左不変統計構造のモジュライ空間と
双対平坦性および共役対称性

広島大学大学院 先進理工系科学研究科 数学プログラム　小林彦蔵 *

Hikozo Kobayashi

Mathematics Program, Graduate School of Advanced Science and Engineering,

Hiroshima University

概要

情報幾何学の文脈において，リー群上の左不変統計構造と呼ばれる概念が古畑–井ノ口–小林 [Inf. Geom. (2021)] によって定義されている．本稿では可換リー群 $\mathbb{R}^n$ および非可換な二系列のリー群上の左不変統計構造の中で，“双対平坦” および “共役対称” と呼ばれる重要なクラスの分類について紹介する．本稿は, 2024 年度 RIMS 共同研究「表現論と調和解析のひろがり」における発表に基づくものであり, その内容は, 大野優氏（北海道大学），奥田隆幸氏（広島大学），田丸博士氏（大阪公立大学）との共同研究に基づく．

1　導入

微分幾何において, 群が作用する多様体上の不変幾何構造 (リーマン計量, 擬リーマン計量, 複素構造, シンプレクティック構造など) の分類や構成は主な研究テーマの 1 つである．特に, リー群上の左不変幾何構造の研究は活発に行われており, 近年, そのモジュライに着目した研究がいくつかなされている ([2, 3, 7, 10, 11, 12, 14])．

多様体上の幾何構造の 1 つに, 統計構造（定義 2.1.1）と呼ばれる概念がある．これは情報幾何学に由来する幾何構造であり, リーマン計量とアファイン接続の組であって, いくつかの条件を満たすものとして定義される．特に, リー群上の左不変統計構造 (定義 3.2.1) の概念が [5] の中で導入され, 実際に情報幾何学において重要な例 (1 次元正規分布族および多次元正規分布族など) を持つことも知られている ([5, 8, 9])．我々は, この左不変統計構造の中で, ある二種類の特別なクラスに注目し, 次のような問題を考える．

問題 A. 特定のリー群 G に対し, G 上の双対平坦 (dually flat) および共役対称 (conjugate symmetric) な左不変統計構造を分類せよ．

双対平坦構造は, アファイン接続が flat な統計構造であり, 情報幾何学において主な舞台となる ([1])．また, 双対平坦構造はヘッセ構造と同値な概念である．志摩は [16] の中で「左不変ヘッセ構造は可解

* E-mail : hikozo-kobayashi@hiroshima-u.ac.jp

リー群上にのみ許容される」ことを示している. 共役対称統計構造 (定義 2.1.2) は双対平坦構造を含むより広いクラスである. この統計構造は, アファイン接続に関する断面曲率が well-defined に定義できるといった特徴を持ち, 特に統計多様体の幾何の中で重要なクラスと言える. 他にも, 情報幾何学において重要な接続が, この共役対称性と左不変性によって特徴付けられることも知られている (詳細は命題 3.2.2 を参照). 特に, リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組が共役対称であることから, 任意のリー群は共役対称な左不変統計構造を許容することに注意する.

我々はまず, **問題 A.** の G として左不変リーマン計量のモジュライが 1 点 (cf. Lauret [14]) となる次の 3 系列 (すべて可解) に取り組んだ.

$$G = \mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3).$$

ただし, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ は $SO(n,1)$ の単位連結成分 $SO^0(n,1)$ の岩澤分解における可解部分であり, H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である. また我々は, リー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ (定義 4.2.2) を定式化し, その中の共役対称な部分集合 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ および双対平坦な部分集合 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ を調べ, 次の表 1 を得た.

表 1　**主結果**

G	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n)$	$V/\sim$
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	1 パラメータ	2 点
H^3	1 点	$\emptyset$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^{n-3}} \oplus S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^{n-3}}))/\sim$	$\emptyset$

ここで, $S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ は可換リー群 $\mathbb{R}^n$ のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ の双対空間の 3 次対称テンソル空間を表す. また, V は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$ の標準基底に対する双対基底 $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ を用いて,

$$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{e}^i \odot \mathbf{e}^i \odot \mathbf{e}^i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

と表される $S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ の n 次元部分空間である. 系として, V から $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ に全射写像が得られる (定理 5.2.2).

本稿の大まかな構成は次である. 第 2 章では, 統計多様体の基礎概念を簡単に紹介する. 第 3 章では, リー群上の左不変幾何構造, 特に左不変統計構造について紹介する. 第 4 章では, リー群上の左不変リーマン計量のモジュライ空間 (cf. [7, 10]) および, 我々が導入したリー群上の左不変統計構造のモジュライ空間の概念を紹介する. 第 5 章および第 6 章では, 分類結果の一部とそこから得られた系を紹介する.

2 準備：統計多様体

本章を通して, (M,g) をリーマン多様体とし, $\widehat{\nabla}$ を g に関する Levi-Civita 接続とする．また M 上のアファイン接続 ∇ に対し, R^{∇} によって ∇ の定める M 上の曲率テンソル場を表す.

2.1 定義と例

本節では統計多様体の定義と例, および双対平坦や共役対称といった統計構造のクラスを紹介する．また本節の最後に,「スケーリングを除いて統計同型」という統計多様体間に定まる同値関係を定義する．まず初めに, 統計多様体は以下のように定義される.

定義 2.1.1. ∇ を M 上のねじれのないアファイン接続とする．$(0,3)$-テンソル場 ∇g が対称となるとき, 組 (M,g,∇) を統計多様体という．このとき組 (g,∇) を M 上の統計構造, ∇ をリーマン多様体 (M,g) 上の統計接続と呼ぶ.

組 $(g,\widehat{\nabla})$ は Levi-Civita 接続の定義から M 上の自明な統計構造となる．従って, 統計多様体はリーマン多様体のある種の一般化と見なせる.

統計多様体 (M,g,∇) に対し, $R^{\nabla}\equiv 0$ が成り立つとき, 統計多様体 (M,g,∇) は特に双対平坦多様体 (*dually flat manifold*) と呼ばれ, このとき組 (g,∇) は双対平坦構造 (*dually flat structure*) と呼ばれる．特に, 双対平坦多様体はヘッセ多様体と同値な概念である ([17])．一般に, リーマン多様体 (M,g) 上にアファイン接続 ∇ が与えられると, ∇ との組でリーマン計量 g を保つような M 上のもう一つのアファイン接続 $\overline{\nabla}$ が次式によって定まる.

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\overline{\nabla}_X Z).$$

ここで X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である．$\overline{\nabla}$ は ∇ の g に関する双対アファイン接続と呼ばれる．Lauritzen は [15] の中で, 共役対称を以下のように定義した.

定義 2.1.2 ([15])**.** (M,g,∇) を統計多様体とする．$R^{\nabla}=R^{\overline{\nabla}}$ が成り立つとき, 統計多様体 (M,g,∇) は共役対称 (*conjugate symmetric*) であるという.

本稿では, 統計多様体 (M,g,∇) が共役対称であるとき, 統計構造 (g,∇) も共役対称と呼ぶ．特に双対平坦構造は共役対称である.

ここで, 情報幾何学において重要な多次元正規分布族上の統計構造の例をみる.

例 2.1.3. 平均ベクトル $\mu\in\mathbb{R}^n$ と分散共分散行列 $\Sigma\in\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ でパラメータ付けられた n 次元正規分布全体の集合,

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}^n:=\left\{p(x;\mu,\Sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)\right\},$$

は自然に直積多様体 $\mathbb{R}^n\times\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ と同一視でき, 特に多様体構造が入る．ただし, $\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ は n 次正定値実対称行列のなす開凸錐である．g^F, C^A を $\mathcal{N}$ 上の任意の点 $\theta=(\mu,\Sigma)$ および θ にお

ける接ベクトル X, Y, Z に対して,

$$g^F(X,Y) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x;\theta)(X \log p(x;\theta))(Y \log p(x;\theta))dx,$$
$$C^A(X,Y,Z) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x;\theta)(X \log p(x;\theta))(Y \log p(x;\theta))(Z \log p(x;\theta))dx,$$

と定めると g^F, C^A はそれぞれ $\mathcal{N}$ 上のリーマン計量および 3 次対称テンソル場となる．また C^A と実数 α に対して, 次式によって $\mathcal{N}$ 上のアファイン接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ が定義できる．

$$g^F(\nabla^{A(\alpha)}_X Y, Z) = g^F(\widehat{\nabla}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} C^A(X,Y,Z).$$

ここで, $\widehat{\nabla}$ は g^F に関する Levi-Civita 接続である． このとき, 任意の実数 α に対して組 $(\mathcal{N}, g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ は統計多様体となる．情報幾何学において, g^F と $\nabla^{A(\alpha)}$ はそれぞれ n 次元正規分布の空間に対する Fisher 計量および甘利-Chentsov の α-接続としてよく知られており, 特に重要な統計構造である ([1])．また次のことが知られている．

(1) 任意の実数 α に対して $\mathcal{N}$ 上の統計構造 $(g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ は共役対称である．
(2) 統計構造 $(g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ が双対平坦であることと $\alpha = \pm 1$ であることは同値である．

確率密度関数 p を他の密度関数に置き換えると, g^F および $\nabla^{A(\alpha)}$ によって, 別の分布に基づく統計多様体が得られる場合もある．詳細は [1] を参照されたい．

本節の最後に,「スケーリングを除いて統計同型」という統計多様体間に定まる同値関係を紹介する．

定義 2.1.4. (M, g, ∇) および (M', g', ∇') をそれぞれ統計多様体とする．ある微分同相写像 $f : M \to M'$ と正の実数 $r > 0$ が存在して次の二条件を満たすとき, 統計多様体 (M, g, ∇) と (M', g', ∇') は, (f, r) によってスケーリングを除いて統計同型と呼ぶ.

(1) $f^*\nabla' = \nabla$,
(2) $f^*g' = r \cdot g$.

この同値関係について, 次が成り立つ．

定理 2.1.5. 共役対称性および双対平坦性は, スケーリングを除いて統計同型で保たれる．

注意 2.1.6. 一般に, 任意の統計多様体 (M, g, ∇) に対して, ∇ に関する M 上の断面曲率は well-defined に定義できない．一方, (g, ∇) が共役対称である場合, それが可能となることが簡単な議論によってわかる．共役対称統計多様体 (M, g, ∇) は, ∇ に関する断面曲率が一定となるとき定曲率と呼ばれる ([13])．この統計多様体に関する定曲率性も, スケーリングを除いて統計同型で保たれる性質である．

2.2 差テンソルおよび 3 次形式

本節では, リーマン計量との組で統計構造と等価となる差テンソルおよび 3 次形式を紹介する．それぞれの定義は以下で与えられる．

定義 2.2.1. (M, g, ∇) を統計多様体とする．次で定義される M 上の $(1,2)$-テンソル場 K, および $(0,3)$-テンソル場 C をそれぞれ統計構造 (g, ∇) に対する差テンソルおよび 3 次形式と呼ぶ.

$$K(X,Y) := \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y, \quad C(X,Y,Z) := (\nabla_X g)(Y,Z).$$

ここで, X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である.

差テンソルおよび 3 次形式は, ∇ および $\widehat{\nabla}$ の捩率テンソル場が 0 であることより, 特に対称テンソル場となる．$\mathcal{A}(M)$ を M 上のアファイン接続全体の集合とし, 以下を定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) &:= \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid (M,g,\nabla) : \text{統計多様体}\}, \\ \mathcal{K}(M,g) &:= \{K \in \Gamma(T^{(1,2)}M) \mid K : \text{対称かつ } g \text{ に関して自己共役}\}, \\ S^3(M) &:= \{C \in \Gamma(T^{(0,3)}M) \mid C : \text{対称}\}. \end{aligned}$$

簡単な議論によって, 以下の写像はそれぞれ全単射となることが分かる.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) \ni \nabla \longmapsto K^{\nabla} \in \mathcal{K}(M,g), \quad \mathcal{K}(M,g) \ni K \longmapsto C^K \in S^3(M). \tag{2.1}$$

ただし $K^{\nabla}(X,Y) := \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y$, $C^K(X,Y,Z) := -2g(K(X,Y),Z)$ である．従って, 一対一対応,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{K}(M,g) \xleftrightarrow{1:1} S^3(M) \tag{2.2}$$

が得られる．特に, g の Levi-Civita 接続は, 上記の対応で $\mathcal{K}(M,g)$ および $S^3(M)$ の原点 0 に対応する.

3 準備：リー群上の左不変幾何構造

本章では G を有限次元実リー群とし, $\mathfrak{g}$ によって G のリー代数を表す.

3.1 左不変リーマン計量と左不変アファイン接続

リー群 G 上のリーマン計量であって, G 上の任意の左移動が等長となるものを G 上の左不変リーマン計量という．$\mathfrak{g}$ を G の単位元の接空間と同一視することで, 各左不変リーマン計量 g は, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle,\rangle$ を誘導する．よく知られているように, この対応は G 上の左不変リーマン計量全体の集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ と $\mathfrak{g}$ 上の内積全体の集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ の間の全単射写像を誘導する．$\mathfrak{g}$ 上の内積全体の集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle,\rangle_0$ を一つ固定することによって, リーマン対称空間 $GL(\mathfrak{g})/O(\mathfrak{g}, \langle,\rangle_0)$ と見なすことができる．本稿では以降, 常にこの同一視 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \simeq \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}) \simeq GL(\mathfrak{g})/O(\mathfrak{g}, \langle,\rangle_0)$ を行う.

リー群 G 上のアファイン接続 ∇ であって, G 上の任意の左移動がアファインとなるもの, すなわち任意の $g \in G$ に対して,

$$L_g^* \nabla = \nabla,$$

が成り立つものを G 上の左不変アファイン接続という．ただし, L_g は $g \in G$ による G 上の左移動を表す．以下, $\mathcal{LA}(G)$ によって G 上の左不変アファイン接続全体の集合を表す.

3.2　左不変統計構造

本節では, リー群 G 上の左不変統計構造の定義および例を紹介し, 式 (2.2) と同様の一対一対応がリー代数の言葉で記述できることをみる.

統計リー群およびリー群上の左不変統計構造の定義は以下である.

定義 3.2.1 ([5])**.** $\langle , \rangle$ を G 上の左不変リーマン計量, ∇ を G 上のねじれのない左不変アファイン接続とする. $(G, \langle , \rangle, \nabla)$ が統計リー群とは, $(G, \langle , \rangle, \nabla)$ が統計多様体となることをいう. またこのとき, $(\langle , \rangle, \nabla)$ を G 上の左不変統計構造と呼ぶ.

次に統計リー群の例を紹介する. R を, 対角成分がすべて正となる n 次上三角行列のなす $GL(n, \mathbb{R})$ 内の閉部分群とする. 例 2.1.3 で紹介した n 次元正規分布族 $\mathcal{N}^n$ は, 半直積群 $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R}) := R \ltimes \mathbb{R}^n$ による次のなめらかな作用によって, $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$-主等質空間となる ([6]).

$$(A, b).(\Sigma, \mu) := (A \Sigma A^{\mathsf{T}}, A\mu + b) \quad ((A, b) \in \mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R}),\ (\Sigma, \mu) \in \mathcal{N}). \tag{3.1}$$

さらに, $\mathcal{N}^n$ 上の Fisher 計量 g^F および甘利-Chentsov の α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ は $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$-不変となることが知られている ([9]). 従って特に, 組 $(\mathcal{N}, g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ は統計リー群と見なせる. また, $\mathcal{N}^n$ 上の α-接続は, 左不変性と g^F との共役対称性によって以下のように特徴付けられることが知られている：

命題 3.2.2 (Theorem 3.4. in [9])**.** (g^F, ∇) を多次元正規分布族のリー群 $\mathcal{N}$ 上の左不変統計構造とする. このとき, 以下の二条件は同値である.

(1) (g^F, ∇) は共役対称である.
(2) アファイン接続 ∇ は甘利-Chentsov の α-接続である.

他の統計リー群の例としては, 例えば [8] を参照されたい.

本節の最後に, 式 (2.1) と同様の一対一対応が得られることをみる. $\langle , \rangle$ を $\mathfrak{g}$ 上の内積とし, 以下の三つの集合をそれぞれ定める.

$$\begin{aligned}
\mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G, \langle , \rangle) &:= \{ \nabla \in \mathcal{LA}(G) \mid (G, \langle , \rangle, \nabla) : \text{統計リー群} \}, \\
\mathcal{K}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) &:= \{ K \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \mid K : \text{対称かつ} \langle , \rangle \text{に関して自己共役} \}, \\
S^3(\mathfrak{g}^*) &:= \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* = \{ C \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{R}) \mid C : \text{対称} \}.
\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{g}^*$ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の双対空間を表す. G の次元が n のとき, 実線型空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の次元は $\binom{n+2}{3}$ となり, 特にこの空間は $\mathfrak{g}$ 上の 3 次斉次多項式関数全体の空間と見なせる. 簡単な議論によって, G 上の左不変統計構造 $(\langle , \rangle, \nabla)$ に対する差テンソルおよび 3 次形式もまた, G 上で左不変となる. よって, 式 (2.1) と同様な写像を考えることで, 次の一対一対応が得られる.

$$\mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G, \langle , \rangle) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{K}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) \xleftrightarrow{1:1} S^3(\mathfrak{g}^*). \tag{3.2}$$

従って本稿では, リー群 G 上の左不変リーマン計量 $\langle , \rangle$ と $\mathcal{K}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ の元の組や, $\langle , \rangle$ と $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の元の組もまた, G 上の左不変統計構造と呼ぶことにする.

定義 3.2.3. $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) := \{(\langle,\rangle,\nabla) \mid (G,\langle,\rangle,\nabla)$: 統計リー群 $\}$. また, G 上の共役対称な左不変統計構造全体の集合を $\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) \subset \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$, 双対平坦な左不変統計構造全体の集合を $\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) \subset \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ と表す.

式 (3.2) より, $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ は底空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \simeq \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$, ファイバー空間を $S^3(\mathfrak{g}^*)$ とする自明ベクトル束 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ と見なすことができる. すなわち,

$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) \simeq \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$$

が成り立つ. 本稿では以降, $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ をこの同一視によって多様体と見なす.

4 モジュライ空間

本章を通して, G を連結成分有限個の n 次元実リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする. この状況において, G および $\mathfrak{g}$ それぞれにおける自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ および $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ はそれぞれリー群となることに注意する. また, $\mathbb{R}_{>0}$ によって正の実数の成す乗法群を表す.

4.1 左不変リーマン計量のモジュライ空間

本節では, G 上の左不変リーマン計量のモジュライ空間の概念を紹介する.

G 上の左不変リーマン計量の空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ には, 直積リー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G)$ による, 次に示すなめらかな作用が存在する.

$$(r,\varphi).\langle,\rangle := r \cdot (\varphi^{-1})^*\langle,\rangle = r \cdot \langle \varphi_*^{-1}\ \cdot\ , \varphi_*^{-1}\ \cdot\ \rangle \qquad ((r,\varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G),\ \langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}(G)). \quad (4.1)$$

この群作用から定まる $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \simeq \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ 上の同値関係を $\approx$ で表すと, $\langle,\rangle_1 \approx \langle,\rangle_2$ であるとき, リーマン多様体 $(G,\langle,\rangle_1)$ と $(G,\langle,\rangle_2)$ はスケーリングを除いて等長同型となる. ただし, 二つのリーマン多様体 (M,g) および (M',g') が, スケーリングを除いて等長同型であるとは, ある正の実数 $r > 0$ と微分同相写像 $f : M \to M'$ が存在して, $r \cdot f^*g' = g$ が成り立つときをいう. 本稿では, 軌道空間 $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G))\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ を $\mathfrak{PM}(G)$ と表し, これを左不変リーマン計量のモジュライ空間と呼ぶ. 特に G が単連結のとき, 次の位相空間としての同型が成り立つ.

$$\mathfrak{PM}(G) \simeq (\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}).$$

注意 4.1.1. [7] の中では, 一般のリー群 G に対して, $GL(\mathfrak{g})$ の閉部分群 $\mathbb{R}^\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ への自然な作用による軌道空間を, G 上の左不変リーマン計量のモジュライ空間と呼んでいる.

$\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となる単連結リー群は, 次の 3 系列のいずれかと同型となることが知られている ([14, 10]).

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{RH}^n}\ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3). \quad (4.2)$$

ただし, $G_{\mathbb{RH}^n}$ は $SO(n,1)$ の単位連結成分 $SO^0(n,1)$ の岩澤分解における可解部分であり, H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である.

4.2 左不変統計構造のモジュライ空間

本節では, 我々が導入したリー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間を紹介する.

直積リー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G)$ の G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ へのなめらかな作用を次で定義する.

$$(r,\varphi).(\langle,\rangle,\nabla) := (r\cdot(\varphi^{-1})^*\langle,\rangle,(\varphi^{-1})^*\nabla) \quad ((r,\varphi)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G),\ (\langle,\rangle,\nabla)\in\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)). \tag{4.3}$$

この群作用から定まる $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ 上の同値関係もまた, $\approx$ によって表すと, G 上の二つの左不変統計構造 $(\langle,\rangle,\nabla)$, $(\langle,\rangle',\nabla')$ に対し, $(\langle,\rangle,\nabla)\approx(\langle,\rangle',\nabla')$ となるとき, 二つの統計リー群 $(G,\langle,\rangle,\nabla)$ と $(G,\langle,\rangle',\nabla')$ はスケーリングを除いて統計同型となる. 従って, 次が成り立つ.

定理 4.2.1. 式 (4.3) の群作用は, G 上の左不変統計構造が持つ共役対称性や双対平坦性を保つ.

リー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間を以下で定める.

定義 4.2.2. 式 (4.3) の群作用による軌道空間,

$$(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))\backslash\,\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) = \{(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G)).(\langle,\rangle,\nabla) \mid (\langle,\rangle,\nabla)\in\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)\},$$

を $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ と表し, これをリー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間と呼ぶ. また,

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) := (\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))\backslash\,\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G),$$
$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) := (\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))\backslash\,\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$$

とする ($\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ および $\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ の定義は定義 3.2.3 を参照).

特に, 二つのリー群 G, G' が同型ならば, $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ と $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G')$ は同相となる. 同様に $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ と $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G')$ および $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ と $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G')$ もそれぞれ同相となる.

$\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となるとき, 次の位相空間としての同型が成り立つ.

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)\cong(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))^{\langle,\rangle}\backslash S^3(\mathfrak{g}^*).$$

ここで, $(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))^{\langle,\rangle}$ は式 (4.1) の群作用の $\langle,\rangle\in\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ における固定化部分群である. また, 右辺は $(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))^{\langle,\rangle}$ の $S^3(\mathfrak{g}^*)$ へのなめらかな作用,

$$(r,\varphi).C := r\cdot C(\varphi_*^{-1}\cdot\,,\varphi_*^{-1}\cdot\,,\varphi_*^{-1}\cdot\,).$$

による軌道空間である. さらに, 次も成り立つ.

命題 4.2.3. 以下が成り立つ.

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)\simeq(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))^{\langle,\rangle}\backslash\{C\in S^3(\mathfrak{g}^*) \mid (\langle,\rangle,C):\text{共役対称統計構造}\},$$
$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)\simeq(\mathbb{R}_{>0}\times\mathrm{Aut}(G))^{\langle,\rangle}\backslash\{C\in S^3(\mathfrak{g}^*) \mid (\langle,\rangle,C):\text{双対平坦構造}\}.$$

我々は式 (4.2) の 3 系列それぞれに対し, 双対平坦および共役対称となる左不変統計構造の分類を行った. そしてモジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ および $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ (定義 4.2.2) を決定した. 結果は表 1 を参照されたい. 次章からは, その中のいくつかを pick up して紹介する.

5　分類結果：$\mathbb{R}^n$ の場合

本章では, リー群 $\mathbb{R}^n$ の場合の分類結果およびモジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ を紹介する.

本章を通して, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ によって, $\mathbb{R}^n$ のリー代数を表す. また, $\mathbb{R}^n$ 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n)$ は直積空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}) \times S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ と同一視できることに注意する (3.2 章を参照). ここで, $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n})$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ 上の内積全体の空間, $S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ は $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n}$ の 3 次対称テンソルの空間を表す.

5.1　$\mathbb{R}^n$ 上の左不変共役対称統計構造

本節では, 可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対し, モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(\mathbb{R}^n)$ を調べる. 以下が成り立つ.

定理 5.1.1. $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(\mathbb{R}^n)$.

従って, $\mathbb{R}^n$ 上の任意の左不変統計構造は共役対称である. 特に, $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{ML}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

5.2　$\mathbb{R}^n$ 上の左不変双対平坦構造

本節では, 可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対し, モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ を調べる. 以下が成り立つ

定理 5.2.1. $(\langle,\rangle, C) \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}) \times S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ とする. $(\langle,\rangle, C)$ に関する以下の二条件は同値である.

(1) 左不変統計構造 $(\langle,\rangle, C)$ は双対平坦である.

(2) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ 上の $\langle,\rangle$ に関する正規直交基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ と n 個の実数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ が存在して,

$$C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e^i \odot e^i \odot e^i),$$

とかける. ただし $\{e^1,\dots,e^n\} \subset \mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n}$ は正規直交基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ に対する双対基底である.

$\langle,\rangle_0$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$ 上の標準内積とし, $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n\} \subset \mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ 上の標準基底に関する双対基底とする. また, $S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n})$ 内の n 次元線型部分空間 V を以下で定める.

$$V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{e}^i \odot \mathbf{e}^i \odot \mathbf{e}^i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n}).$$

定理 5.2.1 より,

$$\widetilde{V} := \{C \in S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}^n}) \mid (\langle,\rangle_0, C) : \text{双対平坦}\} = O(n).V$$

が成り立つ. また, $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n))^{\langle,\rangle_0} \simeq \mathbb{R}_{>0} \times O(n)$, および命題 4.2.3 より $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ に関して次が成り立つことがわかる.

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathbb{R}_{>0} \times O(n)) \backslash \widetilde{V}.$$

従って以下を得る.

定理 5.2.2. モジュライ空間 $\mathcal{M}\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ は商空間 $(\mathbb{R}_{>0} \times O(n))\backslash\widetilde{V}$ と見なすことができる．特に, V から $\mathcal{M}\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ に全射が存在する：

$$\begin{aligned} V \ni C \longmapsto (\mathbb{R}_{>0} \times O(n)).C \in (\mathbb{R}_{>0} \times O(n))\backslash\widetilde{V} \\ \simeq \mathcal{M}\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

定理 5.2.2 は, 「$\mathbb{R}^n$ 上の任意の左不変双対平坦構造は, up to $\mathbb{R}_{>0} \times GL(n,\mathbb{R})$ で, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ 上の標準内積 $\langle,\rangle$ と $C \in V$ から得られる」ということを意味している．

6 分類結果：$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ の場合

本章では, リー群 $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変共役対称統計構造の分類結果と, そこから得られた系 6.2.2 を紹介する．

本章を通して, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ によって, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ のリー代数を表す．また, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})$ は直積空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}) \times S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})$ と同一視できることに注意する (3.2 章を参照)．ここで, $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の内積全体の空間, $S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})$ は $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ の 3 次対称テンソルの空間を表す．

6.1 $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変共役対称統計構造

本節では, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変共役対称統計構造の分類に関する以下の定理を紹介する．

定理 6.1.1. $\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})$ とする．以下が成り立つ．

$$\{C \in S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}) \mid (\langle,\rangle, C) : \text{共役対称}\} \simeq \mathbb{R}.$$

定理 6.1.1 は, リー群 $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上のどのような左不変リーマン計量 g を選んでも, g との組で共役対称となる左不変アファイン接続は, 1 パラメータ分しか存在しないことを意味している．実はこの定理から, 「多次元正規分布族 $\mathcal{N}$ 内のある特別な部分族上の甘利-Chentsov の α-接続の特徴付け」が得られた．これを次節で解説する．

6.2 Takano Gaussian space 上の左不変統計接続

本節では, 定理 6.1.1 から得られた系 6.2.2 について紹介する．

多次元正規分布族 $\mathcal{N}^n$ 内の特別な分散共分散行列を持つ部分分布族として, 次を定める．

$$\mathcal{N}_T = \mathcal{N}_T^n := \left\{ p(x;\mu,\mathrm{diag}(\sigma^2,\ldots,\sigma^2)) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n -\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} \subset \mathcal{N}^n.$$

すなわち, 分散共分散行列が単位行列 I_n の正のスカラー倍となる $\mathcal{N}^n$ 内の部分分布族を $\mathcal{N}_T = \mathcal{N}_T^n$ とおく．この密度関数は, n 個の互いに独立な確率変数 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$ に対し, X_1 から X_n の同時確率密度関数を考えると得られるものになっている．

$\mathcal{N}_T$ 上においても, 例 2.1.3 と同様の式で $\mathcal{N}_T$ 上の Fisher 計量 g^F, および甘利-Chentsov の α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ が得られる．特に, ここで得られた $\mathcal{N}_T$ 上の Fisher 計量は, $\mathcal{N}$ 上のものを部分多様体

$\mathcal{N}_T \subset \mathcal{N}$ に制限したものと一致している．$\nabla^{A(\alpha)}$ に関しても同様である．[4] の中で, 組 $(\mathcal{N}_T, g^F)$ は *Takano Gaussian space* と呼ばれるものになっている．特に, $(\mathcal{N}_T, g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ について次が知られている．

命題 6.2.1 ([18])**.** 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 統計多様体 $(\mathcal{N}_T, g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ は定曲率統計多様体である．

特に任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $(\mathcal{N}_T, g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ は共役対称である．

n 次アファイン群 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の閉部分群 $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R}) := R \ltimes \mathbb{R}^n$ は, $\mathcal{N}$ に単純推移的かつなめらかに作用していた (3.2 章)．ここで, $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$ の閉部分群 $\mathrm{Aff}^{s+}(n, \mathbb{R})$ を,

$$\mathrm{Aff}^{s+}(n, \mathbb{R}) := \{aI_n \mid a \in \mathbb{R}_{>0}\} \ltimes \mathbb{R}^n \ \subset \mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$$

と定めると, 式 (3.1) の群作用を $\mathrm{Aff}^{s+}(n, \mathbb{R})$ に制限した群作用は, $\mathcal{N}_T$ に単純推移的となる．またリー群として, 次の同型が存在することが簡単に確認できる．

$$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}} \simeq \mathrm{Aff}^{s+}(n, \mathbb{R}).$$

以上より, 定理 6.1.1 に基づくと, 次の結果を導ける．

系 6.2.2. (g^F, ∇) を $\mathcal{N}_T$ 上の $\mathrm{Aff}^{s+}(n, \mathbb{R})$-不変な統計構造とする．このとき, 以下の二条件は同値である．

(1) (g^F, ∇) は $\mathcal{N}_T$ 上の共役対称統計構造である．
(2) アファイン接続 ∇ は $\mathcal{N}_T$ 上の甘利-Chentsov の α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ である．

参考文献

[1] Shun-ichi Amari and Hiroshi Nagaoka, *Methods of information geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 191, American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000, Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada. MR 1800071

[2] A. Andrada, M. L. Barberis, and I. Dotti, *Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) **83** (2011), no. 1, 232–255. MR 2763953

[3] Luis Pedro Castellanos Moscoso and Hiroshi Tamaru, *A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry **64** (2023), no. 2, 471–491.

[4] Yasuaki Fujitani, *Information geometry of warped product spaces*, Inf. Geom. **6** (2023), no. 1, 127–155. MR 4611772

[5] Hitoshi Furuhata, Jun-ichi Inoguchi, and Shimpei Kobayashi, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions*, Inf. Geom. **4** (2021), no. 1, 177–188. MR 4287335

[6] Wolfgang Globke and Raul Quiroga-Barranco, *Information geometry and asymptotic geodesics on the space of normal distributions*, Inf. Geom. **4** (2021), no. 1, 131–153. MR 4287332

[7] Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, and Kazuhiro Terada, *Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 2, 669–684. MR 3488140

[8] Jun-ichi Inoguchi and Yu Ohno, *Homogeneous statistical manifolds*, arXiv preprint arXiv:2408.01647 (2024).

[9] Shimpei Kobayashi and Yu Ohno, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions*, to appear in Osaka Journal of Mathematics (2024).

[10] Hiroshi Kodama, Atsushi Takahara, and Hiroshi Tamaru, *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math. **135** (2011), no. 1-2, 229–243. MR 2783396

[11] Yuji Kondo, *A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups*, Hiroshima Math. J. **52** (2022), no. 3, 333–356. MR 4515687

[12] Akira Kubo, Kensuke Onda, Yuichiro Taketomi, and Hiroshi Tamaru, *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J. **46** (2016), no. 3, 357–374. MR 3614303

[13] Takashi Kurose, *Dual connections and affine geometry*, Math. Z. **203** (1990), no. 1, 115–121. MR 1030710

[14] Jorge Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194. MR 1958155

[15] Stefan L Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential geometry in statistical inference **10** (1987), 163–216.

[16] Hirohiko Shima, *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), no. 3, 91–128. MR 597019

[17] ———, *The geometry of Hessian structures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. MR 2293045

[18] Kazuhiko Takano, *Geodesics on statistical models of the multivariate normal distribution*, Tensor (N.S.) **67** (2006), no. 2, 162–169. MR 2361690