対 $(SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ の主系列表現に対する微分対称性破れ作用素について

龍谷大学　ビクトール・ペレズ＝バルデス*
Víctor PÉREZ-VALDÉS†
Ryukoku University

Abstract

本稿では，S^3 上のランク $2N+1$ のベクトル束 $\mathcal{V}_\lambda^{2N+1} \to S^3$ と S^2 上の直線束 $\mathcal{L}_{m,\nu} \to S^2$ の切断空間の間の微分対称性破れ作用素 $\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m} : C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}) \to C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})$ の構成・分類問題を考え，これらを $|m| = N$ の場合に解決する. これらの結果は [15] に記載されており，本稿では要約だけ説明することにする.

1　はじめに

3次元球面 S^3 の共形変換群 $SO_0(4,1)$ で同変な既約ベクトル束は，奇数次のランク $(= 2N+1)$ と複素数 λ でパラメトライズされる．一方，2次元球面 S^2 の共形変換群 $SO_0(3,1)$ で同変な既約ベクトル束はすべて直線束となり，整数 m と複素数 ν でパラメトライズされる.

本稿では, 3次元球面上のベクトル束 $\mathcal{V}_\lambda^{2N+1}$ から，2次元球面上の直線束 $\mathcal{L}_{m,\nu}$ への微分作用素であって，共形変換群の組 $SO_0(4,1) \supset SO_0(3,1)$ に関する対称性破れ作用素

$$\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m} : C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}) \to C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu}) \tag{1.1}$$

の構成・分類問題を考える．特に，これらの問題を $|m| = N$ の場合に完全に解決し (定理 1.1 および定理 1.2)，$|m| > N$ の場合に解決方法の概要を述べる (注意 4.4).

表現論の観点から見れば，本稿は2つの簡約 Lie 群の主系列表現の間の対称性破れ作用素を研究していることになる．この観点から，本稿の動機を次のように述べるこ

* 本研究は日本学術振興会・外国人特別研究員奨励費（ID: P24018）の助成を受けたものである.
† perez-valdes@mail.ryukoku.ac.jp

とができる.

群の表現論において，「最小単位」のものに対応するのは既約表現である．有限次元表現については，既約表現の分類と，既約表現への分解という基本課題は20世紀前半から研究されてきた．特に，後者は「分岐則の問題」と呼ばれる (cf. [6]).

分岐則の問題. *Lie* 群 G の既約表現 Π を部分群 G' に制限したときに，どのように振る舞うか（どのように分解するか）？

無限次元表現の場合には多くの解析的な困難が知られていた一方，小林俊行氏の90年代の一連の論文 ([2]) を契機に，最近の30年間において分岐則の理論が M. Duflo, B. Gross, 小林俊行, 大島芳樹, D. Prasad, B. Speh, J. A. Vargas 等により大きく発展している.

小林氏は Lie 群の無限次元表現論における分岐則の一般理論を切り拓くにあたって，三つのステージに分けられるプログラム (*ABC program* [5]) を提起された.

- **ステージ A**: 表現の制限における一般論
- **ステージ B**: 分岐則の決定
- **ステージ C**: 対称性破れ作用素の構成

ここで, A, B, C は順に **A**bstract features of the restriction, **B**ranching laws, **C**onstruction of symmetry breaking operators のそれぞれの頭文字に由来する.

ステージ A の目標は，表現の制限 $\Pi|_{G'}$ に対し，重複度やスペクトルなどの抽象的な理論を展開することである.

ステージ B は表現の制限 $\Pi|_{G'}$ の既約分解を求めることを目指す．表現 Π が，制限 $\Pi|_{G'}$ が完全可約になるような G の有限次元表現の場合は, $\Pi|_{G'}$ の「既約分解」は有限直和となる ($SU(2)$ の有限次元表現のテンソル積に対する Clebsch–Gordan formula はその一例である)．表現 Π が G のユニタリ表現の場合は，その「既約分解」を直積分の概念を用いて与えることができる (Mautner–Teleman の定理)．表現 Π がユニタリとは限らない一般の場合では，このような分解はできないが, π を G' の任意の既約表現とするとき，ステージ B を空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ の決定問題として捉えることができる.

空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ の元は，**対称性破れ作用素 (symmetry breaking opera-**

tors) と呼ばれる．ステージ C では，この対称性破れ作用素を具体的に構成することを目標とする．抽象性の高いステージ A, B と異なり，ステージ C は具体的な表現の実現に依存するため，幾何的および解析的問題と関わることがよくある．

本稿ではステージ C に注目する．具体的に，一つの簡約 Lie 群の対 (G, G') に焦点を当て，微分作用素として表される対称性破れ作用素の構成と分類問題に取り組む．古典的な例としては，保型形式に現れる Rankin–Cohen の双線型微分作用素があり，これは $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現のテンソル積に対する対称性破れ作用素とみなせる．また, A. Juhl が共形幾何学の枠組みで構成した共形不変な微分作用素は，ローレンツ群の球主系列表現に対する対称性破れ作用素である ([1]).

この微分対称性破れ作用素をある程度一般的な幾何的設定で構成・分類するために，小林氏が F-method と呼ばれる手法を提起された ([3]). この手法は非常に重要なツールであり，ここ数年，具体的な対 (G, G') の場合に多く用いられ，微分対称性破れ作用素の構成・分類に関するいくつかの問題が解決されてきた ([7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15]).

本稿では $(G, G') = (SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ の場合に集中し，任意の主系列表現 $(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu}))$ に対して，微分対称性破れ作用素の構成・分類問題を考える．具体的に，

問題 A. 微分対称性破れ作用素 (1.1) の成す空間

$$\mathrm{Diff}_{SO_0(3,1)}(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})) \tag{1.2}$$

が零にならないためのパラメータ $(\lambda, \nu, N, m) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ に対する必要十分条件を与えよ．さらに, (1.2) の次元を決定せよ．

問題 B. 空間 (1.2) の具体的な生成元を構成せよ．

上記の問題 A と B は $|m| \geq N$ の場合に最近著者によって完全に解決されたが，本稿では特に $|m| = N$ の場合に焦点を当てる (cf. [15]). なお, $|m| > N$ の場合は現在執筆中であるため，ここでは詳しい説明を省略するが，この場合に得られる結果については注意 4.4 で述べる．

1.1 主結果

さて，本稿の主結果を述べよう．下記の定理 1.1 と定理 1.2 を用いると，問題 A と B ($|m| = N$ の場合) を完全に解決することができる．

定理 1.1 ([15, Thm. 1.2])**.** 任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ と $m = \pm N$ に対し，次の条件が同値である．

(i) $\mathrm{Diff}_{SO_0(3,1)}(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})) \neq \{0\}$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}_{SO_0(3,1)}(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})) = 1$.

(iii) $\nu - \lambda \in \mathbb{N}$.

上記の定理によると, (1.2) は高々一次元であることが分かる．次の定理で具体的な生成元を与えるが，その前にいくつかの記号を定義する．

自然数 $\ell \in \mathbb{N}$ と一変数の多項式 $g \in \mathbb{C}[t]$ が与えられたとき, $(I_\ell g)(x, y)$ を次のように定義する:

$$(I_\ell g)(x, y) := x^{\frac{\ell}{2}} g\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right).$$

上記の $I_\ell g$ は ℓ-inflation of g と呼ばれるものである (cf. [7, Sec. 9.1]). $I_\ell g$ が一般的に $\mathbb{C}^2$ 上の有理型関数だが,

$$g \in \mathrm{Pol}_\ell[t]_{\mathrm{even}} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{t^{\ell-2j} : j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\ell}{2}\right]\}$$

ならば, $(I_\ell g)(x^2, y)$ が ℓ 次斉次多項式であることが容易に確められる．

微分作用素 $\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m}$ を，コンパクト化 $\iota : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow S^3$ を用いて, $\mathbb{R}^3$ の座標 (x_1, x_2, x_3) で表すことにする:

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}) & \dashrightarrow & C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu}) \\
{\scriptstyle \iota^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle \iota^*}\big\downarrow \\
C^\infty(\mathbb{R}^3, V^{2N+1}) & \xrightarrow{\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m}} & C^\infty(\mathbb{R}^2)
\end{array}$$

ただし, $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^2 \simeq \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ とみなし, $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (z := x_1 + ix_2) + x_3$ と同一視する．

ベクトル空間 V^{2N+1} の標準基底を $\{u_d : d = 0, 1, \ldots, 2N\}$ とし (cf. (4.10))，その双対基底を $\{u_d^\vee : d = 0, 1, \ldots, 2N\}$ と表記する．

さて, $\nu-\lambda\in\mathbb{N}$ と仮定し, $\widetilde{\mathbb{C}}_{\lambda,\nu}$ を次のスカラー値微分作用素とする：

$$\widetilde{\mathbb{C}}_{\lambda,\nu} := \mathrm{Rest}_{x_3=0}\left(I_{\nu-\lambda}\widetilde{C}^{\lambda-1}_{\nu-\lambda}\right)\left(-4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}},\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

ただし, $\widetilde{C}^{\mu}_{\ell}$ は再正規化された Gegenbauer 多項式である (cf. [9, 7, 14, 15]).

$k=0,1,\ldots,2N$ に対し，係数 A_k を次のように定義する:

$$A_k := \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+N-1+\left[\frac{\nu-\lambda-k+1}{2}\right])}{\Gamma(\lambda+N-1)}, & 0\leq\nu-\lambda\leq N, \\ \dfrac{\Gamma(\lambda+N-1+\left[\frac{\nu-\lambda-k+1}{2}\right])}{\Gamma(\lambda+N-1+\left[\frac{\nu-\lambda-2N+1}{2}\right])}, & \nu-\lambda>N. \end{cases} \tag{1.3}$$

定理 1.2 ([15, Thm. 1.3])**.** *$\lambda,\nu\in\mathbb{C},N\in\mathbb{N}$ とし, $m=\pm N$, $a:=\nu-\lambda\in\mathbb{N}$ とおく．このとき, (1.2) の任意の微分対称性破れ作用素は，次の次数 a の微分作用素 $\mathbb{D}^{N,m}_{\lambda,\nu}$ の倍数である.*

- $m=N$

$$\mathbb{D}^{N,N}_{\lambda,\nu} = \sum_{k=0}^{2N} 2^k A_k \widetilde{\mathbb{C}}_{\lambda+N,\nu+N-k}\frac{\partial^k}{\partial\bar{z}^k}\otimes u_k^{\vee}, \tag{1.4}$$

- $m=-N$

$$\mathbb{D}^{N,-N}_{\lambda,\nu} = \sum_{k=0}^{2N}(-2)^k A_k \widetilde{\mathbb{C}}_{\lambda+N,\nu+N-k}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\otimes u_{2N-k}^{\vee}. \tag{1.5}$$

2 設定

この章では，$(G,G')=(SO_0(4,1),SO_0(3,1))$ を幾何的な設定で実現し，主系列表現 $(C^\infty(S^3,\mathcal{V}^{2N+1}_\lambda),C^\infty(S^2,\mathcal{L}_{m,\nu}))$ を定義する.

$\mathbb{R}^5$ の符号 $(4,1)$ の二次形式 $Q_{4,1}$ を

$$Q_{4,1}(x) := x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2, \quad \text{for } x={}^t(x_0,\ldots,x_4)\in\mathbb{R}^5,$$

で定義し, de Sitter 群 $O(4,1)$ を次のように実現する.

$$O(4,1)=\{g\in GL(5,\mathbb{R}) : Q_{4,1}(gx)=Q_{4,1}(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}^5\}.$$

$O(4,1)$ の Lie 環を $\mathfrak{g}(\mathbb{R}) := \mathfrak{so}(4,1)$ と表記し, $E_{p,q}$ $(1 \le p, q \le 5)$ を (p,q) 成分のみ 1 で他の成分は全て 0 であるような 5 次正行列とする．ここで $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の次の元を定義する:

$$\begin{aligned} H_0 &:= E_{1,5} + E_{5,1}, \\ C_j^+ &:= -E_{1,j+1} + E_{j+1,1} - E_{5,j+1} - E_{j+1,5} \quad (1 \le j \le 3), \\ C_j^- &:= -E_{1,j+1} + E_{j+1,1} + E_{5,j+1} + E_{j+1,5} \quad (1 \le j \le 3), \\ X_{p,q} &:= E_{q+1,p+1} - E_{p+1,q+1} \quad (1 \le p, q \le 3). \end{aligned}$$

集合 $\{C_j^+ : 1 \le j \le 3\}$, $\{C_j^- : 1 \le j \le 3\}$ および $\{X_{p,q} : 1 \le p, q \le 3\} \cup \{H_0\}$ はそれぞれ，部分 Lie 環 $\mathfrak{n}_+(\mathbb{R}) := \ker(\mathrm{ad}(H_0) - \mathrm{id})$, $\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) := \ker(\mathrm{ad}(H_0) + \mathrm{id})$ および $\mathfrak{l}(\mathbb{R}) := \ker \mathrm{ad}(H_0)$ の基底になり, $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の Gelfand–Naimark 分解は次のようになることに注意する.

$$\mathfrak{g}(\mathbb{R}) = \mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) + \mathfrak{l}(\mathbb{R}) + \mathfrak{n}_+(\mathbb{R}).$$

Ξ を $Q_{4,1}$ で定まる $\mathbb{R}^5$ の円錐とし

$$\Xi := \{x \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} : Q_{4,1}(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^5,$$

射影 $p : \Xi \to S^3$, $x \mapsto p(x) := \frac{1}{x_4} {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3)$ が同型写像 $\widetilde{p} : \Xi/\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} S^3$ を引き起こすことに注意する.

$G = SO_0(4,1)$ を $O(4,1)$ の単位元を含む連結成分とし, $P := \mathrm{stab}_G(1:0:0:0:1)$ とする. この部分群は G の放物型部分群であり, その Langlands 分解は $P = LN_+ = MAN_+$ となる:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B & \\ & & 1 \end{pmatrix} : B \in SO(3) \right\} \simeq SO(3),$$

$$A := \exp(\mathbb{R}H_0) \simeq SO_0(1,1), \quad N_+ := \exp(\mathfrak{n}_+(\mathbb{R})).$$

G は $\Xi/\mathbb{R}^\times$ へ推移的に作用するので次の同型写像が得られることに注意する.

$$G/P \xrightarrow{\sim} \Xi/\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} S^3.$$

$M = SO(3)$ の任意の有限次元既約表現を $(\sigma^{2N+1}, V^{2N+1})$ と表し，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に

対して $L \equiv MA$ の $(2N+1)$ 次元表現 $(\sigma_\lambda^{2N+1}, V_\lambda^{2N+1})$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda^{2N+1} : L = M \times A &\longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V^{2N+1}) \\ (B, \exp(tH_0)) &\longmapsto e^{\lambda t}\sigma^{2N+1}(B).\end{aligned}$$

N_+ を自明に作用させることによって σ_λ^{2N+1} を P の表現として考え $G/P \simeq S^3$ 上のベクトル束 $\mathcal{V}_\lambda^{2N+1}$ を σ_λ^{2N+1} に同伴するベクトル束として定義する:

$$\mathcal{V}_\lambda^{2N+1} := G \times_P V_\lambda^{2N+1}. \tag{2.6}$$

$G' = SO_0(3,1)$ を $G' \simeq \mathrm{stab}_G{}^t(0,0,0,1,0)$ として実現し，その Lie 環を $\mathfrak{g}'(\mathbb{R})$ と表記する. この群の作用で $\Xi \cap \{x_3 = 0\}$ は不変であるので G' は S^2 へ推移的に作用することが分かる:

$$S^2 = \{(y_0, y_1, y_2, y_3) \in S^3 : y_3 = 0\} \simeq (\Xi \cap \{x_3 = 0\}) / \mathbb{R}^\times.$$

$P' := P \cap G'$ は G' の放物型部分群であり, その Langlands 分解は $P' = L'N'_+ = M'AN'_+$ となることが容易に確かめられる:

$$M' = M \cap G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & B & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} : B \in SO(2) \right\} \simeq SO(2),$$
$$N'_+ = N' \cap N_+ = \exp(\mathfrak{n}'_+(\mathbb{R})).$$

ここで Lie 環 $\mathfrak{n}'_+(\mathbb{R})$, $\mathfrak{n}'_-(\mathbb{R})$ はそれぞれ $\mathfrak{n}'_+(\mathbb{R}) := \mathfrak{n}_+(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{n}'_-(\mathbb{R}) := \mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{g}'$ と定義している. 具体的に $\{C_j^+ : 1 \le j \le 2\}$, $\{C_j^- : 1 \le j \le 2\}$ はそれぞれ $\mathfrak{n}'_+(\mathbb{R})$, $\mathfrak{n}'_-(\mathbb{R})$ の基底となることが分かる.

任意の $\nu \in \mathbb{C}$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対し $L' \equiv M'A$ の一次元表現 $(\tau_{m,\nu}, \mathbb{C}_{m,\nu})$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\tau_{m,\nu} : L' = M' \times A &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (e^{is}, \exp(tH_0)) &\longmapsto e^{\nu t}e^{ims}.\end{aligned}$$

G の場合と同様に, N'_+ を自明に作用させることによって $\tau_{m,\nu}$ を P' の表現として考え $G'/P' \simeq S^2$ 上のベクトル束 $\mathcal{L}_{m,\nu}$ を $\tau_{m,\nu}$ に同伴するベクトル束として定義する:

$$\mathcal{L}_{m,\nu} := G' \times_{P'} \mathbb{C}_{m,\nu}. \tag{2.7}$$

3　F-method の適用

この章では，主結果を証明するための手法 *F-method* を適用する．この手法は，ある程度一般的な幾何設定で適用できるが，本稿では $(G, G') = (SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ およびベクトル束 (2.6), (2.7) の場合に集中する (F-method の詳しい説明は [3, 4, 7, 9, 11, 12, 14] などを参照されたい).

まず, symbol map を定義しよう．

定義 3.1. E を n 次元複素ベクトル空間とし，その双対空間を $E^\vee$ と表記する．$\mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}(E)$ を E 上の定数係数線型微分作用素のなす環とする．このとき，次の自然な代数の同型写像は **symbol map** という (cf. [9]):

$$\mathrm{Symb} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(E^\vee), \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \zeta^\alpha.$$

F-method (定理 3.2) を述べるために，いくつかの記号を定義しよう．まず,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{L'}\left(V_\lambda^{2N+1}, \mathbb{C}_{m,\nu} \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) := \\ &\qquad\qquad \left\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(V_\lambda^{2N+1}, \mathbb{C}_{m,\nu} \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) : (3.8) \text{ が成立}\right\}, \end{aligned}$$

$$\psi \circ \sigma_\lambda^{2N+1}(\ell) = \tau_{m,\nu}(\ell) \circ \mathrm{Ad}_\#(\ell)\psi \quad \forall\ \ell \in L', \tag{3.8}$$

とする．ただし, $\mathrm{Ad}_\#$ は次のように定まる L の $\mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)$ への作用である．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_\#(\ell) : \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) &\longrightarrow \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \\ p(\cdot) &\longmapsto p\left(\mathrm{Ad}(\ell^{-1})\cdot\right). \end{aligned}$$

さらに，

$$\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu}) := \left\{\psi \in \mathrm{Hom}_{L'}\left(V_\lambda^{2N+1}, \mathbb{C}_{m,\nu} \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) : (3.9) \text{ が成立}\right\},$$

$$\left(\widehat{d\pi_\mu}(C) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}_{m,\nu}}\right)\psi = 0 \quad \forall C \in \mathfrak{n}'_+, \tag{3.9}$$

とする．上記の $\widehat{d\pi_\mu}$ について詳しくは説明しないが, これは $\mathfrak{g}$ から $D(\mathfrak{n}_+) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left((V_\lambda^{2N+1})^\vee\right)$ への Lie 環の準同型である (ここで $D(\mathfrak{n}_+)$ は $\mathfrak{n}_+$ の Weyl 代数を意味している)：

$$\widehat{d\pi_\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow D(\mathfrak{n}_+) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left((V_\lambda^{2N+1})^\vee\right).$$

従って, 任意の $C \in \mathfrak{n}'_+$ に対して $\widehat{d\pi_\mu}(C)$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left((V_\lambda^{2N+1})^\vee\right)$-値の $\mathfrak{n}_+$ 上の微分作用素を定める (厳密な定義は [9] を参照されたい).

定理 3.2 ([9, I-Thm. 4.1])**.** 次の写像は *well-defined* な同型写像である.

$$\mathrm{Diff}_{G'}\left(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})\right) \xrightarrow{\mathrm{Symb}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu}).$$

F-method (定理 3.2) より，微分対称性破れ作用素のなす空間 (1.2) を決定するには, *F-system* $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu})$ を解決すれば良い.

4 主結果の帰着

前章で説明したとおり, F-method を適用することによって, (1.2) の決定問題は $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu})$ の解決問題に帰着できることがわかる. さらに, $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu})$ と $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{-m,\nu})$ との間に同型写像が存在することが証明できるため ([15, Prop. 8.2]), $m \geq 0$ の場合に $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{m,\nu})$ を解決すればよい. この章では $m = N$ の場合に集中する. すなわち, $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{N,\nu})$ を完全に解決する (定理 4.1).

$(\sigma^{2N+1}, V^{2N+1})$ を $SO(3)$ の $(2N+1)$ 次元既約表現として定義したが，普遍被覆 $\varpi : SU(2) \to SO(3)$ を用いて次のように実現する：

$$\begin{aligned} \sigma^{2N+1} : SO(3) &\longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V^{2N+1}) \\ g &\longmapsto \left(p(\cdot) \mapsto p((\varpi^{-1}(g)^{-1}\cdot)\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

ただし, $V^{2N+1} = \mathrm{Pol}^{2N}(\mathbb{C}^2) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{u_k := \xi_1^{2N-k}\xi_2^k : k = 0, 1, \ldots, 2N\}$.

任意の $k = 0, \ldots, 2N$ に対し, $h_k \in \mathrm{Hom}_{SO(2)}(V^{2N+1}, \mathbb{C}_N \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{C}^2))$ を次のよう定義する：

$$h_k : V^{2N+1} \longrightarrow \mathbb{C}_N \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{C}^2), \qquad u_k = \xi_1^{2N-k}\xi_2^k \longmapsto 1 \otimes (\zeta_1 + i\zeta_2)^k.$$

定理 4.1 ([15, Thm. 5.1])**.** 対 $(\lambda, \nu, N) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$ に対し，次の条件が同値である.

(i) $\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{N,\nu}) \neq \{0\}$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{N,\nu}) = 1$.

(iii) $\nu - \lambda \in \mathbb{N}$.

さらに，上記の条件のいずれか（従って，すべて）が成り立つならば

$$\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+;\sigma_\lambda^{2N+1},\tau_{N,\nu})=\mathbb{C}\sum_{k=0}^{2N}(I_{a-k}g_k)(\zeta_1^2+\zeta_2^2,\zeta_3)h_k,$$

が成立する．ただし, $a:=\nu-\lambda$ で, $g_k(t)$ $(k=0,\ldots,2N)$ は次の式で与えられる多項式である：

$$g_k(t)=i^{N+k}A_k\widetilde{C}_{a-k}^{\lambda+N-1}(it). \tag{4.11}$$

$\widetilde{C}_\ell^\mu(z)$ は再正規化された *Gegenbauer* 多項式であって *(cf.* [9, 7, 14, 15]*)*, $d<0$ の場合に $\widetilde{C}_d^\mu\equiv 0$ とみなす．係数 A_k は (1.3) で定義されたものである．

上記の定理と F-method (定理 3.2) を用いると, 主結果（定理 1.1 および定理 1.2）を容易に証明することができる．従って, $|m|=N$ の場合に問題 A と B を解決することができる．

定理 4.1 を証明しないが，この定理を証明するための鍵（定理 4.2 および定理 4.3）を下記に紹介する．以降 $a=\nu-\lambda$ とする．

任意の $\mu\in\mathbb{C},\ell\in\mathbb{N}$ に対し, 虚 Gegenbauer 微分作用素 S_ℓ^μ を次のように定義する:

$$S_\ell^\mu=-\left((1+t^2)\frac{d^2}{dt^2}+(1+2\mu)t\frac{d}{dt}-\ell(\ell+2\mu)\right).$$

多項式 $f_0,f_{\pm1},f_{\pm2}\ldots,f_{\pm N}\in\mathbb{C}[t]$ に対し, $\mathbf{f}:={}^t(f_{-N},\ldots,f_0,\ldots,f_N)$ とおき, $L_j^{A,\pm}(\mathbf{f})(t)$, $L_j^{B,\pm}(\mathbf{f})(t)$ $(j=0,\ldots,N)$ を次のように定義する：

$$\left.\begin{aligned}L_j^{A,+}(\mathbf{f})(t)&:=S_{a+N-j}^{\lambda+j-1}f_j-2(N-j)\tfrac{d}{dt}f_{j+1}.\\ L_j^{A,-}(\mathbf{f})(t)&:=S_{a-N-j}^{\lambda+j-1}f_{-j}+2(N-j)\tfrac{d}{dt}f_{-j-1}.\end{aligned}\right\}(j=0,1,\ldots,N)$$

$$\left.\begin{aligned}L_j^{B,+}(\mathbf{f})(t)&:=2(-N(\lambda+a-1)+j(\lambda-1+\vartheta_t))f_j\\ &\qquad+(N-j)\tfrac{d}{dt}f_{j+1}+(N+j)\tfrac{d}{dt}f_{j-1}.\\ L_j^{B,-}(\mathbf{f})(t)&:=2(N(\lambda+a-1)+j(\lambda-1+\vartheta_t))f_{-j}\\ &\qquad-(N+j)\tfrac{d}{dt}f_{-j+1}-(N-j)\tfrac{d}{dt}f_{-j-1}.\end{aligned}\right\}(j=1,\ldots,N)$$

ただし, $\vartheta_t:=t\frac{d}{dt}$ (Euler 微分作用素)である. $j=0$ のとき $L_0^{B,\pm}\equiv 0$ とおく.

$\mathbf{g} = (g_{k_d})_{d=0}^{2N} = {}^t(g_{k_0}, \ldots, g_{k_{2N}})$ が与えられたとき ($g_{k_d} \in \mathbb{C}[t]$), $\widetilde{\mathbf{g}}$ を次のように定義する：

$$\widetilde{\mathbf{g}} = {}^t(\widetilde{g}_{-N}, \ldots, \widetilde{g}_N) := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \mathbf{g} = {}^t(g_{k_{2N}}, \ldots, g_{k_0}).$$

定理 4.2 ([15, Thm. 5.2])**.** $N \in \mathbb{N}$ とし, ψ を

$$\psi = \sum_{k=0}^{2N} (I_{a-k} g_k)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2, \zeta_3) h_k \in \mathrm{Hom}_{L'}\left(V_\lambda^{2N+1}, \mathbb{C}_{N,\nu} \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) \tag{4.12}$$

とおく．このとき, $\mathbf{g} := (g_k)_{k=0}^{2N}$ に対して，次の条件が同値である.

(i) $\left(\widehat{d\pi_\mu}(C) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}_{N,\nu}}\right)\psi = 0$, $\forall C \in \mathfrak{n}'_+$.

(ii) $L_j^{A,\pm}(\widetilde{\mathbf{g}}) = L_j^{B,\pm}(\widetilde{\mathbf{g}}) = 0$, $\forall j = 0, \ldots, N$.

次の定理を述べるために，空間 $\Xi(\lambda, a, N)$ を

$$\Xi(\lambda, a, N) := \left\{ (g_k)_{k=0}^{2N} \in \bigoplus_{k=0}^{2N} \mathrm{Pol}_{a-k}[t]_{\mathrm{even}} : \begin{array}{l} L_j^{A,\pm}(\widetilde{\mathbf{g}}) = 0 \\ L_j^{B,\pm}(\widetilde{\mathbf{g}}) = 0 \\ \forall j = 0, \ldots, N \end{array} \right\}$$

と定義する.

定理 4.3 ([15, Thm. 5.3])**.** $g_k \in \mathrm{Pol}_{a-k}[t]_{\mathrm{even}}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2N$) としたときに, 常微分方程式系 $\Xi(\lambda, a, N)$ が，スカラー倍を除いて，零でない一意の解 $(g_k)_{k=0}^{2N}$ を持ち，それが (4.11) で与えられる.

$\mathrm{Sol}(\mathfrak{n}_+; \sigma_\lambda^{2N+1}, \tau_{N,\nu})$ を決定するには，空間 (3.8) の決定と, 微分方程式 (3.9) の解決が必要である. Lie 代数 $\mathfrak{n}_+ \simeq \mathbb{C}^3$ は三次元ベクトル空間なので, (3.9) は三変数 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ の偏微分方程式になるが, (3.8) の任意の元は (4.12) と表せることを用いると, (3.9) は常微分方程式 $\Xi(\lambda, a, N)$ と同値であることが証明される．偏微分方程式 (3.9) と常微分方程式 Ξ の同値関係が定理 4.2 の主張であり，後者の解を与えるのが定理 4.3 の主張である.

注意 4.4. $|m| > N$ の場合はこの章で説明した証明方法で解決することができる．特に，微分作用素 $L_j^{A,\pm}$, $L_j^{B,\pm}$ の定義を適切に修正すれば，定理 4.2 が $m > N$ 場合に

も成り立つ（この章の序文で説明したとおり, $m<-N$ の場合は $m>N$ の場合に帰着できるため m が正であると仮定して良い)．ただし，この $L_j^{A,\pm}$, $L_j^{B,\pm}$ が定める微分方程式系 Ξ は $m=N$ の場合と $m>N$ の場合とで解決方法が異なり，その解も異なる．例えば，定理 4.3 より, Ξ の零でない解が存在するためのパラメーターに対する必要十分条件は $\nu-\lambda\in\mathbb{N}$ だが, $m>N$ の場合にはこの条件が次のようになることが証明できる：

$$\lambda\in\mathbb{Z}_{\leq 1-m} \text{ かつ } \nu\in[1-N,N+1]\cap\mathbb{Z}.$$

すなわち, $m>N$ の場合には $\lambda,\nu\in\mathbb{C}$ が整数でなければ，微分対称性破れ作用素の成す空間 (1.2) は零になる．

参考文献

[1] A. Juhl. *Families of Conformally Covariant Differential Operators, Q-Curvature and Holography.* Progress in Mathematics, vol. 275 (Birkhäuser, Basel, 2009).

[2] T. Kobayashi. *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups I.* Invent. Math., **117**: 181-205, 1994; *II.* Annals of Math., **147**(3): 709-729, 1998; *III.* Invent. Math., **131**: 229-256, 1998.

[3] T. Kobayashi. *F-method for constructing equivariant differential operators.* Geometric analysis and integral geometry, 139–146, Contemp. Math., **598**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[4] T. Kobayashi. *F-method for symmetry breaking operators.* Differential Geom. Appl. **33** (2014), suppl., 272–289.

[5] T. Kobayashi. *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups.* Representations of reductive groups, 277-322, Prog. Math., **312**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[6] T. Kobayashi. 表現の分岐則の理論における最近の進展. 日本数学会「数学」，論説，71巻4号，pp. 388–416, 2019.

[7] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner. *Conformal symmetry breaking operators for differential forms on spheres.* Lecture Notes in Mathematics, **2170**. Springer

Singapore, 2016. ix+192 pp.

[8] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček. *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I.* Adv. Math. **285** (2015), 1796–1852.

[9] T. Kobayashi, M. Pevzner. *Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method; II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs.* Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801-845 and 847-911.

[10] T. Kobayashi, B. Speh. *Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups I.* Mem. Amer. Math. Soc. **238**(2015), no. 1126, v+110 pp.; *II.* Lecture Notes in Mathematics, **2234**. Springer, Singapore, 2018, xv+342 pp.

[11] T. Kubo. *F-method* による絡微分作用素の分類および構成について. 2022年度表現論シンポジウムの講演集（世話人：中島秀斗，和地輝仁）, pp. 41–66.

[12] T. Kubo. B. Ørsted. *On the intertwining differential operators from a line bundle to a vector bundle over the real projective space.* To appear in the special volume of Indag. Math. in memory of Gerrit van Dijk.

[13] J. Peetre. *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels.* (French) Math. Scand. **7** (1959), 211–218.

[14] V. Pérez-Valdés. *Conformally covariant symmetry breaking operators for a vector bundle of rank 3 on* S^3. Internat. J. Math. **34** (2023) no. 12, Paper No. 2350072.

[15] V. Pérez-Valdés. *Construction and classification of differential symmetry breaking operators for principal series representations of the pair* $(SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ *for special parameters.* To appear in the Proceedings of the 7th Tunisian-Japanese Conference, 53 pages.