Young の畳み込み不等式の最適定数に関する局所コンパクト群とその閉部分群の関係

理化学研究所・数理創造プログラム (iTHEMS)　里見 貴志 *
Takashi Satomi
Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences Program, RIKEN

概要

$1/p_1 + 1/p_2 = 1 + 1/p$ となるような $1 \le p_1, p_2, p \le \infty$ に対し，局所コンパクト群 G 上の Young の畳み込み不等式の最適定数 $Y(p_1, p_2; G)$ を

$$Y(p_1, p_2; G) \coloneqq \sup\{\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p_1'})\|_p \mid \phi_1, \phi_2 \colon G \to \mathbb{C},\ \|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1\}$$

で定義する（p' は p の Hölder 共役，$\|\cdot\|_p$ は左 Haar 測度に関する L^p ノルム，$\Delta \colon G \to \mathbb{R}_{>0}$ はモジュラー関数）．このとき，本稿の主結果は任意の閉部分群 $H \subset G$ に対し $Y(p_1, p_2; G) \le Y(p_1, p_2; H)$ となることである．この不等式より，連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie 群 G に対し，$r(G)$ を G の極大コンパクト群の次元とすると $Y(p_1, p_2; G) \le Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)}$ となることが従う．

1　初めに

本稿では著者の以前の論文 [Sat24] の概要をまとめる．局所コンパクト群 G 上の Young の畳み込み不等式の最適定数（両辺の最適な比）を $Y(p_1, p_2; G)$ とすると，任意の閉部分群 $H \subset G$ に対し $Y(p_1, p_2; G) \le Y(p_1, p_2; H)$ となることが本稿の主結果である（定理 1.2）．この系として，Beckner[Bec75]，Fournier[Fou77]，Klein–Russo[KR78]，Nielsen[Nie94] などによる $Y(p_1, p_2; G)$ の上からの評価を連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie

* E メールアドレス：takashi.satomi@riken.jp

群 G 上に拡張した．すなわち，G の極大コンパクト群の次元を $r(G)$ とすると，$Y(p_1,p_2;G)\le Y(p_1,p_2;\mathbb{R})^{\dim G - r(G)}$ となる（系 1.3）．

$1\le p\le\infty$ の Hölder 共役 $1\le p'\le\infty$ を

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

で定める．局所コンパクト群 G 上の左 Haar 測度を dg に関する L^p ノルムを $\|\cdot\|_p$ と書き，可測関数 $\phi_1,\phi_2\colon G\to\mathbb{C}$ の畳み込み $\phi_1*\phi_2$ を

$$\phi_1*\phi_2(g') \coloneqq \int_G \phi_1(g)\phi_2(g^{-1}g')dg$$

で定める．また，ある連続準同型 $\Delta\colon G\to\mathbb{R}_{>0}$ がただ一つ存在し

$$\int_G \phi(g^{-1})dg = \int_G \frac{\phi(g)}{\Delta(g)}dg \tag{1.1}$$

となる．この Δ を G のモジュラー関数という．このとき，Young の畳み込み不等式の最適定数 $Y(p_1,p_2;G)$ を次のように定める．

定義 1.1 ([KR78, Section 2] [Nie94])**.** 局所コンパクト群 G と

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\ge 1 \tag{1.2}$$

をみたすような $1\le p_1,p_2\le\infty$ に対し，最適定数 $Y(p_1,p_2;G)$ を

$$\begin{gathered} Y(p_1,p_2;G) \coloneqq \sup\{\|\phi_1*(\phi_2\Delta^{1/p_1'})\|_p \mid \phi_1,\phi_2\colon G\to\mathbb{C},\ \|\phi_1\|_{p_1}=\|\phi_2\|_{p_2}=1\}, \\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{p} \end{gathered} \tag{1.3}$$

で定める．

本稿の主結果は次の定理である．

定理 1.2. $1\le p_1,p_2\le\infty$ が式 (1.2) をみたすとする．このとき，任意の局所コンパクト群 G の任意の閉部分群 $H\subset G$ に対し $Y(p_1,p_2;G)\le Y(p_1,p_2;H)$ となる．

H が G の正規部分群のとき，定理 1.2 は本質的に知られている．すなわち，Cowling–Martini–Müller–Parcet は

$$Y(p_1,p_2;G)\le Y(p_1,p_2;H)Y(p_1,p_2;G/H) \tag{1.4}$$

となることを示した [Cow+19, Proposition 2.2]．古典的な Young の畳み込み不等式（例 2.1 (1)）より $Y(p_1, p_2; G/H) \leq 1$ なので，式 (1.4) から定理 1.2 が従う．式 (1.4) は G が可換のときに本質的に Beckner が [Bec75, Section IV.5]（事実 2.3 も参照），G が H と G/H の半直積のときに Klein–Russo が証明している [KR78, Lemma 2.4].

定理 1.2 はいくつかの面白い例を含んでいる．例えば，定理 1.2 内の H に自明群を適用すると古典的な Young の畳み込み不等式が示せる（例 2.1 (1)）．また，定理 1.2 より G の単位元成分 $G_0 \subset G$ が開集合（例えば G が Lie 群）ならば $Y(p_1, p_2; G) = Y(p_1, p_2; G_0)$ となる（例 2.1 (2)）．従って，Lie 群 G に対し $Y(p_1, p_2; G)$ の値を決定するには，単位元成分のみ考えればよい．また，定理 1.2 から開かつコンパクトな部分群を持たないような局所コンパクト群 G に対し $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$ となることが従い，この結果は Fournier，Nielsen や著者の以前の結果の改良・拡張にあたる（系 2.2）.

定理 1.2 の系として，連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie 群 G に対し，極大コンパクト群の次元 $r(G)$ を用いて $Y(p_1, p_2; G)$ を上から評価できる．すなわち，群 G の元の個数を $\#G$ と書き，G の中心を $Z(G)$ と書くと，次の系が成り立つ.

系 1.3. 連結 Lie 群 G の根基（最大の連結可解閉正規部分群）を $R \lhd G$ とし，G の極大コンパクト群の次元を $r(G)$ とする．このとき，$\#Z(G/R) < \infty$ ならば，式 (1.2) をみたすような任意の $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ に対し

$$Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)} \tag{1.5}$$

となる.

$Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$ の値は Beckner により明示的に与えられている（事実 2.3）ので，系 1.3 は $Y(p_1, p_2; G)$ の明示的な上からの評価を与えている．系 1.3 はいくつかの G の場合にはすでに知られていた（表 2.2）が，著者の知る限り

$$Y(p_1, p_2; SL_2(\mathbb{R})) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^2 \tag{1.6}$$

は新しい結果である．また，連結コンパクト Lie 群（系 2.2）や連結冪零 Lie 群（事実 2.5）などのいくつかの連結 Lie 群に対し式 (1.5) の等号が成立することが知られている．系 1.3 の証明には Jing–Tran–Zhang による Brunn–Minkowski の不等式の Lie 群への一般化 [JTZ23, Theorem 1.1] と似た議論を用いる [Sat24, Corollary 1.3].

ここで，本稿の構成を説明する．2 節では，定理 1.2 や系 1.3 と知られている結果を比較する．3 節では，定理 1.2 の証明の概要を説明する．

2　最適定数に関する知られている結果との比較

2.1　定理 1.2 と知られている結果の比較

この節では，定理 1.2 と知られている結果の関連を見る．まず，定理 1.2 のいくつかの例を見る．

例 2.1.　(1)単位元 $e \in G$ のみからなる自明群 $\{e\} \subset G$ は G の閉部分群なので，定理 1.2 から $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \{e\})$ が従う．定義より $Y(p_1, p_2; \{e\}) = 1$ なので，古典的な Young の畳み込み不等式

$$Y(p_1, p_2; G) \leq 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ．式 (2.1) は少なくとも次の 2 つの証明が知られている．

(i)Riesz–Thorin の定理を用いて $p_1 = 1, p_2'$ の場合に帰着する方法.

(ii)Hölder の不等式を繰り返し用いる直接的な方法.

それぞれの証明は表 2.1 の文献で述べられている．Terp は G がユニモジュラーでない場合も (ii) の手法で式 (2.1) が証明できることを述べているが，証明は書いていない．Terp は式 (2.1) を用いて，Hausdorff–Young の不等式を一般の局所コンパクト群上へ拡張した [Ter17, Theorem 5.2]．3 節内の定理 1.2 の証明は (ii) の手法の拡張とみなせる．

表 2.1　式 (2.1) の証明が述べられている文献

	G：ユニモジュラー	G：一般
(i)	Weil [Wei40]	Klein–Russo [KR78, Lemma 2.1]
(ii)	Hewitt–Ross [HR79, Theorem 20.18]	(Terp [Ter17, Lemma 1.1])

(2)G の単位元成分を $G_0 \subset G$ とすると，定理 1.2 より $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; G_0)$ となる．G_0 が開集合（例えば G が Lie 群）ならば G_0 の Haar 測度と G の Haar

測度は一致するので，$Y(p_1,p_2;G) \geq Y(p_1,p_2;G_0)$ となる．従って，G_0 が開集合ならば $Y(p_1,p_2;G) = Y(p_1,p_2;G_0)$ となる．

定理 1.2 を用いると，$Y(p_1,p_2;G) \leq Y(p_1,p_2;\mathbb{R})$ となるための必要十分条件が分かる．すなわち，次の系が成り立つ．

系 2.2. 不等式

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \tag{2.2}$$

をみたすような $1 < p_1, p_2 < \infty$ に対し，局所コンパクト群 G に関する次の条件 (1)-(8) がすべて同値となる．

(1)G は開かつコンパクトな部分群を持たない．

(2)G の単位元成分 $G_0 \subset G$ はコンパクトでない．

(3)G は位相群として $\mathbb{R}$ と同型な閉部分群を持つ．

(4)G_0 は位相群として $\mathbb{R}$ と同型な閉部分群を持つ．

(5)$Y(p_1,p_2;G) \leq Y(p_1,p_2;\mathbb{R})$ となる．

(6)$Y(p_1,p_2;G_0) \leq Y(p_1,p_2;\mathbb{R})$ となる．

(7)$Y(p_1,p_2;G) \neq 1$ となる．

(8)$Y(p_1,p_2;G_0) \neq 1$ となる．

G がユニモジュラーのときは，(1) $\iff$ (7) は Fournier[Fou77, Theorem 1 and Theorem 3] によって証明され，さらに筆者が以前の論文で本質的に (1) $\iff$ (2) $\iff$ (5) $\iff$ (6) $\iff$ (7) $\iff$ (8) を示した [Sat23, Corollary 1.3 and Remark 2.2].

G はユニモジュラーとは限らないとき，(3) $\iff$ (4) は $\mathbb{R}$ の連結性から従う．(2) $\implies$ (4) は Iwasawa の結果 [Iwa49, Theorem 13] と Gleason–Yamabe の定理 [Gle51] [Yam53, Theorem 5'] から従う．(1) $\iff$ (7) は Nielsen が証明した [Nie94, Theorem 1]．(1) $\iff$ (2) は Hewitt–Ross の結果 [HR79] を用いて筆者が以前の論文で示した [Sat22, Remark 2.4 (3)]．(4) $\implies$ (6) $\implies$ (5) は定理 1.2 から従う．(8) $\implies$ (7) は定理 1.2 と例 2.1 (1) から従う．(5) $\implies$ (7) と (6) $\implies$ (8) は $Y(p_1,p_2;\mathbb{R}) < 1$ に帰着される．Beckner は $Y(p_1,p_2;\mathbb{R}^n)$ の値を明示的に与えているので，本質的に $Y(p_1,p_2;\mathbb{R}) < 1$ を証明している．すなわち，次の事実が成り立つ．

事実 2.3 (Beckner [Bec75, Theorem 3])**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と式 (1.2) をみたすような任

意の $1 \le p_1, p_2 \le \infty$ に対し，$1 \le p \le \infty$ を式 (1.3) で定めると

$$Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n) = \left(\frac{B(p_1)B(p_2)}{B(p)}\right)^{n/2}, \qquad B(p) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} & \text{if } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{if } p = 1, \infty \end{cases}$$

となる．

注意 2.4. 事実 2.3（やその拡張である Brascamp–Lieb の不等式 [BL76, Theorem 1]）は様々な証明が知られている．

(1)Beckner は Minkowski の積分不等式を用いて事実 2.3 を関数方程式

$$\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) = \nu_1(x_1 + x_2)\nu_2(x_1 - x_2) \tag{2.3}$$

の可積分な解を求める問題に帰着した．Beckner は Riesz–Sobolev の再配分不等式を用いて回転不変な極値関数の存在を示し，式 (2.3) の解で回転不変なものが Gauss 関数の組のみとなることを使って事実 2.3 を証明した．Lieb は関数が回転不変とは限らない場合も式 (2.3) の解は Gauss 関数のみとなること（Darmois–Skitovich の定理 [Dar53] [Ski53]）を暗に用いて Brascamp–Lieb の不等式を証明した [Lie90, Theorem 6.2].

(2)Brascamp–Lieb は $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n) = Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^n$ を示し，$n \to \infty$ のときの $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n)$ の上界の振る舞いを評価することで事実 2.3 を証明した [BL76, Section 2.5]．さらに，Brascamp–Lieb は同様の議論を用いて事実 2.3 を Brascamp–Lieb の不等式に拡張した．

(3)Barthe は Henstock–Macbeath による変数変換 [HM53, Section 5] と重み付き相加相乗平均の不等式を使ったより直接的な証明を与えた [Bar98b, Theorem 1]．さらに，Barthe は Brascamp–Lieb の不等式でも同様の証明が成り立つことを示した [Bar98a, Theorem 1].

(4)Carlen–Lieb–Loss は熱拡散方程式の解の積の積分は時間が経過するにつれて増大することを使って階数 1 の Brascamp–Lieb の不等式を証明した [CLL04, Theorem 3.1]．Cordero-Erausquin–Ledoux はこの単調増大性を Shannon の微分エントロピーの評価を用いて証明した [CL10, Theorem 6].

他にも事実 2.3 や Brascamp–Lieb の不等式には関連する様々な結果 [Bal89]

[Ben+08] [Val08] [BB09] [Ben+10] [Val10] [Bar+11] [Led14] [Leh14] [IV15] [Ben+17] [Bra17] [Gar+18] [Ben+20] やサーベイ [Gar02] [Car07] [Ben14] がある．

2.2　系 1.3 と知られている結果の比較

この節では，系 1.3 と知られている結果の関連を見る．表 2.2 ではいくつかの G について系 1.3 を証明した著者をまとめている．G がコンパクトのとき，G はユニモジュラーで系 1.3 は式 (2.1) と一致する．従って，系 1.3 は本質的に Weil により証明されている（例 2.1 (1)）．また，任意の連結 Lie 群 G に対し系 2.2 の同値条件 (1)-(8) は $r(G) < \dim G$ とも同値になる．したがって，$\#Z(G/R) < \infty$ となるような連結 Lie 群 G に対し，系 1.3 は系 2.2 より強い $Y(p_1, p_2; G)$ の上からの評価を与えている．ここで，Nielsen は次の事実を証明した．

事実 2.5 (Nielsen [Nie94, Corollary (a) and (b)])**.** $1 < p_1, p_2 < \infty$ が式 (2.2) をみたすとする．G が単連結可解 Lie 群または連結冪零 Lie 群のとき

$$Y(p_1, p_2; G) = Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - \mathrm{rank}(\ker(\tilde{G} \to G))}$$

となる．ここで，$\tilde{G}$ は G の普遍被覆群である．

任意の連結可解 Lie 群 G に対し $r(G) = \mathrm{rank}(\ker(\tilde{G} \to G))$ となる [Sat24, Example 5.2 (2)]．したがって，G が単連結可解 Lie 群または冪零 Lie 群ならば，事実 2.5 から系 1.3 が従う．

表 2.2　いくつかの G について系 1.3 を証明した著者

連結 Lie 群 G	著者
コンパクト群	Weil（例 2.1 (1)）
$\mathbb{R}^n$	Beckner（事実 2.3）
単連結冪零 Lie 群	Klein–Russo [KR78, Corollary 2.5’]
単連結可解 Lie 群・冪零 Lie 群	Nielsen（事実 2.5）

また，台が十分小さいような関数に限ると，次の事実のように系 1.3 より強い上からの評価ができることを Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock は証明した．

事実 2.6 (Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock [Ben+20, Corollary 2.4])**.** 式 (1.2) をみたすような $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ に対し，$1 \leq p \leq \infty$ を式 (1.3) で定める．この

とき，任意の Lie 群 G と任意の $Y' > Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G}$ に対し，ある空でない開部分集合 $V \subset G$ が存在し，台が V に含まれるような任意の可測関数 $\phi_1, \phi_2 \colon G \to \mathbb{C}$ に対し

$$\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p_1'})\|_p \leq Y' \|\phi_1\|_{p_1} \|\phi_2\|_{p_2} \tag{2.4}$$

となる．

Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock の元の論文では連結性を仮定している．しかし，$V \subset G_0$ となるように取り直せるのでこの仮定がなくても事実 2.6 が成り立つ．Cowling–Martini–Müller–Parcet の結果 [Cow+19, Proposition 2.4 (i)] より事実 2.6 内の $Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G}$ は最適である．

台が十分小さいという条件のもとで，事実 2.6 は定理 1.2 より強い評価を与えている．例えば，$G = SL_2(\mathbb{R})$ のとき，$\dim G = 3$ かつ $r(G) = \dim SO(2) = 1$ なので式 (1.6) が成り立つ．一方，事実 2.6 より任意の $Y' > Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^3$ に対しある空でない開部分集合 $V \subset SL_2(\mathbb{R})$ が存在し，台が V に含まれるような任意の可測関数 $\phi_1, \phi_2 \colon SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ に対し式 (2.4) をみたす．

3　定理 1.2 の証明

この節では定理 1.2 を証明する．3.1 節では，閉部分群 $H \subset G$ 上の左 Haar 測度を用いて G の左 Haar 測度を表示する補題（補題 3.1）を準備する．3.2 節では Hölder の不等式（事実 3.3）を適用することで定理 1.2 の証明に用いる不等式を与える（例 3.4）．3.3 節では 3.1 節と 3.2 節を用いて定理 1.2 の証明を完結させる．

3.1　閉部分群を用いた Haar 測度の表示

$X \coloneqq H \backslash G$ とし，$g \in G$ の右剰余類を $\overline{g} \coloneqq Hg \in X$ と書く．

補題 3.1. $H \subset G$ を局所コンパクト群 G の閉部分群とする．

(1) $\delta|_H$ が H のモジュラー関数となるようなある連続関数 $\delta \colon G \to \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，任意の可測関数 $\phi \colon G \to \mathbb{C}$ に対し

$$\int_H \phi(hg) dh \delta(g)$$

が左 H-不変になる．

(2)(1) の δ を固定する．このとき，任意の可積分関数 $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ に対し

$$\int_X \int_H \phi(hg) dh \delta(g) d\overline{g} = \int_G \phi(g) dg$$

となるような X 上の Borel 測度 $d\overline{g}$ が存在する．

ここで，定理 1.2 を証明するため，補題 3.1 のいくつかの例を見る．

例 3.2. $\phi_1, \phi_2\colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を可測関数とする．$1 < p_1, p_2, p < \infty$ が式 (1.3) をみたすとする．

(1)$g \in G$，$h \in H$ に対し $s(h,g) := \phi_1(hg)\delta(g)^{1/p_1}$ とする．補題 3.1 (1) より

$$S(\overline{g}) := \int_H s(h,g)^{p_1} dh = \int_H \phi_1(hg)^{p_1} dh \delta(g)$$

は well-defined であり，補題 3.1 (2) より

$$\int_X S(\overline{g}) d\overline{g} = \|\phi_1\|_{p_1}^{p_1}$$

となる．

(2)$g, g' \in G$ に対し $t(g,g') := (\phi_2(g^{-1}g')^{p_2}\delta(g'))^{1/p}$ とする．任意の $h' \in H$ に対し

$$\int_H t(h^{-1}h'g, g')^p dh = \int_H t(h^{-1}g, g')^p dh$$

となるので，補題 3.1 (1) より

$$T(\overline{g}, \overline{g'}) := \int_H t(h^{-1}g, g')^p dh = \int_H \phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} dh \delta(g')$$

は well-defined である．したがって，補題 3.1 (2) より

$$\int_X T(\overline{g}, \overline{g'}) d\overline{g'} = \int_X \int_H \phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} dh \delta(g') d\overline{g'} = \int_G \phi_2(g^{-1}g')^{p_2} dg' = \|\phi_2\|_{p_2}^{p_2}$$

となる．

(3)$g, g' \in G$，$h \in H$ に対し

$$u(g,h,g') := \left(\frac{\phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} \Delta(g^{-1}hg')\delta(g)}{\delta(h)} \right)^{1/p_1'}$$

とする．補題 3.1 (1) より $\delta|_H$ は H のモジュラー関数なので，式 (1.1) より

$$\begin{aligned}\int_H u(g,h,h'g')^{p'_1}dh &= \int_H \frac{\phi_2(g^{-1}hh'g')^{p_2}\Delta(g^{-1}hh'g')\delta(g)}{\delta(h)}dh \\ &= \int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}h'g')^{p_2}\Delta(g^{-1}h^{-1}h'g')dh\delta(g) \\ &= \int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}g')^{p_2}\Delta(g^{-1}h^{-1}g')dh\delta(g) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

は $h' \in H$ によらない．したがって，補題 3.1 (1) より

$$U(\overline{g},\overline{g'}) \coloneqq \int_H u(g,h,g')^{p'_1}dh$$

は well-defined である．式 (1.1)，式 (3.1)，補題 3.1 (2) より，任意の $g' \in G$ に対し

$$\begin{aligned}\int_X U(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g} &= \int_X\int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}g')^{p_2}\Delta(g^{-1}h^{-1}g')dh\delta(g)d\overline{g} \\ &= \int_G \phi_2(g^{-1}g')^{p_2}\Delta(g^{-1}g')dg = \int_G \phi_2(g^{-1})^{p_2}\Delta(g^{-1})dg \\ &= \int_G \phi_2(g)^{p_2}dg = \|\phi_2\|_{p_2}^{p_2}\end{aligned}$$

となる．

(4)s，t，u をそれぞれ (1)，(2)，(3) で定める．補題 3.1 より，任意の $h' \in H$，$g' \in G$ に対し

$$\begin{aligned}&\phi_1 * (\phi_2\Delta^{1/p'_1})(h'g') \\ &= \int_G \phi_1(g)\phi_2(g^{-1}h'g')\Delta(g^{-1}h'g')^{1/p'_1}dg \\ &= \int_X\int_H \phi_1(hg)\phi_2(g^{-1}h^{-1}h'g')\Delta(g^{-1}h^{-1}h'g')^{1/p'_1}dh\delta(g)d\overline{g} \\ &= \int_X\int_H \frac{s(h,g)t(h'^{-1}hg,g')u(g,h^{-1}h',g')\delta(h^{-1}h')^{1/p'_1}}{\delta(g')^{1/p}}dhd\overline{g}\end{aligned}$$

となる．

(5)補題 3.1 より

$$\|\phi_1 * (\phi_2\Delta^{1/p'_1})\|_p^p = \int_X\int_H \phi_1 * (\phi_2\Delta^{1/p'_1})(h'g')^p dh'\delta(g')d\overline{g'}$$

となる．よって

$$F(g,h',g') \coloneqq \int_H s(h,g)t(h'^{-1}hg,g')u(g,h^{-1}h',g')\delta(h^{-1}h')^{1/p'_1}dh.$$

とすると，(4) より

$$\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p_1'})\|_p^p = \int_X \int_H \left(\int_X F(g, h', g') d\overline{g} \right)^p dh' d\overline{g'}$$

となる．

3.2 Hölder の不等式

事実 3.3 (Hölder の不等式)**.** $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし $i = 1, \cdots, k$ と $j = 1, \cdots, l$ に対し $p_{i,j}, c_i > 0$ とする．このとき，測度空間 G 上の任意の可測関数 $\phi_1, \cdots, \phi_l \colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し

$$\begin{aligned} &\left(\int_G \phi_1(g)^{p_1} \cdots \phi_l(g)^{p_l} dg \right)^c \\ \leq &\left(\int_G \phi_1(g)^{p_{1,1}} \cdots \phi_l(g)^{p_{1,l}} dg \right)^{c_1} \cdots \left(\int_G \phi_1(g)^{p_{k,1}} \cdots \phi_l(g)^{p_{k,l}} dg \right)^{c_k} \end{aligned}$$

となる．ここで，$j = 1, \cdots, l$ に対し

$$c \coloneqq c_1 + \cdots + c_k, \qquad p_j \coloneqq \frac{p_{1,j} c_1 + \cdots + p_{k,j} c_k}{c}$$

とする．

例 3.4. ϕ_1，ϕ_2，S，t，T，u，U を例 3.2 のように定める．$1 < p_1, p_2, p < \infty$ が式 (1.3) をみたすとする．

(1)式 (1.3) より

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{p_2} \tag{3.2}$$

となるので，事実 3.3 より

$$\left(\int_H (t(h^{-1}g, g') u(g, h, g'))^{p_2} dh \right)^{1/p_2} \leq T(\overline{g}, \overline{g'})^{1/p} U(\overline{g}, \overline{g'})^{1/p_1'}$$

となる．

(2)式 (1.3) より

$$p \left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'} \right) + 1 = p \left(2 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p} \right) = p$$

となり，式 (3.2) と同様に $1/p+1/p_2'=1/p_1$ となる．よって，例 3.2 (1) (3) と事実 3.3 より

$$\begin{aligned}&\left(\int_X S(\overline{g})^{1/p_1}T(\overline{g},\overline{g'})^{1/p}U(\overline{g},\overline{g'})^{1/p_1'}d\overline{g}\right)^p\\ &\le\left(\int_X S(\overline{g})d\overline{g}^{1/p_2'}\int_X U(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}^{1/p_1'}\right)^p\int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}\\ &=\left(\|\phi_1\|_{p_1}^{p_1/p_2'}\|\phi_2\|_{p_2}^{p_2/p_1'}\right)^p\int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}\end{aligned}$$

となる．

3.3 証明の完結

この節では，例 3.2 と例 3.4 を用いて定理 1.2 の証明を完結させる．定理 1.2 の証明の本質は $1<p_1,p_2,p<\infty$ のときなので，この場合に示す．

定理 1.2 の証明 $\|\phi_1\|_{p_1}=\|\phi_2\|_{p_2}=1$ をみたすような $\phi_1,\phi_2\colon G\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ に対し s，S，t，T，u，U を例 3.2，F を例 3.2 (5) のように定める．このとき，例 3.2 (5) より

$$\int_X\int_H\left(\int_X F(g,h',g')d\overline{g}\right)^p dh'd\overline{g'}\le Y(p_1,p_2;H)^p \tag{3.3}$$

を示せばよい．Minkowski の積分不等式より

$$\int_H\left(\int_X F(g,h',g')d\overline{g}\right)^p dh'\le\left(\int_X\left(\int_H F(g,h',g')^p dh'\right)^{1/p}d\overline{g}\right)^p \tag{3.4}$$

となる．補題 3.1 (1) より $\delta|_H$ は H のモジュラー関数なので，例 3.4 (1) より

$$\begin{aligned}\left(\int_H F(g,h',g')^p dh'\right)^{1/p}&\le Y(p_1,p_2;H)S(\overline{g})^{1/p_1}\left(\int_H(t(h^{-1}g,g')u(g,h,g'))^{p_2}dh\right)^{1/p_2}\\ &\le Y(p_1,p_2;H)S(\overline{g})^{1/p_1}T(\overline{g},\overline{g'})^{1/p}U(\overline{g},\overline{g'})^{1/p_1'}\end{aligned}$$

となる．したがって，式 (3.4) より

$$\int_H\left(\int_X F(g,h',g')d\overline{g}\right)^p dh'\le\left(Y(p_1,p_2;H)\int_X S(\overline{g})^{1/p_1}T(\overline{g},\overline{g'})^{1/p}U(\overline{g},\overline{g'})^{1/p_1'}d\overline{g}\right)^p$$

となる．$\|\phi_1\|_{p_1}=\|\phi_2\|_{p_2}=1$ と例 3.4 (2) より

$$\left(\int_X S(\overline{g})^{1/p_1}T(\overline{g},\overline{g'})^{1/p}U(\overline{g},\overline{g'})^{1/p_1'}d\overline{g}\right)^p\le\int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}$$

となるので

$$\int_H \left(\int_X F(g,h',g')d\overline{g}\right)^p dh' \leq Y(p_1,p_2;H)^p \int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}$$

となる．したがって

$$\int_X \int_H \left(\int_X F(g,h',g')d\overline{g}\right)^p dh'd\overline{g'} \leq Y(p_1,p_2;H)^p \int_X \int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}d\overline{g'}$$

となる．$\|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1$ と例 3.2 (1) (2) より

$$\int_X \int_X S(\overline{g})T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g}d\overline{g'} = \int_X \int_X T(\overline{g},\overline{g'})d\overline{g'}S(\overline{g})d\overline{g} = \int_X S(\overline{g})d\overline{g} = 1$$

となるので，式 (3.3) を得る． □

参考文献

[Bal89] K. Ball. “Volumes of sections of cubes and related problems”. *Geometric aspects of functional analysis (1987–88)*. Vol. 1376. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1989, pp. 251–260.

[Bar98a] F. Barthe. “On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality”. *Invent. Math.* 134.2 (1998), pp. 335–361.

[Bar98b] F. Barthe. “Optimal Young’s inequality and its converse: a simple proof”. *Geom. Funct. Anal.* 8.2 (1998), pp. 234–242.

[Bar+11] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin, M. Ledoux, and B. Maurey. “Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups”. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 10 (2011), pp. 2177–2216.

[Bec75] W. Beckner. “Inequalities in Fourier analysis”. *Ann. of Math. (2)* 102.1 (1975), pp. 159–182.

[Ben14] J. Bennett. “Aspects of multilinear harmonic analysis related to transversality”. *Harmonic analysis and partial differential equations*. Vol. 612. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, pp. 1–28.

[BB09] J. Bennett and N. Bez. “Closure properties of solutions to heat inequalities”. *J. Geom. Anal.* 19.3 (2009), pp. 584–600.

[Ben+20] J. Bennett, N. Bez, S. Buschenhenke, M. G. Cowling, and T. C. Flock. "On the nonlinear Brascamp-Lieb inequality". *Duke Math. J.* 169.17 (2020), pp. 3291–3338.

[Ben+17] J. Bennett, N. Bez, M. G. Cowling, and T. C. Flock. "Behaviour of the Brascamp-Lieb constant". *Bull. Lond. Math. Soc.* 49.3 (2017), pp. 512–518.

[Ben+08] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. "The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals". *Geom. Funct. Anal.* 17.5 (2008), pp. 1343–1415.

[Ben+10] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. "Finite bounds for Hölder-Brascamp-Lieb multilinear inequalities". *Math. Res. Lett.* 17.4 (2010), pp. 647–666.

[BL76] H. J. Brascamp and E. H. Lieb. "Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions". *Advances in Math.* 20.2 (1976), pp. 151–173.

[Bra17] S. Brazitikos. "Brascamp-Lieb inequality and quantitative versions of Helly's theorem". *Mathematika* 63.1 (2017), pp. 272–291.

[Car07] A. Carbery. "The Brascamp-Lieb inequalities: recent developments". *NAFSA 8—Nonlinear analysis, function spaces and applications. Vol. 8.* Czech. Acad. Sci., Prague, 2007, pp. 8–34.

[CLL04] E. A. Carlen, E. H. Lieb, and M. Loss. "A sharp analog of Young's inequality on S^N and related entropy inequalities". *J. Geom. Anal.* 14.3 (2004), pp. 487–520.

[CL10] D. Cordero-Erausquin and M. Ledoux. "The geometry of Euclidean convolution inequalities and entropy". *Proc. Amer. Math. Soc.* 138.8 (2010), pp. 2755–2769.

[Cow+19] M. G. Cowling, A. Martini, D. Müller, and J. Parcet. "The Hausdorff-Young inequality on Lie groups". *Math. Ann.* 375.1-2 (2019), pp. 93–131.

[Dar53] G. Darmois. "Analyse générale des liaisons stochastiques. Etude particulière de l'analyse factorielle linéaire". *Rev. Inst. Internat. Statist.* 21 (1953), pp. 2–8.

[Fou77] J. J. F. Fournier. “Sharpness in Young’s inequality for convolution”. *Pacific J. Math.* 72.2 (1977), pp. 383–397.

[Gar02] R. J. Gardner. “The Brunn-Minkowski inequality”. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 39.3 (2002), pp. 355–405.

[Gar+18] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson. “Algorithmic and optimization aspects of Brascamp-Lieb inequalities, via operator scaling”. *Geom. Funct. Anal.* 28.1 (2018), pp. 100–145.

[Gle51] A. M. Gleason. “The structure of locally compact groups”. *Duke Math. J.* 18 (1951), pp. 85–104.

[HM53] R. Henstock and A. M. Macbeath. “On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski, and Lusternik”. *Proc. London Math. Soc. (3)* 3 (1953), pp. 182–194.

[HR79] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I.* Second. Vol. 115. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, pp. ix+519.

[IV15] P. Ivanisvili and A. Volberg. “Hessian of Bellman functions and uniqueness of the Brascamp-Lieb inequality”. *J. Lond. Math. Soc. (2)* 92.3 (2015), pp. 657–674.

[Iwa49] K. Iwasawa. “On some types of topological groups”. *Ann. of Math. (2)* 50 (1949), pp. 507–558.

[JTZ23] Y. Jing, C.-M. Tran, and R. Zhang. “A nonabelian Brunn-Minkowski inequality”. *Geom. Funct. Anal.* 33.4 (2023), pp. 1048–1100.

[KR78] A. Klein and B. Russo. “Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups”. *Math. Ann.* 235.2 (1978), pp. 175–194.

[Led14] M. Ledoux. “Remarks on Gaussian noise stability, Brascamp-Lieb and Slepian inequalities”. *Geometric aspects of functional analysis.* Vol. 2116. Lecture Notes in Math. Springer, Cham, 2014, pp. 309–333.

[Leh14] J. Lehec. “Short probabilistic proof of the Brascamp-Lieb and Barthe theorems”. *Canad. Math. Bull.* 57.3 (2014), pp. 585–597.

[Lie90] E. H. Lieb. “Gaussian kernels have only Gaussian maximizers”. *Invent. Math.* 102.1 (1990), pp. 179–208.

[Nie94] O. A. Nielsen. “Sharpness in Young’s inequality for convolution products”. *Canad. J. Math.* 46.6 (1994), pp. 1287–1298.

[Sat22] T. Satomi. “An inequality for the compositions of convex functions with convolutions and an alternative proof of the Brunn-Minkowski-Kemperman inequality”. *Tr. Mat. Inst. Steklova* 319 (2022), pp. 280–297.

[Sat23] T. Satomi. “An Inequality for the Convolutions on Unimodular Locally Compact Groups and the Optimal Constant of Young’s Inequality”. *J. Fourier Anal. Appl.* 29.1 (2023), Paper No. 13.

[Sat24] T. Satomi. “Inequality on the optimal constant of Young’s convolution inequality for locally compact groups and their closed subgroups”. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 203.2 (2024), pp. 805–821.

[Ski53] V. P. Skitovič. “On a property of the normal distribution”. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 89 (1953), pp. 217–219.

[Ter17] M. Terp. “L^p Fourier transformation on non-unimodular locally compact groups”. *Adv. Oper. Theory* 2.4 (2017), pp. 547–583.

[Val08] S. I. Valdimarsson. “Optimisers for the Brascamp-Lieb inequality”. *Israel J. Math.* 168 (2008), pp. 253–274.

[Val10] S. I. Valdimarsson. “The Brascamp-Lieb polyhedron”. *Canad. J. Math.* 62.4 (2010), pp. 870–888.

[Wei40] A. Weil. *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 869. Hermann et Cie., Paris, 1940.

[Yam53] H. Yamabe. “A generalization of a theorem of Gleason”. *Ann. of Math. (2)* 58 (1953), pp. 351–365.