フルヴィッツラドン数と半単純リー群の固有作用

金沢大学 甘中 一輝 *
Kazuki Kannaka
Kanazawa University

§1. イントロ

正の整数 N を $N = 2^{4a+b} \times (\text{奇数})$ $(a \in \mathbb{Z},\ 0 \leq b \leq 3)$ と表した時 $\rho(N) = 8a + 2^b$ と定義する. 整数 $\rho(N)$ は N の**フルヴィッツラドン数**と呼ばれ, 二次形式の合成の研究 [4, 11] や球面上のベクトル場の研究 [1] に現れる事で有名である. 本稿では, フルヴィッツラドン数が等質空間への固有作用の研究にも現れる事を説明したい.

我々の主定理の特別な場合を説明する為に幾つかの概念を思い出す. $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の標準的な符号 (p,q) の二次形式を $Q_{p,q}(x)$ と書く. この時, $\mathbb{R}^{p+q+1}$ の二次超曲面

$$X(p,q) = \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid Q_{p,q+1}(x) = -1\}$$

を考えよう. $X(p,q)$ には二次形式 $Q_{p,q+1}(x)$ の制限によって符号 (p,q) の擬リーマン構造が定まる. 実は $X(p,q)$ のこの計量に関する断面曲率は -1 で一定であり, さらに $O(p,q+1)$ が $X(p,q)$ の等長変換群になる. 等質空間としては $X(p,q) \simeq O(p,q+1)/O(p,q)$ という表示を持つ. $X(p,q)$ は $p=0$ と $q=0$ の場合 (リーマン多様体の場合) はそれぞれ球面と実双曲空間 (正確には実双曲空間の二つの非交和), $p=1$ と $q=1$ の場合 (ローレンツ多様体の場合) はそれぞれド・ジッター空間と反ド・ジッター空間と呼ばれる. ここで, 計量を -1 倍すれば断面曲率の正負と計量の符号はそれぞれ入れ代わる事に注意されたい.

擬リーマン空間形とは, 測地的完備で断面曲率が一定の擬リーマン多様体の事を言う. 例を構成するには $X(p,q)$ の**不連続群**による商空間を取ればよい. ここで $X(p,q)$ の不連続群とは, 等長変換群 $O(p,q+1)$ の離散部分群 Γ であって, $X(p,q)$ に固有不連続かつ自由に作用するものである. この時, 商空間 $\Gamma\backslash X(p,q)$ は自然に多様体構造を持ち, 商写像 $X(p,q) \to \Gamma\backslash X(p,q)$ が被覆写像になり, この被覆写像を通して商多様体 $\Gamma\backslash X(p,q)$ もまた負曲率を持つ符号 (p,q) の擬リーマン空間形になる. 実は, $q \neq 1$ の時は, 負曲率を持つ符号 (p,q) の擬リーマン空間形は $\Gamma\backslash X(p,q)$ と等長同型になる事も知られている (例えば [12, Theorem 2.4.9]). $q=1$ の時は $X(p,q)$ の普遍被覆の商空間まで考える必要がある.

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 57S30, Secondary 22E40, 22F30, 30F35.
理化学研究所の基礎科学特別研究員研究費の助成に基づく. また, 本研究は東條広一氏 (理化学研究所) との共同研究に基づく.

*E-mail: kannaka@se.kanazawa-u.ac.jp

球面 $(p=0)$ の不連続群は Wolf [12] に詳しく, 双曲空間 $(q=0)$ の不連続群は双曲幾何学における研究対象であり今もなお広く研究されている. 我々は非リーマン幾何の場合 $(pq \neq 0)$ には不連続群の研究にどの様な新現象が起こるかに興味がある.

不連続群の定義において, 作用の自由性の条件を落とせば商空間 $\Gamma\backslash X(p,q)$ は多様体にはならないが orbifold (V-manifold) の良い構造を有する. 一方で, 固有不連続性の条件を落とせば商空間はハウスドルフにすらならない. 非リーマン幾何ではリーマン幾何とは対照的に, 作用の固有不連続性の条件が等長変換群の離散部分群に大きな制約を課す. この新しい困難が非リーマン幾何における不連続群の理論に興味深い現象を引き起こす.

一つの具体例として Calabi–Markus 現象を挙げよう. $X(p,q)$ の等長変換群 $O(p,q+1)$ は $p \neq 0$ の時には非コンパクトであり無限離散部分群を豊富に有する. しかし, $p < q+1$ の場合にはその様な離散群は全て $X(p,q)$ に固有不連続に作用しない ([2, 6]). この様に,「等質空間 G/H に固有不連続に作用する G の離散部分群が有限群しかない」という現象はあるクラスの等質空間 G/H で起こり, Calabi–Markus 現象と呼ばれる. 小林俊行氏はどの様な等質空間で Calabi–Markus 現象が生ずるかを解明しただけでなく ([6, 7]), 特に G が簡約リー群の場合には, 離散群の G/H への作用の固有不連続性の G の Cartan 射影を用いた簡明な判定法を確立し ([6, 8]), さらには Clifford–Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ の大域幾何・大域解析の理論を創始された ([9, 5] 等). $X(p,q)$ に話を戻すと, $p < q+1$ である事と $X(p,q)$ で Calabi–Markus 現象が起こる事が同値になる. $2N-1$ 次元の $X(p,q)$ において, Calabi–Markus 現象がいつ起こるかを以下の様に図示しておく.

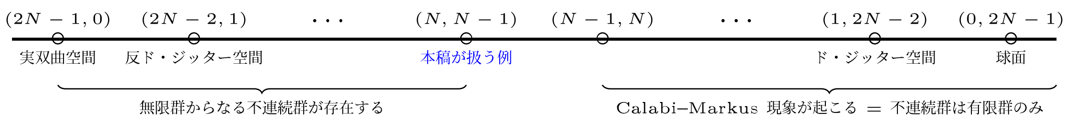

図 1. $2N-1$ 次元の $X(p,q)$ $(p+q=2N-1)$ と Calabi–Markus 現象

本稿では, Calabi–Markus 現象が起こらないギリギリの場合では, (ある程度不連続群はあるにも関わらず) 不連続群の群構造に非常に強い制約がかかるのではないか？という事を将来の問題として提案したい. その一つのエビデンスを示す為に, $X(p,q)$ の不連続群の連続群版を考察する次の問題を $(p,q)=(N,N-1)$ の場合に研究する.

問題 1.1. $X(p,q)$ に等長かつ固有に作用するコンパクト因子を持たない連結半単純リー群の同型類を分類せよ.

ここでリー群 L の多様体 X への連続作用が固有であるとは, X の任意のコンパクト部分集合 S に対して $\{l \in L \mid (l \cdot S) \cap S \neq \emptyset\}$ がコンパクトになる時にいう. 従って, コンパクト群の連続作用は常に固有であり, 離散群の固有作用は固有不連続作用である.

問題 1.1 で, 等長かつ固有な作用全てを分類するのではなく, その様に作用し得るリー群の同型類のみを考える事がミソである. 実際, $(p,q)=(N,N-1)$ の場合には, 問題 1.1 の答に (少なくとも筆者にとっては) 驚くべき事にフルヴィッツラドン数 $\rho(N)$ が現れる.

定理 1.2 (K.–Tojo)**.** L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とする．L の $X(N, N-1)$ への等長かつ固有な作用が存在するには, L が不定値スピン群 $Spin(n, 1)$ $(2 \leq n \leq \rho(N))$ とリー群として同型である事が必要十分である．

$X(N, N-1)$ の等長変換群 $O(N, N)$ は膨大な量の非コンパクト単純リー部分群を有するが, $Spin(n, 1)$ と (局所同型であっても) 同型でなければ, それらの作用は決して固有ではない事が上記の定理から分かる．但し, $Spin(2, 1) \simeq SL(2, \mathbb{R})$, $Spin(3, 1) \simeq SL(2, \mathbb{C})$, $Spin(4, 1) \simeq Sp(1, 1)$, $Spin(5, 1) \simeq SL(2, \mathbb{H})$ の例外的な同型には注意せよ．

§2.　定理 1.2 の証明のアイデア—何故フルヴィッツラドン数が現れるか？

定理 1.2 の要点は以下の二つである．

- L をコンパクト因子を持たない連結半単純リー群とした時, L が $Spin(n, 1)$ とリー群として同型でなければ, L が $X(N, N-1)$ に等長かつ固有に作用しない;
- $Spin(n, 1)$ が $X(N, N-1)$ に等長かつ固有に作用するには $n \leq \rho(N)$ が必要十分.

前者にも何故 $Spin(n, 1)$ なるリー群が特別なのかという興味深い点はあるが, 本稿では後者の何故フルヴィッツラドン数が現れるかに関するアイデアを簡単に紹介したい．

§2.1.　フルヴィッツラドン数のリー環を用いた新たな定式化

まず Hurwitz–Radon–Eckmann による古典的な結果 ([4, 11, 3]) により,

$$\begin{aligned}\rho(N) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid\ & \mathbb{R}\text{ 線形写像 } f\colon \mathbb{R}^n \to M(N, \mathbb{R}) \text{ が存在して}\\ & \text{任意の } v \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } {}^t f(v) f(v) = \|v\|^2_{\mathbb{R}^n} I_N \text{ を満たす}\}\end{aligned}$$

が成立する事を思い出そう．実は, この等式の右辺は $X(N, N-1)$ の等長変換群のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N, N)$ を用いて再解釈出来る．というのも, Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と $\mathfrak{g}$ の自然表現 $\iota\colon \mathfrak{g} \to M(2N, \mathbb{C})$ を用いると, 次が成立する事は (そう認識できれば) 直ちに確認出来る．

$$\begin{aligned}\rho(N) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid\ & \mathbb{R}\text{ 線形写像 } f\colon \mathbb{R}^n \to \mathfrak{p} \text{ が存在して}\\ & \text{任意の } v \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \iota(f(v))^2 = \|v\|^2_{\mathbb{R}^n} I_{2N} \text{ を満たす.}\}\end{aligned} \tag{2.1}$$

話が少し脱線するが, (2.1) の右辺は簡約リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とその表現 $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の組 $(\mathfrak{g}, \iota)$ に対しても同様に定義され, 組 $(\mathfrak{g}, \iota)$ に付随するフルヴィッツラドン数 $\rho(\mathfrak{g}, \iota)$ の概念に自然に導かれる．$\mathfrak{g}$ が古典型で ι がその自然表現の場合には, その値が周期 8 の列

$$\begin{aligned}\ldots \subset &\mathfrak{so}(N, N) \subset \mathfrak{gl}(2N, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})\\ \subset &\mathfrak{sp}(2N, 2N) \subset \mathfrak{gl}(4N, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{so}^*(2(8N)) \subset \mathfrak{so}(16N, \mathbb{C})\\ \subset &\mathfrak{so}(16N, 16N) \subset \ldots\end{aligned}$$

とパラエルミート対称対の性質とを組み合わせて計算できる (講演中に説明済み).

§ 2.2. $X(N,N-1)$ への固有作用とフルヴィッツラドン数の関係

図 1 の様に $X(N,N-1)$ は Calabi–Markus 現象 (不連続群が有限群しかない) が起こらないギリギリの対称空間である．それだけではなく, $X(N,N-1)$ は等長かつ固有な $SL(2,\mathbb{R})$ 作用を持つギリギリの対称空間である．正確に言えば, $X(p,q)$ が等長かつ固有な $SL(2,\mathbb{R})$ 作用を持つ事と,「$p>q+1$」あるいは「$p=q+1$ かつ p が偶数」である事が必要十分である ([10])．小林氏の固有性判定法 [8] と冪零軌道の Dynkin–Kostant 分類を組み合わせて, 奥田隆幸氏 [10] は半単純対称空間への固有な $SL(2,\mathbb{R})$ 作用を組み合わせ論的に徹底的に調べ上げたが, 奥田氏の手法を用いると $X(N,N-1)$ には固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用がある意味少ない事が観察される．この観察が鍵となり, 次の補題が証明される．

補題 2.1. *リー群の準同型 $\varphi\colon Spin(n,1)\to O(N,N)$ $(n\geq 2)$ を通して $Spin(n,1)$ が $X(N,N-1)$ に固有に作用するには, φ と包含 $O(N,N)\to GL(2N,\mathbb{C})$ の合成で得られる $Spin(n,1)$ の表現の各既約成分に $SO(n,1)$ を経由するものが無い事が必要十分である．*

上記の補題により, 固有性の条件が $Spin(n,1)$ の表現論的条件に置き換わる．$X(N,N-1)$ への固有作用とフルヴィッツラドン数 $\rho(N)$ の関係を示すには以下を証明すればよい．

命題 2.2. *自然数 n に対して $n\leq\rho(N)$ が成立するには, 次の二条件を満たす連続表現 $\tau\colon Spin(n,1)\to GL(2N,\mathbb{C})$ が存在する事が必要十分である．*

- *表現 τ の既約成分に $Spin(n,1)\to SO(n,1)$ を経由するものが無く,*
- *τ の像は $O(N,N)$ に含まれる．*

ここではフルヴィッツラドン数の再解釈 (2.1) がどう活きるかを見る為に, 命題 2.2 の必要性の証明のスケッチを与えよう．以下の証明ではクリフォード代数 $C(n)$ と不定値の偶クリフォード代数 $C_{\text{even}}(n,1)$ を用いる．

(命題 2.2 の必要性の証明のスケッチ). 包含写像 $\mathfrak{so}(N,N)\to\mathfrak{gl}(2N,\mathbb{C})$ を ι と書き, 適当な Cartan 分解 $\mathfrak{so}(N,N)=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を取る．$n\leq\rho(N)$ とすると, 等式 (2.1) から, $\mathbb{R}$ 線型写像 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathfrak{p}$ であって任意の $v\in\mathbb{R}^n$ に対して, $\iota(f(v))^2=\|v\|^2 I_{2N}$ が成立するものが取れる．クリフォード代数 $C(n)$ の普遍性を用いて, $\iota\circ f$ は $\mathbb{R}$ 代数の射 $F\colon C(n)\to M(2N,\mathbb{C})$ に拡張される．さらによく知られた $\mathbb{R}$ 代数の同型 $\eta\colon C(n)\to C_{\text{even}}(n,1)$ を用いて, $\mathbb{R}$ 代数の射 $F\circ\eta^{-1}\colon C_{\text{even}}(n,1)\to M(2N,\mathbb{C})$ を得る．これを $Spin(n,1)$ に制限する事でリー群の連続表現 $\tau\colon Spin(n,1)\to GL(2N,\mathbb{C})$ を得る．表現 τ が偶クリフォード代数 $C_{\text{even}}(n,1)$ の表現に由来する事から, τ は $Spin(n,1)$ の (半) スピン表現 (これは $Spin(n,1)\to SO(n,1)$ を経由しない) の直和に分解する事も分かる．

$\tau(Spin(n,1))\subset O(N,N)$ である事を示そう．これは先程の同型 $\eta\colon C(n)\to C_{\text{even}}(n,1)$ において, $\mathbb{R}^n$ の像が $\mathfrak{spin}(n,1)$ の Cartan 分解の $\mathfrak{p}$ 部分 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{spin}(n,1)}$ である事が効いている．さて, τ の微分表現 $d\tau$ は $F\circ\eta^{-1}\colon C_{\text{even}}(n,1)\to M(2N,\mathbb{C})$ の $\mathfrak{spin}(n,1)$ への制限である事は直ぐに確かめられる．よって, $d\tau(\mathfrak{p}_{\mathfrak{spin}(n,1)})\subset\mathfrak{p}$ が分かる．リー環 $\mathfrak{spin}(n,1)$ は $\mathfrak{p}_{\mathfrak{spin}(n,1)}$ で生成されるから, $d\tau(\mathfrak{spin}(n,1))\subset\mathfrak{so}(N,N)$ を得る．さらに $Spin(n,1)$ が連結

である事から $\tau(Spin(n,1)) \subset O(N,N)$ が証明される.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{p}_{\mathfrak{spin}(n,1)} & \xrightarrow[\simeq]{\eta^{-1}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathfrak{p} \\
\cap & & \cap & & \cap\ \iota \\
C_{\mathrm{even}}(n,1) & \xrightarrow[\simeq]{\eta^{-1}} & C(n) & \xrightarrow{F} & M(2N,\mathbb{C}) \\
\cup & & & & \cup \\
Spin(n,1) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \tau \qquad\qquad} & & GL(2N,\mathbb{C}).
\end{array}
$$

上記の図は証明の状況を纏めたものである. □

命題 2.2 の十分性の証明は長くなるので割愛するが, その手法についてコメントしておく. 十分性の証明には, 与えられた群 L の表現 $\tau\colon L \to GL(N,\mathbb{C})$ がいつ古典型実リー群 G の自然表現 $G \to GL(N,\mathbb{C})$ を経由するかを調査する必要がある. この為に Cartan や岩堀による実表現の理論や表現の符号の考察に加え, 次の命題が役に立つ. 以下で $S, T \subset GL(N,\mathbb{C})$ に対して, $g \in GL(N,\mathbb{C})$ が存在して $g^{-1}Sg \subset T$ となる時 $S \subset_{\mathrm{Int}} T$ と書く事にする.

命題 2.3. 群 L の有限次元表現 $\tau\colon L \to GL(N,\mathbb{C})$ に対して,

$$
{}^{\exists}p,q \in \mathbb{N},\ p+q=N \text{ かつ } \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} O(p,q) \iff \begin{cases} \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} O(N,\mathbb{C}); \\ \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} GL(N,\mathbb{R}); \end{cases}
$$

$$
\tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} Sp(N/2,\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} Sp(N/2,\mathbb{C}); \\ \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} GL(N,\mathbb{R}); \end{cases}
$$

$$
{}^{\exists}p,q \in \mathbb{N},\ p+q=N/2 \text{ かつ } \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} Sp(p,q) \iff \begin{cases} \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} Sp(N/2,\mathbb{C}); \\ \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} GL(N/2,\mathbb{H}); \end{cases}
$$

$$
\tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} O^{*}(2(N/2)) \iff \begin{cases} \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} O(N,\mathbb{C}); \\ \tau(L) \subset_{\mathrm{Int}} GL(N/2,\mathbb{H}). \end{cases}
$$

命題 2.3 は古典群の $\mathbb{R}$ 上の中心単純多元環を用いた実現を用いて統一的に証明される.

§3. 定理 1.2 の一般化とその先の問題

$X(N,N-1)$ の固有 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用がある意味少ないという性質 (我々は Property (VE) と呼ぶ) は, 一般の古典型等質空間に対しても定式化され, Property (VE) を持つ等質空間 G/H に対しては定理 1.2 と類似の結果が成立する. その際には $\rho(N)$ の代わりに, 古典群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の自然表現 ι に付随するフルヴィッツラドン数 $\rho(\mathfrak{g},\iota)$ が現れる. Property (VE) を持つ単純対称空間は分類でき, 以下の表にある G/H と局所同型である.

G	H
$SL(2N,\mathbb{R})$	$SO(N+1,N-1)$
$SL(2N,\mathbb{C})$	$SU(N+1,N-1)$
$SL(2N,\mathbb{H})$	$Sp(N+1,N-1)$
$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2p+1,\mathbb{C})\times SO(4N-2p-1,\mathbb{C})$ $(0\le p<N)$
$SO(4N,\mathbb{C})$	$SO(2N+1,2N-1)$
$SU(N,N)$	$S(U(p,p+1)\times U(N-p,N-p-1))$ $(0\le p<N/2)$
$SO(2N,2N)$	$SO(p,p+1)\times SO(2N-p,2N-p-1)$ $(0\le p<N)$
$SO^*(4N)$	$SO^*(4p+2)\times SO^*(4N-4p-2)$ $(0\le p<N/2)$
$SO^*(4N)$	$U(N+1,N-1)$
$Sp(N,N)$	$Sp(p,p+1)\times Sp(N-p,N-p-1)$ $(0\le p<N/2)$

表 1. Property (VE) を持つ単純対称空間

Property (VE) を持つ等質空間 G/H に対して定理 1.2 の類似が成立するという事実は, G/H に固有に作用する非コンパクト半単純リー群がある種少ない事を意味するとも捉えられる. それでは, Property (VE) を持つ等質空間 G/H には不連続群が少ないというタイプの定理は存在しないだろうか? さらにはフルヴィッツラドン数 $\rho(\mathfrak{g},\iota)$ が関係する剛性現象が G/H のクリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ の幾何学に現れないだろうか?

引用文献

[1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 603–632.

[2] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 63–76.

[3] B. Eckmann, *Gruppentheoretischer beweis des satzes von hurwitz-radon über die komposition quadratischer formen*, Commentarii Mathematici Helvetici **15** (1942), no. 1, 358–366.

[4] A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. **88** (1922), no. 1-2, 1–25.

[5] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math. **287** (2016), 123–236.

[6] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), no. 2, 249–263.

[7] ———, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with non-compact isotropy subgroups*, Journal of Geometry and Physics **12** (1993), no. 2, 133–144.

[8] ———, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), no. 2, 147–163.

[9] ———, *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), no. 3, 395–409.

[10] T. Okuda, *Classification of semisimple symmetric spaces with proper $SL(2,\mathbb{R})$-actions*, J. Differential Geom. **94** (2013), no. 2, 301–342.

[11] J. Radon, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), no. 1, 1–14.

[12] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, vol. 372, American Mathematical Soc., 1972.