正規} & \\ \text{全順序位相空間} \arrow[ur] & & M_3\text{-空間} \arrow[u] & \text{距離空間} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

D-空間研究が発展していく契機となった van Douwen-Lutzer の定理 (1997 年 [9]) と Engelking-Lutzer の定理 (1977 年 [12]) を結合すると，次のように表現される。

定理 6.1 ([9, 12])**.** 任意の GO-空間 X に対して，次は同値。

(a) X は paracompact である。
(b) X は weakly submetalindelöf である。
(c) X は正則非可算基数の stationary 部分集合に同相な閉部分空間を含まない。
(d) X は D-空間である。

さらに着目すべきは，Pressing Down 補題で簡単にわかる次の事実である,。

事実 6.2. 任意の正則非可算基数の stationary 部分集合は，weakly submetalindelöf でもなく，irreducible でもない (よって, D-空間でもない)。

そこで事実 6.2 から，定理 6.1 に「X は irreducible である」を同値条件として付加で

きても不思議ではない。その観点から次の問題を生じてくる。

問題 6.3. もし GO-空間 X が irreducible ならば，それは D-空間となるか？

この問題を解決するために，我々は次の定理を証明している。

定理 6.4. 任意の GO-空間 X に対して，次は同値。

(a) X は irreducible である。
(b) X の任意の閉凸集合 I に対して，$L^+(I) = e^+(I)$ となる。
(c) X の任意の非可算閉凸集合 I に対して，$L^+(I) = e^+(I)$ となる。

定理 6.4 を用いると，問題 6.3 に対する反例を順序数空間の部分空間として，次のように見つけることができる。

例 6.5. 順序数空間 $\omega_1 \cdot \omega_1$ において，irreducible 部分空間 A で D-空間でないものが存在する。

注意 6.6. $\omega_1 \cdot \omega_1$ は直積ではなくて, 順序数としての積を表している。この順序数は, ω_1 より若干大きいが, ω_2 よりはずっと小さい。順序数 α が $\omega_1 \cdot \omega_1$ より小さいとき，順序数空間 α は irreducible で D-空間でないいかなる部分空間をも含まない（[19] 参照）。

7 aD-空間

最後に，D-空間の一般化として，Arhangel'skiǐ-Buzyakova [3] によって 2002 年に導入された次の概念を扱いたい。

定義 5. 空間 X が **aD-空間**であるとは，X の任意の閉集合 F と X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，F のある離散閉集合 D とある対応 $D \ni \forall d \mapsto U_d \in \mathcal{U}$ $(d \in U_d)$ が存在して，$F \subset \bigcup\{U_d : d \in D\}$ となるとき。

その定義の後で，irreducible 性の概念を用いて，次のことが指摘された。

命題 7.1 ([2])**.** 空間 X が aD-空間であるための必要十分条件は，X の任意の閉集合が irreducible であること。

従って，次の関係が容易に分かる：

$$D\text{-空間} \ \rightarrow \ aD\text{-空間} \ \rightarrow \ \text{irreducible 空間}$$

第 3 節で述べたように，irreducible 性は閉集合で保存されないから，irreducible 空間は aD-空間とならない。また，Soucup [25] は，aD-空間であって D-空間でない例を構成している。それ故，上記の関係の逆は成り立たない。

補題 7.2 ([15])**.** 距離空間 $M_\lambda, \lambda \in \Lambda$, からなる Σ-積空間 Σ に対して，等式 $e(\Sigma) = \sup\{e(M_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つ。

この補題を使えば，定理 2.1 のわずかな一般化として，次が得られる。

命題 7.3. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は aD-空間ではない。

$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は $\mathbb{R}^{\omega_1}$ の閉集合だから，次は明らかである。

系 7.4. $\mathbb{R}^{\omega_1}$ は aD-空間ではない。

これは Arhangel'skiĭ の問題 [2, Problem 1.13] の肯定的解決である。

参考文献

[1] R. Arens and J. Dugundji, *Remarks on the concept of compactness*, Portugalieae Math. **9** (1950), 141–143.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, *D-spaces and covering properties*, Topology and Appl. **146-147** (2005), 437–449.

[3] A. V. Arhangel'skiĭ and R. Z. Buzyakova, *Addition theorems and D-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43** (2002), 653–663.

[4] J. Bagaria and M. Magidor, *Group radicals and strongly compact cardinals*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 1857–1877.

[5] J. Bagaria and M. Magidor, *On ω_1-strongly compact cardinals*, J. Symb. Log. **79** (2014), 266–278.

[6] J. R. Boone, *On irreducible spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **12** (1975), 143–148.

[7] R. Z. Buzyakova, V. V. Tkachuk and R. G. Wilson, *A quest for nice kernels of neighbourhood assignments*, Comment. Math. Univ. Carolin. **48** (2007), 689–697.

[8] U. J. Christian, *Concering certain minimal cover refineable spaces*, Fund. Math. **76** (1972), 213–222.

[9] E. K. van Douwen and D. J. Lutzer, *A note on paracompactness in generalized ordered spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1237–1245.

[10] E. K. van Douwen and W. F. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. **81** (1979), 371–377.

[11] E. K. van Douwen and H. Wicke, *A real, weird topology on the reals*, Houston J. Math. **3** (1977), 141–152.

[12] R. Engelking and D. J. Lutzer, *Paracompactness in ordered spaces*, Fund. Math. **94** (1977), 49–58.

[13] G. Gruenhage, *A survey of D-spaces*, Contemporary Mathmatics, **533** (2011), 13–28.

[14] G. Gruenhage and P. Szeptycki, *A game and its relation to netweight and D-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin **52** (2011), 561–568.

[15] Y. Hirata, T. Usuba and Y. Yajima, *Equalities for the extent of infinite products and Σ-products*, Topology and Appl. **307** (2022), 107946, 12 pp.

[16] Y. Hirata and Y. Yajima, *On the D-property of certain products*, Topology and Appl. **195** (2015), 297–311.

[17] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-, C- and P-embedded subsets in products and the undecidability*

of a certain property on $\mathbb{N}^{\omega_1}$, Topology and Appl. **283** (2020), 107350, 16 pp.

[18] Y. Hirata and Y. Yajima, *Dual discreteness of* Σ*-products and irreducibility of infinite products*, Topology and Appl. **356** (2024), 109032, 12 pp.

[19] Y. Hirata and Y. Yajima, *Irreducibility on GO-spaces and monotonically normal spaces*, preprint.

[20] P. B. Larson, *Irreducibility of product spaces with finitely many points removed*, Topology Proc. **30** (2006), 327–333.

[21] J. D. Mashburn, *A note on irreducibility and weak covering properties*, Topology Proc. **9** (1984), 339–352.

[22] J. van Mill, V. V. Tkachuk and R. G. Wilson, *Classes defined by stars and neighborhood assignments*, Topology and Appl. **154** (2007), 2127-2134.

[23] J. Mycielski, α*-incompactness of* N^α, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **12** (1964), 437–438.

[24] L.-Xue Peng, *On linear neighborhood assignments and dually discrete spaces*, Topology and Appl. **155** (2008), 1867-1874.

[25] D. T. Soukup, *Constructing aD, non-D-spaces*, Topology and Appl. **158** (2011), 1219–1225.

[26] D. T. Soukup and P. J. Szeptycki, *A counterexample in the theory of D-spaces*, Topology and Appl. **159** (2012), 2669–2678.

[27] T. Usuba, *A note on* δ*-strongly compact cardinals*, Topology and Appl. **301** (2021), 107538, 10 pp.

Faculty of Engineering, Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: hirata-y@kanagawa-u.ac.jp

Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: yajimy01@kanagawa-u.ac.jp