The heat kernel on $SL(2)$ for the Laplace–Beltrami operator

嶋田 將史

Masafumi SHIMADA*

九州大学 大学院数理学府

Graduate School of Mathematics, Kyushu University†

Abstract

$SL(2)$ 上の Laplace–Beltrami 作用素に対する熱核の明示式を報告する．本稿では，時間の都合上発表で省略した，対称空間上の熱核から対応する zeta 関数の関数等式を系統的に与えることを目指す Jorgenson–Lang のプログラムと主結果の関連に言及する．

1 Introduction

本稿の目標は，$SL(2,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$) 上の熱核を，主束構造を持つ対角作用の剰余空間を用いて求積することである．$SL(2,\mathbb{R})$ 上の熱核の明示式は，一般化非可換 Fourier 変換 ([1, Proposition 43] 参照) や重み付き Maass Laplacians を用いて ([9, Proposition 4.2.1] 参照) すでに計算されている．本稿の主結果である Theorem 4.0.1 では，円周上の熱核と上半平面上の熱核を用いて，先行研究とは別の熱核の表示を与える．他方，$SL(2,\mathbb{C})$ 上の熱核に対し，例えば Segal–Bargmann 変換の枠組みでその存在が用いられている (e.g. [5, Theorem 1'] で $K=SU(2)$ の場合) ものの，その明示式はまだ与えられていない．その一つの原因は，($SO(2)\subset SL(2,\mathbb{R})$ と比較し) 極大コンパクト部分群 $SU(2)\subset SL(2,\mathbb{C})$ に関する，$SL(2,\mathbb{C})$ 上の Laplace–Beltrami 作用素の $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$-成分のスペクトルの計算であると考えられる．ただし，Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の普遍包絡代数を $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ と書いた．$SL(2,\mathbb{R})$ 上の熱核の求積で用いた Fourier 変換の理論を，先行研究と同様に $SL(2,\mathbb{C})$ に対し適用すると，$SO(2)$ 上では Fourier 級数展開をするステップで，$SU(2)$ に対する Peter–Weyl の定理を使う必要がある．この困難を回避するため，Theorem 4.0.1 の証明のスケッチでは，先に $SU(2)$ 上の熱核を求積し，上半空間上の熱核との積を用いて $SL(2,\mathbb{C})$ 上の熱核を計算する．そのため，$SU(2)$ の Peter–Weyl の定理を使わずに $SL(2,\mathbb{C})$ 上の熱核を計算することができる[1)]．$SL(2,\mathbb{R})$ 上と $SL(2,\mathbb{C})$ 上それぞれの熱核の表示を比較すると，$SL(2,\mathbb{R})$ と $SL(2,\mathbb{C})$ 各々には異なる方法でリーマン計量を入れているが，Cartan 分解に関する $SL(2,\mathbb{K})$ 上の熱核の分解という観点から 2 つの熱核は同じ表示を持つ．

$SL(2,\mathbb{K})$ 上の熱核の明示式を与える主結果 Theorem 4.0.1 の応用として，Jorgenson–Lang のプログラム ([7, 8] 参照) で考えられている，熱核と反転公式を用いた zeta object(3 節参照) の関数等式の系統的な導出のアナロジーがある．少し詳しくいうと，プログラムの思想圏内にある「$SL(n,\mathbb{R})$ 上と $SL(n,\mathbb{C})$ 上の (Casimir 作用素に対する) 熱核から，各算術的 cofinite な離散部分群に対しそれぞれ出力される関数等式を関係づける」というステップに Theorem 4.0.1 を応用する．Jorgenson–Lang は，Flensted-Jensen 変換を使うアプローチをとり，3 節で述べる $SL(n,\mathbb{C})$ 上の zeta objects と関連する性質から，系として $SL(n,\mathbb{R})$ 上の zeta objects と関連する性質を導出することを目指している ([6, Chapter XII] 参照)．このアプローチは，$SL(2,\mathbb{C})$ の Flensted-Jensen 分解に関する変換を用いて (より簡単な表示を持つ)$SL(2,\mathbb{C})$ 上の Casimir 作用素に対する熱核から，$SL(2,\mathbb{R})$ 上の Casimir 作用素に対する熱核が得られるという事実に基づいている．本稿では， Theorem 4.0.1 の主張に現れる特殊関数を用いて，$SL(2,\mathbb{R})$ 上の熱核と

*本研究は JSPS 科研費 23KJ1690 の助成に基づく

†m.shimada.a90@s.kyushu-u.ac.jp

1) $SU(2)$ 上の熱核を求積するときに Peter–Weyl の定理を使う．

$SL(2,\mathbb{C})$ 上の熱核を，Jacobi の theta 関数 $\vartheta=\vartheta(z,\tau)$ とその偏微分 $\partial_z\vartheta$ を用いて対応づける[2)]．ただし，ϑ とその偏微分 $\partial_z\vartheta$ の間の対応は，それぞれ級数展開し各成分を比較すると第一種 Thebycheff 多項式と第二種 Thebycheff 多項式の間の対応ということができる．特殊関数を用いる本稿のアプローチの利点として，作成中の [10] で詳細を述べるが，例えば各算術的 cofinite な離散部分群 $\Gamma\subset SL(n)$ に対する zeta object が満たす関数等式の諸性質を，ルート系と各 $\gamma\in\Gamma$ を構成する $SL(2)$ の双曲型，楕円型，放物型の元の組合せから説明することが期待される．

Acknowledgements

講演および本稿執筆の機会を与えてくださいました，世話人の田中 雄一郎氏に感謝の意を表します．この場を借りて，研究発表と研究交流の場を提供してくださった京都大学数理解析研究所 共同利用にも心からお礼申し上ます.

2 Preliminary

$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ に対し，$G:=SL(2):=SL(2,\mathbb{K})$ とする．G の極大コンパクト部分群を K を書く．単位行列を $e\in G$ と書く．この節では，G 上の熱核と G 上の球関数に関する記号を準備する．ここで用いる記号は，Jorgenson–Lang が考察している一般の $SL(n,\mathbb{C})$ にも拡張することができる．

2.1 The heat kernel on G

リーマン多様体 M とその計量 g が与えられたとする．g に付随する M 上の Laplace–Beltrami 作用素を Δ_M，体積測度を $d\mathrm{vol}_g$ と書く．時間変数を $t>0$ としたとき，M 上の熱作用素を $L:=\partial_t+\Delta_M$ とする．このとき，関数 $u=u(t,x):\ (0,\infty)\times M\to\mathbb{R}$ に対し，微分方程式 $Lu=0$ は熱方程式と呼ばれる．

Definition 2.1.1 $\rho^M=\rho^M(t,x,y):\ (0,\infty)\times M\to\mathbb{R}$ が L に関する熱方程式の基本解であるとき，ρ^M を M 上の熱核という．すなわち，熱核 ρ^M は次の条件を満たす：

- ρ^M は時間変数 t に関し C^1 級，変数 x に関し C^2 級である．
- 変数 t,x への L の作用を $L_{1st}=\partial_t+\Delta_{M,x}$ と書く．このとき，$L_{1st}\rho^M=0$, $\rho^M(t,y,x)=\rho^M(t,x,y)$.
- コンパクト台を持つ滑らかな関数 $f\in C_c^\infty(M)$ に対し，

$$\lim_{t\to+0}\int_M\rho^M(t,x,y)f(y)dvol_g(y)=f(y).$$

Remark 2.1.2 リーマン対称空間 G/K が与えられたとする．このとき，G 上の *Casimir* 作用素に対しても熱作用素を定めることができ，基本解を *Casimir* 作用素に対する G 上の熱核と呼ぶ．*Casimir* 作用素の G/K への直像は $\Delta_{G/K}$ である．また，G 上の *Casimir* 作用素は擬リーマン計量から誘導される *Laplace* 作用素である．

以下では，リーマン多様体 $M=(M,g)$ がある対称性を持つとする．H を，左 H-不変な計量と Haar 測度 dh を持つ連結非コンパクト Lie 群とする[3)]．このとき，H 上の熱核がただ一つ存在する ([2] 参照). この H 上の熱核を ρ^H と書く．ρ^H の性質については，Lemma 2.1.3 および Lemma 2.1.4 が成り立つ．

Lemma 2.1.3 ([4, Theorem 7.20] 参照) $\rho^H=\rho^H(t,h,h')$ は変数 $t>0$ と $h,h'\in H$ に関しそれぞれ C^∞ 級である．さらに，各 $t>0$ で $(h,h')\mapsto\rho^H(t,h,h')$ は積測度 $dh\otimes dh$ に関し L^2-可積分である．

Lemma 2.1.4 ([4, Theorem 9.12] 参照) $J:\ H\to H$ を等長写像とする．$t>0$ としたとき, $h,h'\in H$ に対し $\rho^H(t,J(h),J(h'))=\rho^H(t,h,h')$ が成り立つ．

H 上の畳み込み積を $*:\ L^1(H,dh)\times L^2(H,dh)\to L^2(H,dh)$ と書く．このとき，Lemma 2.1.3 と Lemma 2.1.4 を用いて，Definition 2.1.1 で定義される H 上の熱核 ρ^H を Definition 2.1.5 で ρ_t^H に書き改める．ただし，$t>0$ とする．

[2)] 質疑応答で，対称空間に対する crown domain を用いたアプローチをご教示いただいた．本稿では扱わないが，こちらのアプローチからも zeta objects の対応を調べたい.

[3)] コンパクト Lie 群の場合，Peter–Weyl の定理を用いてその熱核を求積することができる．

Definition 2.1.5 $t>0$ とする．2条件を満たす $\rho_t^H:\ H\to\mathbb{R}$ を H 上の熱核という：
任意に $f\in C_c^\infty(H)$ が与えられたとき，

$$L(\rho_t^H * f) = (\partial_t + \Delta_H)(\rho_t^H * f) = 0. \tag{1}$$

$$\lim \|\rho_t^H * f - f\|_{L^2(H,dh)} = 0. \tag{2}$$

$G=SL(2)$ にあるリーマン計量を入れ，熱核 ρ_t^G を与えよう．

(i). $G=SL(2,\mathbb{R})$ のとき．$K=SO(2)$ とする．G に対し Lie 代数を $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ と書く．ある左 G-不変かつ右 K-不変リーマン計量が存在し，G 上のリーマン構造として次を誘導する：

- $Z_1, Z_2\in\mathfrak{g}$ に対し，
$$\langle Z_1, Z_2\rangle = 4\mathrm{tr}({}^tZ_1Z_2)$$
を満たす $\mathrm{Ad}(K)$-不変な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ただし，$Z\in\mathfrak{g}$ の転置行列を ${}^tZ$ と書いた，
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底 $\{H,X,Y\}\subset\mathfrak{g}$. ただし，
$$H := \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ X := \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ Y := \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
- $H^2+X^2+Y^2$ に関する G 上の Laplace–Beltrami 作用素 Δ_G.

(ii). $G=SL(2,\mathbb{C})$ のとき．$K=SU(2)$ とする．G は K の複素化 $K_{\mathbb{C}}$ である．G および K に対する Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{k}=\mathfrak{su}(2)$ と書く．ある左 G-不変かつ右 K-不変リーマン計量が存在し，リーマン構造として次を誘導する：

- $j=1,2$ と $Z_j=X_j+iX_j'\in\mathfrak{g}$, $X_j,X_j'\in\mathfrak{k}$ に対し
$$\langle Z_1,Z_2\rangle = \langle X_1,X_2\rangle_{\mathfrak{k}} + \langle X_1',X_2'\rangle_{\mathfrak{k}} := 4\mathrm{tr}(X_1X_2)+4\mathrm{tr}(X_1'X_2'),$$
を満たす $\mathrm{Ad}(K)$-不変な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{k}}$ は $\mathfrak{k}$ 上の内積となることに注意する，
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底 $\{H,iH,X,iX,Y,iY\}\subset\mathfrak{g}$,
- $H^2+(iH)^2+X^2+(iX)^2+Y^2+(iY)^2$ に関する G 上の Laplace–Beltrami 作用素 Δ_G.

以上の準備で，主結果で扱う熱核 $\rho_t^G=\rho_t^{SL(2)}$ を得た．

2.2 Spherical functions on G

次に，特殊関数を用いて明示的に ρ_t^G を書き下すため，$G=SL(2)$ 上の Harish-Chandra の Ξ 関数と呼ばれる球関数を与える．Cartan 対合 $\sigma:\ G\to G$ が与えられたとする．このとき，σ による固定部分群として極大コンパクト部分群を $K:=G^\sigma=\{g\in G\ ;\ \sigma(g)=g\}$ と書く．G および K それぞれの Lie 代数を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ で表す．ただし，$\mathfrak{g}$ に備わっている Lie 括弧積を $[\cdot,\cdot]$, Killing 形式を $B=B_\sigma$ と書く．$\mathfrak{g}$ の σ に関する Cartan 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ と書く．

$[\cdot,\cdot]$ に関する極大可換部分代数 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ を一つ固定する．Weyl 群を $W=W(K,\mathfrak{a})$ とする．W の位数を $|W|$ と書く．$\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{a}$ の複素化 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\otimes\mathfrak{a}$ の双対空間をそれぞれ $\mathfrak{a}^*:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{R})$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*:=\mathfrak{a}^*+i\mathfrak{a}^*$ とする．Killing 形式 B から誘導される $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の $\mathbb{C}$-双線型形式を $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\to\mathbb{C}$ と書く．

$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}^*$ 内のルート系とする．各 $\alpha\in\Sigma$ の同時固有空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ と書く．ここで，Weyl 群 W に対する Weyl chamber をそれぞれ $\mathfrak{a}_+\subset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_+^*\subset\mathfrak{a}^*$ として固定する．$\mathfrak{a}_+^*\subset\mathfrak{a}^*$ に対応する正ルートの集合を $\Sigma^+\subset\Sigma$ と書く．各正ルート $\alpha\in\Sigma^+$ に対し，α のルート重複度を $m_\alpha:=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}_\alpha$ と書く．ただし，$G=SL(2,\mathbb{R})$ のとき $m_\alpha=1$，$G=SL(2,\mathbb{C})$ のとき $m_\alpha=2$ が全ての $\alpha\in\Sigma^+$ に対し成り立つ．$\rho:=2^{-1}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m_\alpha\alpha$ とおく．

$\mathfrak{g}$ の (最大) 冪零イデアルを $\mathfrak{n}:=\bigoplus_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{p}$ と書く．このとき，G の部分群 N,A,A^+ を，それぞれ $\mathrm{Lie}(N)=\mathfrak{n}$, $\mathrm{Lie}(A)=\mathfrak{a}$, $\mathrm{Lie}(A^+)=\mathfrak{a}_+$ となるようにとる．指数写像 $\exp:\ \mathfrak{g}\to G$ を使うと，$A\subset G$ の定義から各 $a\in A$ に対し $a=\exp H$ を満たす $H\in\mathfrak{a}$ がただ一つ存在する．$\log a:=H$ と書く．G の分解として，$G=KA^+K$ を極分解，$G=NAK$ を岩澤分解という．各分解に対し，射影をそれぞれ

$$\mathrm{Iw}_A:\ G\to A,\ \mathrm{Iw}_K:\ G\to K,\ \mathrm{Pol}_{A^+}:\ G\to A^+,\ \mathrm{Pol}_{K,1\mathrm{st}}:\ G=KA^+K\ni k_1ak_2\mapsto k_1\in K$$

と書く．ただし，$k\in K$ のとき，$\mathrm{Pol}_{A^+}(k):=e$, $\mathrm{Pol}_{K,1\mathrm{st}}(k):=k$ とする．

以上の記号を使い，$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対し球関数 φ_λ を導入する．$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とする．$G \times K$ 上の滑らかな関数 $(g,k) \mapsto e^{(\lambda+\rho)(\log \mathrm{Iw}_A(kg))}$ は Poisson 核と呼ばれる．このとき，G 上の両側 K-不変な球関数 $\varphi_\lambda = \varphi_\lambda(g)$ の積分表示

$$\varphi_\lambda(g) = \int_K e^{(\lambda+\rho)(\log \mathrm{Iw}_A(kg))} dk$$

が得られる．φ_λ を用いる球変換は，両側 K-不変な $f \in C_c^\infty(G)$ に対し

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_G f(g)\varphi_{-\lambda}(g)dg$$

と書ける．Killing 形式 B から定まる両側 G-不変な Casimir 作用素を C_G と書く．このとき，C_G に関し φ_λ は固有値 $\langle \lambda, \lambda \rangle - \langle \rho, \rho \rangle$ の固有関数である．

$d\lambda$ を，規格化された $i\mathfrak{a}^*$ 上のある Haar 測度とする．Harish-Chandra の c 関数と呼ばれる $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の W-不変有理型関数 $c(\lambda)$ により，球変換 $f \mapsto \tilde{f}$ の逆変換は

$$\begin{aligned}\tilde{f} &\mapsto \left(g \mapsto \frac{1}{|W|} \int_{i\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(g)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda \right) \\ &= \left(g \mapsto \int_{i\mathfrak{a}^*_+} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(g)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda \right)\end{aligned}$$

で与えられる．$c(\lambda)$ はルート重複度と Γ 関数を用いて記述され，$i\mathfrak{a}^*$ 上正則でゼロ点を持たない．$i\mathfrak{a}^*$ 上の測度 $|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$ は Plancherel 測度と呼ばれる．特に，$G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき，$ir \in i\mathbb{R} \simeq i\mathfrak{a}^*$ に対し

$$|c(ir)|^{-2} = \frac{r}{2\pi} \tanh(\pi r)$$

と書ける．このとき，球変換 $f = f(g) \mapsto \tilde{f}$ の反転公式は式 (3) である：

$$f(g) = \int_{i\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\lambda)\varphi_\lambda(g)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda. \tag{3}$$

3 Jorgenson–Lang's program

主結果の応用先として，$SL(n)$ 上の Casimir 作用素に対する熱核から関数等式を求める Jorgenson–Lang のプログラム ([6, 7, 8] 参照) に関連し，$SL(2)$ 上の Laplace–Beltrami 作用素に対し熱核から関数等式を求める手順を提案する．Jorgenson–Lang のプログラムとは，「(Casimir 作用素に対する) 熱核と theta 関数の反転公式を用いて，対称空間上の zeta objects の加法的な関数等式を系統的に構成する」理論である．ただし，zeta object は，何らかの Euler 積の対数微分として表すことができる関数とされており，generalized zeta 関数や zeta-type 関数とも呼ばれる．Zeta objects を $Z(s)$ と書くと，$Z(s)$ のクラスとして

- 変数 s に関し有理型関数である，
- $\log Z(s)$ は離散部分群 Γ を走る値 $\{q_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ に関する Euler 和である，
- 解析接続から決まる σ_0 が存在し，s と $\sigma_0 - s$ に関し関数等式を持つ，

ことを要請する．

各 $n \geq 2$ に対し，$G_n := SL(n, \mathbb{C})$, $K_n \subset G_n$ を極大コンパクト部分群とする．プログラムを実行する空間として，算術的 cofinite な離散部分群 $\Gamma_n \subset G_n$ で割った，カスプを持つ非コンパクトな体積有限の空間 $\Gamma_n \backslash G_n / K_n$ が主要な対象である．$\Gamma_n \backslash G_n / K_n$ に対し，Jorgenson–Lang が提案する関数等式の系統的な構成法を見よう．

3.1 The general path from the heat kernel to a zeta object

まず，手順 (イ) から手順 (ホ) に従い $\Gamma_n \backslash G_n / K_n$ に対応する各 zeta object を求める．

(イ): G_n/K_n 上の (Casimir 作用素に対する) 熱核 ρ^{G_n/K_n} を求積する．

(ロ): ρ^{G_n/K_n} を Γ_n に関して周期化し，$\rho^{\Gamma_n \backslash G_n/K_n}$ を得る．

(ハ): 固有関数 (e.g. Eisenstein 級数) を用いて，$\rho^{\Gamma_n \backslash G_n/K_n}$ を展開する．

(ニ): $\rho^{\Gamma_n\backslash G_n/K_n} = \rho^{\Gamma_n\backslash G_n/K_n}(t,x,y)$ から theta 級数表示 $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n t}$ ($a_n \in \mathbb{C},\ 0 < \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) を得るため，$\Gamma_n\backslash G_n$ 上の積分で発散する項を正規化する．

(ホ): Gauss 変換 $f \mapsto (z \mapsto 2z\int_0^\infty e^{-z^2 t} f(t)dt)$ を適用する．

手順 (ハ) と手順 (ロ) から zeta objects の関数等式に関する定数 σ_0 を導出するために必要な theta 関数の反転公式が得られる仕組みを，$n=2$ における $\Gamma_2 = SL(2,\mathbb{Z}[i])$ の例を題材に，手短に紹介しよう．記法と theta 関数の反転公式の明示式は，[7, Section 14.7] とそこで参照されている他の小節を確認されたい．この設定では，手順 (ハ) において固有関数に関する展開から，$\rho^{\Gamma_n\backslash G_n/K_n}$ は $L^2_{\mathrm{Cus}}(\Gamma_2\backslash G_2/K_2)$ の元に対応する成分および $L^2_{\mathrm{Eis}}(\Gamma_2\backslash G_2/K_2)$ の元に対応する成分に分かれる．ただし，$L^2_{\mathrm{Cus}}(\Gamma_2\backslash G_2/K_2)$ は Casimir 作用素の (cuspidal な) 固有関数 $\psi_j = \psi_j(gK_2)$ ($j \in \mathbb{N}$) からなる正規直交基底で張られる部分空間である．そして，$L^2_{\mathrm{Eis}}(\Gamma_2\backslash G_2/K_2)$ は $\Gamma_2\backslash G_2/K_2$ の非コンパクト性から生じる Eisenstein 級数 $E(s,gK_2)$ ($s\in\mathbb{C}$) で構成された連続な部分空間である．$t>0$, $g\in G_2$ に対し，対角成分上の $\rho^{\Gamma_2\backslash G_2/K_2}$ のスペクトルサイドは，

$$\begin{aligned}\rho^{\Gamma_2\backslash G_2/K_2}(t,gK_2,gK_2) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_j t}|\psi_j(gK_2)|^2 + c_0 + c_{\mathrm{Eis}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2(1+r^2)t}|E(1+ir,gK_2)|^2 dr \\ &=: K_{\mathrm{Cus}}(t,g) + c_0 + K_{\mathrm{Eis}}(t,g)\end{aligned}$$

と書ける．ただし，c_0 と c_{Eis} は定数とする．他方，対角成分上の $\rho^{\Gamma_2\backslash G_2/K_2}$ の幾何サイドでは，Γ_2 を cuspidal な元からなる集合 Γ_2^{Cus} と non-cuspidal な元全体 Γ_2^{NC} に分割し，$\sum_{\gamma\in\Gamma_2} = \sum_{\gamma\in\Gamma_2^{\mathrm{NC}}} + \sum_{\gamma\in\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}$ と書く．ただし，$\Gamma' \subset \Gamma_2$ を上三角行列全体の standard cuspidal 部分群とすると，$\Gamma_2^{\mathrm{Cus}} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_2}\gamma\Gamma'\gamma^{-1}$, $\Gamma_2^{\mathrm{NC}} = \Gamma_2 \setminus \Gamma_2^{\mathrm{Cus}}$ と書ける．$t>0$, $g\in G_2$ に対し，$K^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}(t,g) := \sum_{\gamma\in\Gamma_2^{\mathrm{NC}}} \rho^{G_2/K_2}(t,gK_2,\gamma gK_2)$, $K^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}(t,g) := \sum_{\gamma\in\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}} \rho^{G_2/K_2}(t,gK_2,\gamma gK_2)$ とおくと，

$$K^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}(t,g) + K^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}(t,g) = \rho^{\Gamma_2\backslash G_2/K_2}(t,gK_2,gK_2) = K_{\mathrm{Cus}}(t,g) + c_0 + K_{\mathrm{Eis}}(t,g). \tag{4}$$

手順 (ニ) に従い，(基本領域上で) 積分をするとき $K^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}$(の nonregular cuspidal 成分) および K_{Eis} にそれぞれ現れる発散項を相殺するように適切に正規化し，$\Gamma_2\backslash G_2$ 上で積分すると，等式 (4) から

$$e^{-2t}(4t)^{-\frac{1}{2}}\Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}(1/t) + \Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}(1/t) = \theta_{\mathrm{Cus}}(t) + 1 + \theta_{\mathrm{Eis}}(t)$$

を計算することができる．(4) の右辺の K_{Cus} と K_{Eis} にそれぞれ theta 級数

$$\theta_{\mathrm{Cus}}(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-\lambda_j t},$$

および theta 級数の連続なアナローグとみなせる theta 積分

$$\theta_{\mathrm{Eis}}(t) = \int_{\mathbb{R}} F(r)e^{-2(1+r^2)t}dr$$

が対応している．(4) の左辺の $K^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}$ と $K^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}$ それぞれの積分から得られる theta 級数 $\Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}$ と theta 積分 $\Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}$ は，$\mathrm{diag}[r,-r] := \log \mathrm{Pol}_{A^+}(g)$ で定まる変数 $r = r(g)$ の関数である $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_t(r)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}(1/t) &= e^{-2t}t^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{[\gamma]:\ \Gamma_2\text{-conjugacy class},\\ \gamma\in\Gamma_2^{\mathrm{NC}}}} a([\gamma])e^{-\frac{b([\gamma])}{8t}}, \\ \Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}(1/t) &= c_{\mathrm{Cus}}e^{-2t}t^{-\frac{3}{2}} + \int_0^\infty F_{\mathrm{Cus}}(r)\mathbf{f}_t(r)dr\end{aligned}$$

と書ける．ただし，θ_{Eis} と $\Theta^{\Gamma_2^{\mathrm{Cus}}}$ それぞれの被積分関数に含まれる F と F_{Cus} は明示的に決まる．

3.2 The systematic construction of zeta objects

小節 3.1 では，各 $n\geq 2$ で対称空間 G_n/K_n 上の熱核から zeta object を構成した．次に，$n\geq 2$ を動かし，zeta objects を ladder の上で系統的に構成することを考える．幾何的な ladder と呼ばれる埋め込みの列 $\cdots \hookrightarrow G_n/K_n \hookrightarrow G_{n+1}/K_{n+1} \hookrightarrow \cdots$ に zeta objects を対応させ，幾何的な ladder に並行

する zeta の ladder を得る．このとき，例えば対称空間 G_n/K_n の G_m/K_m $(m < n)$ を用いた完備化と zeta objects の完備化の関係を用いて，幾何的 ladder と zeta の ladder の間に辞書を作り，対称空間の幾何的構造がどの程度 zeta objects の数論的な性質に影響を与えるか記述することを目指す．加えて，$G_n(\mathbb{R}) := SL(n,\mathbb{R})$ に対しても幾何的な ladder と zeta の ladder を構成し $G_n = SL(n,\mathbb{C})$ の場合の先の ladder とそれぞれ対応づけることで，並行する 2 枚の "梯子" が得られるとされる ([6, Chapter XII] 参照)．これら 2 枚の "梯子" を用いて，系統的に zeta objects を分類し，代数幾何と微分幾何を巻き込み zeta objects の性質を考察することが期待される．さらに，zeta の ladder の "$n=1$" には Riemann zeta 関数 ζ が存在することを示唆している．

Jorgenson–Lang のプログラムを動機づける，熱核と zeta 関数の関数等式との間の観察として

- 実直線 $\mathbb{R}$ 上の ガウス核と Riemann zeta 関数 ζ の関数等式 (Example 3.2.1),
- 上半平面上の熱核と co-compact な離散部分群 $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ に関する Selberg zeta 関数 ζ_Γ の関数等式,

の間の対応がある．Jorgenson–Lang のプログラムでは，これら観察が幾何的な ladder の "$n=1''$ と $G_2(\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$ にそれぞれ位置していると考えられる．

Example 3.2.1 ($\mathbb{R}$ 上の $\rho_t^{\mathbb{R}}$ と Riemann zeta 関数 ζ) *ガウス核と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の熱核 $\rho_t^{\mathbb{R}}$ から Riemann zeta 関数 ζ を導出できることが知られている．Jorgenson–Lang のプログラムと比較するため，ζ の導出を 5 つの手順に分ける：*

- *$\mathbb{R}$ 上の熱核は，$\rho_t^{\mathbb{R}}(x) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}$ と書ける．*
- *$\Gamma = 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ に関して $\rho_t^{\mathbb{R}}$ を周期化し，$\rho^{\Gamma\backslash\mathbb{R}}(t,x,y) = (2\pi t)^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-y-2n\pi)^2/2t}$ を得る．$\rho^{\Gamma\backslash\mathbb{R}}$ は，$S^1 \simeq \Gamma\backslash\mathbb{R}$ 上の熱核 $\rho_t^{S^1}$ を用いて，$\rho^{\Gamma\backslash\mathbb{R}}(t,x,y) = \rho_t^{S^1}(x-y)$ と書ける．*
- *固有関数 $x \mapsto e^{inx}$ $(n\in\mathbb{Z})$ に関して $\rho_t^{S^1}$ を展開すると，Poisson の反転公式を得る：*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 t}{2}} e^{inx}.$$

- *Poisson の反転公式に $x=0$ を代入すると，Jacobi の theta 関数の反転公式 $(2\pi/t)^{1/2}\theta(1/t) = \theta(t)$ になる．*
- *Mellin 変換 $f \mapsto (s \mapsto \int_0^\infty f(t)t^{s-1}(dt/t))$ を適用すると，$\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ に対し，ζ の関数等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$ を得る．*

3.3 Our proposal

Jorgenson–Lang は，$G_2 = SL(2,\mathbb{C})$, $\Gamma_2 = SL(2,\mathbb{Z}[i])$ のときに Dedekind zeta 関数 $\zeta_{\mathbb{Q}[i]}$ と関連づけた計算例を与えている．そして，実部である $G_2(\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma_2(\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{Z})$ との対応に言及している．そして $n > 2$ の場合，手順 (ハ) と手順 (ニ) に関する $L^2(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ の (residual 部分の) スペクトル分解や (固有関数としての) Eisenstein 級数の性質についていくつかの予想 ([8, Conjecture 6.1–6.3] 参照) を立てている．$n=2$ と $n>2$ の違いが原因の一つである，$n>2$ の場合に G_n/K_n 上の熱核から zeta objects を導出するときに生じる難しさは，$L^2(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ のスペクトル分解に現れる residual 部分 $L^2_{\mathrm{Res}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ の解析が格段に複雑になるところにある ([8, Section 4.6–4.7] 参照)．ただし，$\Gamma_n\backslash G_n/K_n$ 上の Casimir 作用素の離散スペクトルの空間を $L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ と書いたとき，$L^2_{\mathrm{Res}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n) \subset L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ は $L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ の cuspidal 部分空間の直交補空間である．

$L^2_{\mathrm{Res}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ に関して Jorgenson–Lang のプログラムが抱える困難に対し，本稿で提案する Δ_{G_n} の熱核 $\rho_t^{G_n}$ を用いる手法は，手順 (イ') から手順 (ホ') である．詳細は，準備中の [10] に譲る．

(イ'): G_n 上の Laplace–Beltrami 作用素 Δ_{G_n} に対する熱核 $\rho_t^{G_n}$ を求積する．

(ロ'): $\rho_t^{G_n}$ を Γ_n に関して周期化し，$\rho^{\Gamma_n\backslash G_n} = \rho^{\Gamma_n\backslash G_n}(t,\Gamma_n g,\Gamma_n h)$ を得る．

(ハ'): $\rho^{\Gamma_n\backslash G_n}$ を，Jacobi の theta 関数の Poisson の反転公式と第一種 generalized associated Legendre 関数の積分表示に関する公式 ([10, Proposition 4.1.1 and Corollary 4.1.3] 参照) を繰り返し用いて展開する．

(ニ'): (ハ') の両辺に $g = h = e$ を代入する．

(ホ'): Gauss 変換 $f \mapsto (z \mapsto 2z\int_0^\infty e^{-z^2 t} f(t)dt)$ を適用する．

本稿の提案で重要なアイディアは，両側 G_n-不変な Casimir 作用素を左 G_n-, 右 K_n-不変な Laplace–Beltrami 作用素 Δ_{G_n} に取り替えたアナロジーを考え，Jorgenson–Lang のプログラムで障害となる例えば Casimir 作用素スペクトル分解の難しさを避け，代数や組合せ論を用いて Jorgenson–Lang の展望に従い類似のプログラムを実行することである．5 つの手順 (イ') から手順 (ホ') を適用する Laplace–Beltrami 作用素 Δ_{G_n} に対する熱核 $\rho_t^{G_n}$ は，Jorgenson–Lang のプログラムで考える Casimir 作用素に対する熱核と比較すると，被積分関数に S^1 上の熱核である Jacobi の theta 関数がかかっているという特徴を持つ．Jacobi の theta 関数の有無という違いに着目し，Jorgenson–Lang のプログラムで用いられる手順 (ハ) に対して，手順 (ハ') では Jacobi の theta 関数の反転公式を使う代数的な熱核 $\rho_t^{G_n}$ の展開をする[4)]．また，手順 (ハ) のスペクトル分解における residual 部分 $L^2_{\mathrm{Res}}(\Gamma_n\backslash G_n/K_n)$ に関する複雑さが，手順 (ハ') では熱核 $\rho^{\Gamma_n\backslash G_n}$ の積分表示の被積分関数に含まれる Jacobi の theta 関数の偏微分およびある緩増加超関数に対応し現れることを予感している．

最後に，この小節で提案した類似のプログラムに仮称をつける．熱核から関数等式を導出するステップで，手順 (イ) から手順 (ニ) を手順 (イ') から手順 (ニ') で代替した Jorgenson–Lang のプログラムを，「**“Riemann 型” Jorgenson–Lang のプログラム**」と僭越ながら呼ぶことにしよう．Example 3.2.1 に関し，手順 (ハ') と手順 (ニ') で用いる道具がそれぞれ Poisson の反転公式と Jacobi の theta 関数の反転公式を基にするため，安直だがこの仮称を使う．

4 Main result

この節では，主結果である $G = SL(2)$ 上の熱核 ρ_t^G を与える．$f\colon\ G \times K \to \mathbb{C}$ に対し，

$$f([g,k]) := f(\mathrm{Pol}_K(g)\mathrm{Pol}_{A^+}(g)(\mathrm{Pol}_K(g))^{-1}, k(\mathrm{Iw}_K(g))^{-1})$$

は well-defined な $G \times K/\mathrm{diag}\, K$ 上の関数である．特に，$f \in L^2(G)$ と $h \in L^2(K)$ が与えられたとき，

$$(f \times h)([g,k]) := f(\mathrm{Pol}_K(g)\mathrm{Pol}_{A^+}(g)(\mathrm{Pol}_K(g))^{-1})h(k(\mathrm{Iw}_K(g))^{-1})$$

と書く．各 $g \in G$ に対し，$(\mathrm{Pol}_K(g)\mathrm{Pol}_{A^+}(g)(\mathrm{Pol}_K(g))^{-1})^2 = g^t g$ が成り立つため，記号を簡略化し $\sqrt{g^t g} := \mathrm{Pol}_K(g)\mathrm{Pol}_{A^+}(g)(\mathrm{Pol}_K(g))^{-1}$ と書く．球関数と関連し，

$$\Psi_t^G(g) := \frac{1}{|W|}\int_{i\mathfrak{a}^*} e^{(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)t} e^{(\lambda+\rho)(\log \mathrm{Iw}_A(g))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

を定める．Fubini の定理を使うと，$g \in G$ に対し

$$\int_K \Psi_t^G(kg)dk = \int_{i\mathfrak{a}^*} e^{(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)t} \varphi_\lambda(g)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

が成り立つ．球関数の反転公式 (3) より，$g \mapsto \int_K \Psi_t^G(kg)dk$ は Casimir 作用素 C_G に対する熱核の K に関する積分表示である．以上の記号を用いて，主結果 Theorem 4.0.1 を述べよう．

<u>Theorem</u> 4.0.1 $t > 0$ とする．このとき，$g \in G$ に対し，

$$\rho_t^G(g) = \int_K (\Psi_t^G \times \rho_t^K)([\sqrt{kg^t(kg)}, (Iw_K(g))^{-1}])dk. \tag{5}$$

<u>Remark</u> 4.0.2 K 上の熱核 ρ_t^K の明示式は，$K = SO(2)$ と $K = SU(2)$ それぞれで *Jacobi* の *theta* 関数 ϑ を用いて

$$\rho_t^{SO(2)}(R(\theta)) = \vartheta\left(-\frac{\theta}{2\pi}, \frac{t}{2\pi}i\right),$$
$$\rho_t^{SU(2)}(k) = -\frac{e^{\frac{t}{8}}}{4\sin\pi\theta(k)}\partial_z\vartheta\left(-\frac{\theta(k)}{2\pi}, \frac{t}{8\pi}i\right)$$

である．記号の詳細をここでは書かず，5 節で後述する．

[4)] 手順 (ハ') の展開は，Laplace–Beltrami 作用素のスペクトル分解よりも (真に) 粗い分解をしている．

Theorem 4.0.1 の主張は，対角作用の剰余空間 $G \times K/\mathrm{diag}\, K$ 上の関数の積分表示として書いたが，$G \approx G \times K/\mathrm{diag}\, K$, $g \mapsto [g, e]$ を用いて G 上の関数を用いて書き直すと，

$$\rho_t^G(g) = \int_K \Psi_t^G \left(\sqrt{\sqrt{kg^t(kg)}\ {}^t(\sqrt{kg^t(kg)})} \right) \rho_t^K \left((\mathrm{Iw}_K(g))^{-1} (\mathrm{Iw}_K(\sqrt{kg^t(kg)}))^{-1} \right) dk.$$

Casimir 作用素 C_G に対する，Jorgenson–Lang のプログラムの手順 (イ) で用いられていた熱核を思い出そう．後述する Lemma 5.0.1 より，先の Ψ_t^G を用いて Casimir 作用素 C_G に対する熱核を

$$(t, g) \mapsto \int_K \Psi_t^G \left(\sqrt{\sqrt{kg^t(kg)}\ {}^t(\sqrt{kg^t(kg)})} \right) dk \tag{6}$$

と冗長に書き表すことができる．ただし，球関数の両側 K-不変性から (6) を $(t, g) \mapsto \int_K \Psi_t^G(kg) dk$ としてより簡潔に書ける．よって，式 (5) と式 (6) の違いは，ファイバー K 上の熱核 ρ_t^K の寄与であると言える．そのため，Theorem 4.0.1 の熱核 $\rho_t^{SL(2)}$ の明示式は，差分として現れる熱核 ρ_t^K の性質を決める Jacobi の theta 関数 ϑ もしくはその級数展開に出てくる Thebycheff 多項式を用いた，小節 3.3 の “Riemann 型” Jorgenson–Lang のプログラムの構想を引き起こす．

Theorem 4.0.1 の応用として，“Riemann 型” Jorgenson–Lang のプログラムの文脈で，熱核 $\rho_t^{SL(n,\mathbb{R})}$ と $\rho_t^{SL(n,\mathbb{C})}$ それぞれから出力される zeta objects の性質を結びつけることが期待される．$n = 2$ の場合に，変数 $t > 0$ に関し $\rho_t^{SO(2)}$ と $\rho_t^{SU(2)}$ のガウス変換を，特殊関数の観点から算術的 cofinite な離散部分群 $\Gamma_2 \subset SL(2, \mathbb{C})$ が与える影響を理解し，記述することが今後の課題である．ただし，熱核 $\rho_t^{SL(2,\mathbb{R})}$ および $\rho_t^{SL(2,\mathbb{C})}$ 自体は，オリジナルの Casimir 作用素に対する熱核 (6) よりも ρ_t^K がかかっている分だけ難しい表示を持つ．熱核の表示の違いに応じて，手順 (イ’) から手順 (ホ’) を経て出力される zeta objects も，Jorgenson–Lang のプログラムで議論されている zeta objects より複雑な表示を持つことに注意する．“Riemann 型” Jorgenson–Lang のプログラムのもとで $SL(n, \mathbb{C})$ およびその実形 $SL(n, \mathbb{R})$ それぞれに対応する zeta objects の性質を関係づける [10] のアプローチは，[6, p. 409–410] で問いとして提示されている方針とは異なり，A 型のルート系および各 Γ_n の共役類の代表元 $\gamma \in \Gamma_n$ を構成する $SL(2)$ の双曲型，楕円型，放物型の元の組合せを主に用いることを計画しており代数的，組合せ論的である．

4.1 The case $G = SL(2, \mathbb{R})$

この小節では，$G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき，Theorem 4.0.1 の式 (5) で変数変換を行うことで，明示式の一つである Proposition 4.1.1 を導出する．$\rho_t^G = \rho_t^{SL(2,\mathbb{R})}$ の明示式は，例えば $L^2(G, dg)$ と G のユニタリ双対 $\hat{G}$ 上の Plancherel 測度に関する L^2 空間の間の一般化非可換 Fourier 変換を用いて，すでに計算されている ([1, Proposition 43] 参照)．[9] では，先行研究で得られているいくつかの ρ_t^G の明示式を，Lebesgue の積分定理や線積分を用いて，直接の計算から互いに等しいことを示している．ただし，[2] の結果である，熱核の存在と一意性からこれら明示式が互いに等しいという主張が直ちに従う事に注意する．したがって，明示式の一つである Proposition 4.1.1 の主張と式 (5) が等しいことを示せば，式 (5) が他の明示式と等しいことが従う．

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in K = SO(2)$$

とおく．$K = \{R(\theta)\ ;\ \theta \in (-\pi, \pi]\}$ が成り立つ．$r > 0$ を固定したとき，

$$e^x + \sqrt{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cosh r - \cosh x} = \cosh r + e^{i\theta} \sinh r \ (|x| < r) \tag{7}$$

を用いて独立変数 θ を x に置換する．直接の計算から，

$$e^x - \sqrt{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cosh r - \cosh x} = \cosh r + e^{-i\theta} \sinh r,\ e^x = \cosh r + \cos\theta \sinh r,$$
$$e^{\frac{x}{2}} e^{\pm i \mathrm{Arccos} \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{r}{2}}} = \cosh \frac{r}{2} + e^{\pm i\theta} \sinh \frac{r}{2}$$

が成り立つ．このとき，各 $g \in G$ に対し $\mathrm{diag}[r, -r] := \log \mathrm{Pol}_{A^+}(g)$, $R(\theta_g/2) := \mathrm{Iw}_K(g)$ として $r = r(g) > 0$ と $\theta_g \in (-2\pi, 2\pi]$ を定め，変数変換 (7) を行いいくつかの線積分をすると Proposition 4.1.1 の明示式を導出することができる．

Proposition 4.1.1 ([9, Proposition 4.2.1])

$$\rho_t^{SL(2,\mathbb{R})}(g) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t}{8}}}{(2\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_r^\infty \frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2t}}}{\sqrt{\cosh\xi - \cosh r}} \times \frac{1}{2}\left(\vartheta\left(-\frac{\theta_g}{4\pi} - \frac{i}{4\pi}\mathrm{Arccosh}\left(\frac{\cosh\frac{\xi}{2}}{\cosh\frac{r}{2}}\right), \frac{t}{4\pi}i\right)\right.$$
$$\left. + \vartheta\left(-\frac{\theta_g}{4\pi} + \frac{i}{4\pi}\mathrm{Arccosh}\left(\frac{\cosh\frac{\xi}{2}}{\cosh\frac{r}{2}}\right), \frac{t}{4\pi}i\right)\right) d\xi.$$

5 Sketch of proof

この節では，$G = SL(2)$ 上の熱核 ρ_t^G の特殊関数を用いた明示式を与える Theorem 4.0.1 の証明のスケッチを述べる．証明で用いる主要なアイディアは，次である：

- 対角作用の剰余空間を使い，G を等質主 K-束 $G \times K/\mathrm{diag}\,K \xrightarrow{K} G/K$ とみなす．
- 不変包絡代数の商 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{k})/\langle 1 \otimes Z + Z \otimes 1\rangle_{Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ の元として，左 G-, 右 K-不変な Laplace–Beltrami 作用素 Δ_G の直像を左 $G\times K$-, 右 K-不変な $G \times K/\mathrm{diag}\,K$ 上の微分作用素 $\tilde{C}_{G\times K}$ に書き換える．

ただし，$G \times K/\mathrm{diag}\,K$ 上の $\tilde{C}_{G\times K}$ は，Lie 群 $G \times K$ 上の Casimir 作用素 $C_{G\times K}$ の $G \times K/\mathrm{diag}\,K$ への直像とする．$C_{G\times K}$ は，$f = f(g,k) \in L^2(G\times K, dg\otimes dk)$ に対し，f の第二成分の変数 k を固定すると G 上の Casimir 作用素 C_G として，第一成分の変数 g を固定すると $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式 B の $\mathfrak{k}$ への制限に関する K 上の Casimir 作用素 C_K としてそれぞれ作用することに注意する．Theorem 4.0.1 の証明は 3 つの段階からなる．

Step 1: 微分同相 ψ : $G \ni g \mapsto [g,e] \in G\times K/\mathrm{diag}\,K$ を用いて，Δ_G : $L^2(G,dg) \to L^2(G,dg)$ の $G \times K/\mathrm{diag}\,K$ への直像である左 $G\times\{e\}$-, 右 K 不変作用素 $\tilde{\Delta}_G$ を得る．$\tilde{\Delta}_G$ を，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{k})/\langle 1\otimes Z + Z\otimes 1\rangle_{Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ の元として同一視することができる，左 $G\times K$-, 右 K-不変な微分作用素 $\tilde{C}_{G\times K}$ に取り替える．Δ_G に対する熱核 ρ_t^G を求積する問題を，$\tilde{C}_{G\times K}$ の熱核を求積する問題に帰着する．

Step 2: 熱核 ρ_t^G の存在の一意性から，Step 1 の微分同相 ψ を経由し Definition 2.1.5 の条件 (1) と (2) を満たす $G\times K/\mathrm{diag}\,K$ 上の関数を構成すれば良い．具体的には，K 上の熱核と Lemma 5.0.1 を用いて，$G\times K$ 上の $C_{G\times K}$ に対する熱核 $\rho_t^{G\times K}$ を求積し，射影 $G\times K \to G\times K/\mathrm{diag}\,K$ を用いて $\tilde{C}_{G\times K}$ に対する熱核を構成する． ただし，$C_{G\times K}$ に対する熱核 $\rho_t^{G\times K}$ とは，K 上の熱核 ρ_t^K と G/K 上の熱核 $(gK \mapsto \rho^{G\times K}(t, K, gK))$ の積のことをいう．Casimir 作用素 C_K は K 上の Laplace–Beltrami 作用素 Δ_K と一致し，Lemma 5.0.1 より $\partial_t - C_G$ に関する微分方程式の基本解がリーマン対称空間 G/K 上の熱核 $\rho^{G/K}$ と同一視できることに注意せよ．

Step 3: $[g,k] \in G\times K/\mathrm{diag}\,K$ の代表元を取り，$(G/K)\times K$ 上の関数としての積分表示を計算する．Fubini の定理を用いて，$i\mathfrak{a}^*$ 上の積分と球関数 φ_λ に含まれる K 上の積分を交換し，積分表示から等式 (5) を得る．

最後に，各手順について補足のコメントを加える．Step 1 について．微分作用素 Δ_G, $\tilde{\Delta}_G$ と $\tilde{C}_{G\times K}$ の間の関係は可換図式 (8) で表される．Δ_G, $\tilde{\Delta}_G$ と $\tilde{C}_{G\times K}$ はそれぞれある定義域上で自己共役作用素であることに注意する．$\tilde{\Delta}_G$ と $\tilde{C}_{G\times K}$ について，普遍包絡代数の商 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{k})/\langle 1\otimes Z + Z\otimes 1\rangle_{Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ の元としてこれらは同じ同値類であるが，微分作用素として作用 $G\times K \curvearrowright G\times K/\mathrm{diag}\,K \curvearrowleft K$ を考慮すると $\tilde{C}_{G\times K}$ は $\tilde{\Delta}_G$ よりも高い対称性を持つ．

$$\begin{tikzcd}
L^2(G,dg) \arrow[d, "\Delta_G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^2(G\times K/\mathrm{diag}\,K) \arrow[l, "\psi^*"', "\sim"] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tilde{\Delta}_G"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^2(G\times K/\mathrm{diag}\,K) \arrow[d, "\tilde{C}_{G\times K}"] \\
L^2(G,dg) & L^2(G\times K/\mathrm{diag}\,K) \arrow[l, "\sim"', "\psi^*"] \arrow[r, equal] & L^2(G\times K/\mathrm{diag}\,K)
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Step 2 について．登場する熱核の明示式を与える．$\partial_t - C_G$ に関する微分方程式の基本解を g_t^G と書く．Lemma 5.0.1 より，g_t^G は球関数 φ_λ を用いて具体的に書ける．

Lemma 5.0.1 ([3, Proposition 3.1] 参照) $t > 0$ とする．このとき，$x \in G$ に対し

$$g_t^G(x) = \frac{1}{|W|}\int_{i\mathfrak{a}^*} e^{(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)t}\varphi_\lambda(x)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda.$$

g_t^G は $\lambda \mapsto e^{(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)t}$ の逆変換である．φ_λ は両側 K-不変な関数なので，g_t^G は G/K 上の関数にのびる．このとき，$\rho^{G/K}(t, xK, yK) = g_t^G(y^{-1}xK)$ と書ける．

$C_K = \Delta_K$ に対する熱核 ρ_t^K は，$G = SL(2,\mathbb{R})$ と $G = SL(2,\mathbb{C})$ それぞれで Jacobi の theta 関数 ϑ を用いて書くことができる．ただし，$z \in \mathbb{C}$ と $\tau \in \{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ \Im\tau > 0\}$ に対し $\vartheta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2n\pi i z}$ とする．$G = SL(2,\mathbb{R})$ のとき，4.1 節の記号を用いて $K = SO(2) = \{R(\theta)\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\}$ と書ける．$SO(2) \simeq S^1$ なので，Example 3.2.1 に書かれている熱核 $\rho_t^{S^1}$ の ϑ を用いた表示を使うと，

$$\rho_t^{SO(2)}(R(\theta)) = \vartheta\left(-\frac{\theta}{2\pi}, \frac{t}{2\pi}i\right).$$

$G = SL(2,\mathbb{C})$ のとき，$K = SU(2)$ である．$SU(2)$ の極大トーラスとして $T = \{\mathrm{diag}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1$ を取れる．このとき，各 $k \in SU(2)$ に対し $\mathrm{diag}[e^{i\theta(k)}, e^{-i\theta(k)}] \in T$ が定まる．この設定のもと，$SU(2)$ 上の熱核 $\rho_t^{SU(2)}$ は式 (9) として書ける：

$$\rho_t^{SU(2)}(k) = -\frac{e^{\frac{t}{8}}}{4\sin\pi\theta(k)}\partial_z\vartheta\left(-\frac{\theta(k)}{2\pi}, \frac{t}{8\pi}i\right). \tag{9}$$

Step 3 について．$\tilde{C}_{G\times K}$ の熱核の積分表示は，

$$\begin{aligned}[g,k'] \mapsto & g_t^G(\sqrt{g^t g})\rho_t^K(k'(\mathrm{Iw}_K(g))^{-1}) = \int_{i\mathfrak{a}^*}\int_K (\psi_{t,\lambda}^G \times \rho_t^K)([\sqrt{kg^t(kg)}, k'(\mathrm{Iw}_K(g))^{-1}])dkd\lambda \\ &= \int_{i\mathfrak{a}^*}\int_K \psi_{t,\lambda}^G\left(\sqrt{\sqrt{kg^t(kg)}\ {}^t(\sqrt{kg^t(kg)})}\right)\rho_t^K\left(k'(\mathrm{Iw}_K(g))^{-1}(\mathrm{Iw}_K(\sqrt{kg^t(kg)}))^{-1}\right)dkd\lambda\end{aligned}$$

である．ただし，記号は $\sqrt{g^t g} = \mathrm{Pol}_K(g)\mathrm{Pol}_{A^+}(g)(\mathrm{Pol}_K(g))^{-1}$,

$$\psi_{t,\lambda}^G(g) = |W|^{-1}e^{(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)t}e^{(\lambda+\rho)(\log \mathrm{Iw}_A(g))}|c(\lambda)|^{-2},\ \Psi_t^G(g) = \int_{i\mathfrak{a}^*}\psi_{t,\lambda}^G(g)d\lambda.$$

参考文献

[1] A. Agrachev, U. Boscain, J.-P. Gauthier, and F. Rossi. The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups. J. Funct. Anal., 256(8):2621–2655, 2009. doi:10.1016/j.jfa.2009.01.006.

[2] J. Dodziuk. Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds. Indiana Univ. Math. J., 32(5):703–716, 1983. doi:10.1512/ iumj.1983.32.32046.

[3] R. Gangolli. Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces. Acta Math., 121:151–192, 1968. doi:10.1007/BF02391912.

[4] A. Grigor'yan. Heat kernel and analysis on manifolds, volume 47 of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009. doi:10.1090/amsip/047.

[5] B. C. Hall. The Segal–Bargmann "coherent state" transform for compact Lie groups. J. Funct. Anal., 122(1):103–151, 1994. doi:10.1006/jfan.1994.1064.

[6] J. Jorgenson and S. Lang. Spherical inversion on $SL_n(\mathbb{R})$. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001. doi:10.1007/ 978-1-4684-9302-3.

[7] J. Jorgenson and S. Lang. The heat kernel and theta inversion on $SL_2(\mathbb{C})$. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/ 978-0-387-38032-2.

[8] J. Jorgenson and S. Lang. Heat Eisenstein series on $SL_n(\mathbb{C})$. Mem. Amer. Math. Soc., 201(946):viii+127, 2009. doi:10.1090/memo/0946.

[9] M. Shimada. A weighted hyperbolic Laplacians approach to the heat kernel and an associated zeta function for the Laplace–Beltrami operator on $SL(2,\mathbb{R})$. (in preparation)

[10] M. Shimada. The heat kernel on $SL(n)$ and Riemann-type Jorgenson–Lang's program. (in preparation)