Classification of irreducible representations of unitary and quaternion queer supergroups*

林 拓磨 †

概要

本稿では [7, 5, 6 節] に基づきユニタリ及び四元数奇怪スーパー群の既約表現の分類と自己準同型スーパー多元体の決定について述べる．

1 記号

- $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ をそれぞれ整数環, 実数体, 複素数体, 四元数体とする．また, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 同時に議論できる場合はまとめて F と書く．
- $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の Galois 群を Γ と書く．Γ 集合 X に対して Γ 不変部分を X^Γ と書く．
- 複素数体上定義された対象に対する複素共役作用を $^-$ で表す．
- 実アファイン群概型[*1] G に対してその複素化 $G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の表現 V に対して実数体への係数制限を $\operatorname{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} V$ と書く．
- $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上のアファイン群概型 G の既約表現の同型類の集合を $\operatorname{Irr} G$ と書く．また, G の表現 V, W に対してその Hom 空間を $\operatorname{Hom}_G(V, W)$ と書く．
- $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上の分裂トーラス H の指標群を $X^*(H)$ で表す．
- $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上のアファイン群概型 G とその部分群 H に対して表現の誘導関手を Ind_H^G で表す．
- 0 でない実数 r に対して r の符号を $\operatorname{sgn} r \in \{\pm 1\}$ を と書く．
- 整数 n と非負整数 m に対して

$$\binom{n}{m} \coloneqq \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

  とする．
- 非負整数 n, m と集合 S に対して S 値 $n \times m$ 行列全体の集合を $\mathrm{M}_{nm}(S)$ と書く．
- ブロック対角行列は左上から右下に成分を並べて $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ のように書く． 同様に, ブロック反対角行列を左下から右上に成分を並べて

---

* 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号：21J00023, 22KJ2045) の助成を受けたものである．

† 大阪公立大学数学研究所

*1 概型という言葉に抵抗があれば有限型であると仮定して実線形代数群と読み替えてもよい．ただし代数幾何的な対象であることは重要で, 実点集合のなす Lie 群とは区別されたい．

$\mathrm{antidiag}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ のように書く.

- 非負整数 n に対して n 次単位行列を I_n で表す. また, $J_n = \mathrm{antidiag}(I_n, -I_n)$ とする.

2 連結実簡約代数群の既約表現

2.1 Loewy の分類

まずは実既約表現の分類に関する古典的結果の復習から始めたい. G を実アファイン群概型とする.

定理 2.1. *(1) V を $G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の既約表現とする.*

(I) $\bar{V} \not\cong V$ であるとする. このとき $V_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} V$ は G の既約表現である. また, $\mathbb{R}$ 代数として $\mathrm{End}_G(V_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{C}$ である.

(II) $\bar{V} \cong V$ であるとする. 同型を 1 つ選び, Φ と書く. このときある 0 でない実数 c を用いて $\Phi \circ \bar{\Phi} = c\,\mathrm{id}_V$ と書ける. さらに次が成り立つ:

(i) $c > 0$ であるとする. このとき V は実形を持つ. これを $V_{\mathbb{R}}$ と書く. また, $\mathrm{End}_G(V_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ である.

(ii) $c < 0$ であるとする. このとき $V_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} V$ は G の既約表現である. また, $\mathrm{End}_G(V_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{H}$ である.

(2) (1) により全単射 $\Gamma \backslash \mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathrm{Irr}\, G;\ V \mapsto V_{\mathbb{R}}$ が定まる. ここで Γ は複素共役により $\mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ に作用する.

定義 2.2. V を $G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の自己共役既約表現とする. このとき (II) にある c の符号は同型 Φ の取り方によらない. そこで, c の符号を V の符号と呼ぶ.

定義から, 指数は自己共役既約表現 V についてある Φ に対して $\Phi \circ \bar{\Phi} = \mathrm{id}_V$ になりうるか (「障害」) を表している.

上述の結果について少し考察を加えておこう. 一般に実有限次元代数 A が中心的であるとは A の中心が $\mathbb{R}$ と一致することを言う. 分類から $\mathrm{End}_G(V_{\mathbb{R}})$ が中心的であることと V が自己共役であることは同値である. これは V が $(\mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\Gamma}$ の元を定めることと同値である. 指数は $(\mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\Gamma} \to \{\pm 1\}$ という写像を定めることに気が付くだろう. 一方, 実数体上の中心的多元体の同型類の集合を $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ と書くとき, $V \mapsto [\mathrm{End}_G(V_{\mathbb{R}})]$ により $(\mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\Gamma} \to \mathrm{Br}(\mathbb{R})$ という写像ができる. ここで一般に, 実数体上の中心的多元体 D に対してその同型類を $[D] \in \mathrm{Br}(\mathbb{R})$ と書いている. ところでよく知られているように $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\}$ である (実数体の局所類体論). また, 実は $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ には自然な群構造が定

まり, $[\mathbb{R}] \mapsto 1$, $[\mathbb{H}] \mapsto -1$ により群同型 $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$ を得る. $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ は Brauer 群と呼ばれる. 上述の写像と合わせて $(\mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\Gamma} \to \mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$ という写像を得るが, これは指数の定める写像と一致する.

注意 2.3. 上述の言い換えは分類の帰結としてではなく直接証明することもできる.

注意 2.4. 指数がある種の障害を表していると述べたがこれは Brauer 群を 2 次の Galois コホモロジーと同一視することで意味がはっきりする. つまり, 指数は 2 次の Galois コホモロジーの元であり, Galois 降下に対する障害類になっている.

2.2 Borel–Weil の定理

G を連結実簡約代数群とする. H を G の極大トーラスとする. また, $(G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の正ルート系を 1 つ固定する. このとき B' を負ルートに対応する $G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の Borel 部分群とする. $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の支配的指標全体の集合を $X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_+$ と書く. $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の正規化群の元 $w \in G(\mathbb{C})$ であって $\bar{B}' = wB'w^{-1}$ を満たすものを 1 つ選んでおく. $\lambda \in X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_+$ に対して $V(\lambda) = \mathrm{Ind}_{B'}^{G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda$ とする. このとき次が成り立つ:

定理 2.5. *(1) $\lambda \mapsto V(\lambda)$ により全単射 $X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_+ \cong \mathrm{Irr}\, G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ が定まる.*

(2) $\lambda \in X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_+$ に対して $\overline{V(\lambda)} \cong V(w^{-1}\bar{\lambda})$ である.

(3) $\lambda \in X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_+$ とする. $\bar{\lambda} = w\lambda$ であるとき $V(\lambda)$ は自己共役かつ指数は $\mathrm{sgn}\, \lambda(\bar{w}w)$ である.

Borel–Weil 実現 (1) により (2) の同型は具体的に

$$\Phi_w : \overline{\mathrm{Ind}_{B'}^{G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda} \cong \mathrm{Ind}_{\bar{B}'}^{G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \mathbb{C}_{\bar{\lambda}} \cong \mathrm{Ind}_{w^{-1}\bar{B}'w}^{G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \mathbb{C}_{w^{-1}\bar{\lambda}} = \mathrm{Ind}_{B'}^{G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \mathbb{C}_{w^{-1}\bar{\lambda}}$$

で与えられる. ここで真ん中の同型は w による捻りにより定まる. この構成により $\Phi_w \circ \bar{\Phi}_w$ が具体的に計算出来, 結果として (3) がわかる. (2) の結果を参考に次を導入しておこう:

定義 2.6. $\lambda \mapsto w^{-1}\bar{\lambda}$ により $X^*(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の対合が定まる. これを $*$ 対合と呼ぶ.

注意 2.7. トーラスの取り方を無視すれば $*$ 対合は佐竹図形の定義に現れる.

注意 2.8. ここまでの話題について少し歴史的なことに触れておこうと思う. Loewy 氏は群の有限次元実既約表現の分類について定理 2.1 を証明した[*2] ([9]). 証明の鍵は Galois 降下であり, 議論を見ると様々な設定で同様の定理が成り立つことがわかる. [9] のすぐ後に有限群の場合に自己共役性と指数を決定する式 (Frobenius–Schur 指標) が与えられた ([5]).

[*2] 正確には実既約表現 V に対して $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ の分解の様子を考察しており, 見た目は少し形が異なる.

Cartan 氏は Lowey の分類を実単純 Lie 代数の場合に適用し, 自己共役になる最高ウェイトとその場合の指数を決定した ([2]). この時点では指数は基本ウェイトの場合に帰着して各個計算するという方法をとっていた ([2, 8]) がその後指数を決定する式についていくつかの研究が続いた ([14, 4, 11] など).

3 スーパー数学

本稿では前節のスーパー類似について考えたい.

3.1 スーパー?

数学において「スーパー」と言えば 「$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き」を通常意味する. 言葉の由来や「スーパー対象」を研究する一般的な動機は主に物理から来ているが詳しい話は筆者の手には余るので割愛したい. 「スーパー対象」を考える際次数のことは通例パリティと呼ぶ. 本稿では次数としての $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元は $\bar{0}, \bar{1}$ で表す.

3.2 スーパー代数

ではもう少し具体的な「スーパー対象」について考えることにしよう.

定義 3.1. (1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間をベクトルスーパー空間と言う. つまり, ベクトルスーパー空間とはベクトル空間 V とその分解 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ のデータの組を指す.

(2) ベクトルスーパー空間の斉次元 v のパリティを $|v|$ で表す.

(3) ベクトルスーパー空間 V, W に対して V から W へのパリティを保つ線形写像の空間を $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ と書く. 以下断りがない限りベクトルスーパー空間間の線形写像と言ったらパリティを保つものとする.

(4) ベクトルスーパー空間のテンソル積 $\otimes_F$ を通常の次数付きベクトル空間のテンソル積として定義する.

(5) ベクトルスーパー空間 V, W に対して同型 $C_{V,W} : V \otimes_F W \cong W \otimes_F V$ を $v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$ により定義する ($v \in V$, $w \in W$ は斉次元).

ということで適切な図式を書くことでいくつかの基本的な代数系を定義することができる. 難しい言い方をすれば, 上記によりベクトルスーパー空間の対称モノイダル圏を定義したので代数対象やその加群対象などが定義できる ([10, Chapter VII]). 1 つ例を挙げよう:

定義 3.2 ([10, Chapter VII, Section 3]). F 上のスーパー代数とはベクトルスーパー空間

A と線形写像 $m_A : A \otimes_F A \to A$, $u_A : F \to A$ の組であって次の図式が可換になるもののことである:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_F A \otimes_F A \arrow[r, "m_A \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes m_A"'] & A \otimes_F A \arrow[d, "m_A"] \\
A \otimes_F A \arrow[r, "m_A"] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes u_A"] \arrow[dr, equal] & A \otimes_F A \arrow[d, "m_A"] & A \arrow[l, "u_A \otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dl, equal] \\
& A. &
\end{tikzcd}
$$

これはいわゆる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き代数と同値な概念である．スーパー代数 A に対して左スーパー A 加群も上のように定義もできるし単に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付き加群として定義することもできる．スーパーイデアルも同様に定義する．上のように圏論的な言い回しをしたのは次で紹介する概念に関連する:

定義 3.3. スーパー代数 A, B に対して $A \otimes_F B$ は

$$(A \otimes_F B) \otimes_F (A \otimes_F B) \cong (A \otimes_F A) \otimes_F (B \otimes_F B) \overset{m_A \otimes m_B}{\to} A \otimes_F B$$

及び $u_A \otimes_F u_B$ によりスーパー代数となる．ここで 1 つ目の同型は $C_{B,A}$ により真ん中の 2 つの項を入れ替えている．

斉次元に対して積の式を書けば $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$ となり符号が現れる．この符号の論理的説明にはこの圏論的説明がわかりやすいと思った次第である．同様に:

定義 3.4. スーパー代数 A に対して次の図式が可換であるとき A は可換であると言う:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_F A \arrow[rr, "C_{A,A}"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes_F A \arrow[dl, "m"] \\
& A. &
\end{tikzcd}
$$

可換スーパー F 代数の圏を CSAlg_F と書く．

式を使えば斉次元 $a, b \in A$ に対して $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ が成り立つと言い換えられる．

例 3.5. ベクトル空間 V に対して外積代数 $\wedge^\bullet V$ は $|v| = \bar{1}$ $(v \in V)$ によりスーパー代数の構造を持つ．このスーパー代数は可換である．

3.3　スーパー代数幾何

代数幾何において F 上のアファイン群概型が可換 F 代数から群の圏 Grp への表現可能関手と定義できるが, これのスーパー類似を考えることができる.

定義 3.6. F 上のアファイン群スーパー概型とは表現可能関手 $\mathbb{G} : \mathrm{CSAlg}_F \to \mathrm{Grp}$ である.

通常の代数群論同様, 平滑 (有限型) アファイン群スーパー概型に対してスーパー Lie 環を定義することができる.

例 3.7. G をアファイン群概型とする. このとき G は $G(A) \coloneqq G(A_{\bar{0}})$ によりアファイン群スーパー概型と見なすことができる.

例 3.8 (底変換)**.** 係数制限により定まる関手 $\mathrm{CSAlg}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{CSAlg}_{\mathbb{R}}$ との合成により, 実アファイン群スーパー概型 $\mathbb{G}$ から複素アファイン群スーパー概型が定まる. これを $\mathbb{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ で表す.

例 3.9. V をベクトルスーパー空間とする. 可換スーパー代数 A に対して $A \otimes_F V$ の左 A スーパー加群の自己同型群を $\mathrm{GL}(V; A)$ とすることで

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(V; -) : \mathrm{CSAlg}_F \to \mathrm{Grp}$$

が定まる. V が有限次元であるとき $\mathrm{GL}(V)$ は表現可能である. $V_{\bar{0}} = F^m$, $V_{\bar{1}} = F^n$ であるとき (m, n は非負整数), $\mathrm{GL}(V; A)$ は次のような行列のなす群 $\mathrm{GL}_{m|n}(A)$ と同一視できる:

$$\mathrm{GL}_{m|n}(A) \coloneqq \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+n}(A) : \begin{array}{ll} a \in \mathrm{GL}_m(A_{\bar{0}}), & d \in \mathrm{GL}_n(A_{\bar{0}}) \\ b \in \mathrm{M}_{mn}(A_{\bar{1}}), & c \in \mathrm{M}_{nm}(A_{\bar{1}}) \end{array} \right\}.$$

と同一視できる. これにより定まるアファイン群スーパー概型を $\mathrm{GL}_{m|n}$ と書く (一般線形スーパー代数群).

これによりアファイン群スーパー概型 $\mathbb{G}$ の表現を自然に定義することができる. アファイン群スーパー概型の準同型 $\mathbb{H} \to \mathbb{G}$ が与えられたとき, 制限関手が自然に定義できる. この関手は右随伴を持つ. これを $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$ と書く.

3.4　パリティ変更

スーパー構造を考えたことで通常のベクトル空間にはない操作を考えることができる:

定義 3.10 (パリティ変更)**.** ベクトルスーパー空間 V に対して新たなベクトルスーパー空間 ΠV を $(\Pi V)_{\bar{0}} = V_{\bar{1}}$, $(\Pi V)_{\bar{1}} = V_{\bar{0}}$ により定義する.

定義 3.11 (Hom スーパー空間)**.** ベクトルスーパー空間 V, W に対してベクトルスーパー空間 $\mathbb{H}\mathrm{om}_F(V,W)$ を $\mathbb{H}\mathrm{om}_F(V,W)_{\bar{0}} = \mathrm{Hom}_F(V,W)$, $\mathbb{H}\mathrm{om}_F(V,W)_{\bar{1}} = \mathrm{Hom}_F(V,\Pi W)$ により定義する．$V = W$ のとき $\mathbb{E}\mathrm{nd}_F(V) = \mathbb{H}\mathrm{om}_F(V,V)$ と書く．$\mathbb{E}\mathrm{nd}_F(V)$ は自然なスーパー代数の構造を持つ．アファイン群スーパー概型 $\mathbb{G}$ の表現の場合も同様に $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V)$ を定義する．一方でスーパー代数 A の左加群については $\epsilon \in \{\bar{0},\bar{1}\}$ に対して

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}_A(V)_\epsilon = \{f \in \mathbb{E}\mathrm{nd}_F(V)_\epsilon : \ f(av) = (-1)^{|a|\epsilon} a f(v)\}$$

とすることで $\mathbb{E}\mathrm{nd}_A(V)$ を定義する．

3.5 中心的単純スーパー代数と中心的スーパー多元体

Loewy の分類において Brauer 群なるものが現れていた．本節ではそのスーパー類似を説明する．本節のベクトルスーパー空間はすべて有限次元であるものとする．

定義 3.12. (1) スーパー F 代数 A に対して次が成り立つとき A は中心的であるという:

$$\{a \in A_{\bar{0}} : \ \forall b \in A, \ ab = ba\} = F.$$

(2) スーパー F 代数が非零かつ非自明なスーパーイデアルを持たないとき単純であるという．

(3) すべての非零斉次元が可逆であるスーパー代数をスーパー多元体と言う．

例 3.13 (Clifford スーパー代数)**.** V を有限次元 F ベクトル空間, q を V 上の二次形式とする．このとき V により生成される F 代数 $C(V,q)$ を $x^2 = q(x)$ $(x \in V)$ という関係式により定義する．この代数は $|x| = 1$ $(x \in V)$ によりスーパー代数の構造を持ち, Clifford スーパー代数と呼ぶ．$C(V,q)$ が中心的かつ単純であることと q が非退化であることは同値である．一般には, $C(V,q)$ の最大半単純商を $\bar{C}(V,q)$ と書くと, これは V の極大非退化部分空間に付随する Clifford スーパー代数と同型である．特に $\bar{C}(V,q)$ は中心的かつ単純である．

例 3.14. $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x$ は $|x| = \bar{1}$, $x^2 = 1$, $ax = xa$ $(a \in \mathbb{C})$ により $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x$ は中心的複素スーパー多元体[*3]になる．これは $V = \mathbb{C}$, $q(x) = x^2$ により定まる Clifford スーパー代数 $C(\mathbb{C},q)$ と一致する．

例 3.15. $\mathbb{G}$ をアファイン群スーパー概型, V をその既約表現とする．このとき $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V)$ はスーパー多元体になっている (Schur の補題)．これを V の自己準同型スーパー多元体と呼ぶ．

[*3] $\mathbb{C}$ 上のスーパー多元体は有限次元性と $\mathbb{C}$ の代数閉性から中心的であることは自動的に従う．

以下で中心的実スーパー多元体の例を挙げよう．後述の結果からわかる通り以下の例がちょうどすべての中心的実多元体の同型類を尽くす．

例 3.16. (1) $\mathbb{R}, \mathbb{H}$ は奇部が自明な実中心的多元体である．

(2) $D \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$ とする．このとき $D \oplus D\epsilon$ は $|\epsilon| = \bar{1}$, $\epsilon^2 = 1$, $a\epsilon = \epsilon a$ $(a \in D)$ により実中心的多元体である．同様に, $D \oplus D\delta$ は $|\delta| = \bar{1}$, $\delta^2 = 1$, $a\delta = \delta a$ $(a \in D)$ により実中心的多元体である．

(3) $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\epsilon$ は $|\epsilon| = \bar{1}$, $\epsilon^2 = 1$, $\epsilon z \epsilon^{-1} = \bar{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ により実中心的多元体である．このスーパー代数の偶部は $\mathbb{C}$ で, $\mathbb{R}$ 上中心的でないことが興味深い．同様に, 実中心的多元体 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\delta$ を定義することができる $(\delta^2 = -1)$.

定義 3.17 (Brauer–Wall 群, [15, 3])**.** (1) 中心的単純スーパー F 代数 A, B に対して $\mathbb{E}\mathrm{nd}_A(S) \cong \mathbb{E}\mathrm{nd}_B(T)$ であるとき A と B は相似であるという．ここで S, T はそれぞれ A, B 上の単純左スーパー加群であり, 同型類とパリティ変更を除いて一意である．

(2) 中心的単純スーパー F 代数の相似類全体の集合を $\mathrm{BW}(F)$ と書く．$\mathrm{BW}(F)$ にはテンソル積によりアーベル群の構造が定まる．$\mathrm{BW}(F)$ を Brauer–Wall 群と呼ぶ．

定理 3.18 ([15, 3])**.** *(1) 次の群同型がある:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BW}(\mathbb{C}) & \cong & \{\pm 1\} \\ [\mathbb{C}] & \mapsto & \bar{0} \\ [\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x] & \mapsto & \bar{1}. \end{array}$$

(2) 次の全単射 $\mathrm{BW}(\mathbb{R}) \cong \{\pm\} \times \{\pm 1\} \times \mathrm{Br}(\mathbb{R})$ 及び群同型 $\mathrm{BW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ がある:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{BW}(\mathbb{R}) & \cong & \{\pm\} \times \{\pm 1\} \times \mathrm{Br}(\mathbb{R}) & \cong & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ [\mathbb{R}] & \mapsto & (+, 1, [\mathbb{R}]) & \mapsto & \bar{0} \\ [\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\epsilon] & \mapsto & (-, 1, [\mathbb{R}]) & \mapsto & \bar{1} \\ [\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\epsilon] & \mapsto & (+, -1, [\mathbb{R}]) & \mapsto & \bar{2} \\ [\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\delta] & \mapsto & (-, -1, [\mathbb{H}]) & \mapsto & \bar{3} \\ [\mathbb{H}] & \mapsto & (+, 1, [\mathbb{H}]) & \mapsto & \bar{4} \\ [\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\epsilon] & \mapsto & (-, 1, [\mathbb{H}]) & \mapsto & \bar{5} \\ [\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\delta] & \mapsto & (+, -1, [\mathbb{H}]) & \mapsto & \bar{6} \\ [\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\delta] & \mapsto & (-, -1, [\mathbb{R}]) & \mapsto & \bar{7} \end{array}$$

定理 3.19 ([15, Theorem 4])**.** *$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ とする $(a_i \in F)$. q が二次形式として非退化であるとする $(\iff \forall i,\ a_i \neq 0)$.*

(1) $F = \mathbb{C}$ とする．このとき $\mathrm{BW}(\mathbb{C}) \cong \{\pm 1\}$ の同一視のもとで $[C(\mathbb{C}^n, q)] = (-1)^n$ である．

(2) $F=\mathbb{R}$ とする．$[C(\mathbb{R}^n,q)]=(\epsilon,a,D)$ と書くとき

$$\epsilon=\begin{cases}+ & (n\in 2\mathbb{Z})\\ - & (n\in 2\mathbb{Z}+1),\end{cases}$$

$$a=(-1)^{\binom{n}{2}+m},\quad D=(-1)^{\binom{m}{2}+m\binom{n-1}{2}+\binom{n+1}{4}}\in\{\pm 1\}\cong \mathrm{Br}(\mathbb{R})$$

である．ここで $m:=|\{i\in\{1,2,\dots,n\}:\ a_i<0\}|$ である．

上記の 2 つの結果は標数 2 でない一般の体に対する一般的な定理の形で与えられている．本稿では実数体と複素数体に限定していることを理由に具体的に書き下すことにした．

4 奇怪スーパー群の実既約表現

4.1 Lowey の分類

$\mathbb{G}$ を実アファイン群スーパー概型, $\operatorname{Irr}\mathbb{G}$ を $\mathbb{G}$ の既約表現の同型類の集合とする．Π により集合 $\operatorname{Irr}\mathbb{G}$ に対合が定まるがその対合による商を $\operatorname{Irr}_{\Pi}\mathbb{G}$ と書く．

定理 4.1 ([7, Theorem 3.18, Example 3.29])**.** *(1)* 定理 *2.1* の G を $\mathbb{G}$ に置き換えた主張が成り立つ．また, 全単射 $\Gamma\backslash\operatorname{Irr}\mathbb{G}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\operatorname{Irr}\mathbb{G}$ は Π を保つ．

(2) $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V_{\mathbb{R}})$ が $\mathbb{R}$ 上中心的であることは, $\bar{V}\cong V$ または $\bar{V}\cong\Pi V$ のいずれかが成り立つことと同値である．これらの条件が成り立たないとき, $V_{\mathbb{R}}=\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}V$ かつ $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V_{\mathbb{R}})=\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}}(V)$ であり, また $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}}(V)$ は $\mathbb{C}$ 上中心的である．

(1) の前半は定理 2.1 と全く同じ議論から従う．後半は構成から明らかである．(2) はスーパー構造に留意して非スーパーの場合と同様の議論をすることで証明される．

上述の定理について少し考察を深めておきたい．(2) は, 自己共役性により自己準同型多元体を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の Brauer 群と結び付けられるように, 自己共役の条件を Π の分弱めた条件により自己準同型スーパー多元体を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の Brauer–Wall 群と結び付けられる．この条件を確認した後は対応する Brauer–Wall 群の元の決定に話題が移る．これについては定理 2.1 のような結果はあるが本稿では割愛する ([7, 4 節]).

$\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V_{\mathbb{R}})$ に新しく言及した理由について述べておきたい．例えば中心的単純スーパー F 代数 A の単純スーパー加群は 1 つ選んで S とすれば ΠS も単純であり最大 2 つの同型類がある．これら 2 つが同型であるかどうかは A に依存する．また, これら 2 つを標準的に区別する方法は一般的には存在しない．例えば単純スーパー加群を分類したいと思えば $S\cong\Pi S$ かどうかを判定する必要があるわけだがこれも A に依存する．ところでこれは $\mathbb{E}\mathrm{nd}_A(S)_{\bar{1}}\neq 0$ と同値である．同様の問題はアファイン群スーパー概型の表現論でも生じる (後述, 定理 4.3).

ということで実既約表現を分類しようと考えた場合, 応用上 $V_{\mathbb{R}}$ と $\Pi V_{\mathbb{R}}$ が同型かどうかを判定する議論が必要になる. そしてそれは $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V_{\mathbb{R}})_{\bar{1}}$ が 0 であるかどうかを決定することと等価である. これが $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V_{\mathbb{R}})$ に言及した理由である. 既約表現の $\mathbb{E}\mathrm{nd}$ の決定問題はスーパーの設定において既約表現に関する標準的な問題ではあるが, それだけでなく, 既約表現の分類の問題と相補的な関係になっているのである.

4.2 分裂奇怪スーパー群の Borel–Weil 理論

定義 4.2 (分裂奇怪スーパー群)**.** 非負整数に対して F 上のアファイン群スーパー概型 $\mathrm{Q}_n : \mathrm{CSAlg}_F \to \mathrm{Grp}$ を次で定義する:

$$\mathrm{Q}_n(A) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n|n}(A) : \ a = d, \ b = -c \right\}.$$

このスーパー Lie 環は次で与えられる:

$$\mathfrak{q}_n = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(F) : \ a, b, c, d \in \mathrm{M}_n(F), \ a = d, \ b = c \right\}.$$

対角行列のなす部分群を H^{spl} と書く. また, a, b 共に下三角行列になっているものからなる Q_n の部分群を $\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}$ と書く. また, $\mathbb{H}^{\mathrm{spl}}$ を a, b 共に対角行列になっているものからなる Q_n の部分群とする. 以下標準的に $X^*(H^{\mathrm{spl}})$ を $\mathbb{Z}^n$ と同一視する. $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{Z}^n$ に対して F^n 上の二次形式 q^λ を $q^\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_i \lambda_i x_i^2$ により定義する.

定理 4.3 ([12, 1, 13])**.** *(1)* H^{spl} ウェイトを取ることにより全単射

$$\mathrm{Irr}_\Pi \, \mathbb{H}^{\mathrm{spl}} \cong X^*(H^{\mathrm{spl}})$$

が定まる. 以下 $\lambda \in X^*(H^{\mathrm{spl}})$ に対して対応する $\mathbb{H}^{\mathrm{spl}}$ の既約表現を *1* つ選び, これを $\mathfrak{u}(\lambda)$ と書く. $\mathfrak{u}(\lambda)$ は射影により $\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}$ の表現と見なす.

(2)

$$X^\flat(H^{\mathrm{spl}}) \coloneqq \{\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{Z}^n : \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n, \ \lambda_i = \lambda_{i+1} \Rightarrow \lambda_i = 0\}$$

とする. このとき $X^\flat(H^{\mathrm{spl}}) \cong \mathrm{Irr}_\Pi \, \mathrm{Q}_n; \ \lambda \mapsto \mathrm{soc} \, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}}^{\mathrm{Q}_n} \mathfrak{u}(\lambda)$ である. また, $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathrm{Q}_n}(\mathrm{soc} \, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}}^{\mathrm{Q}_n} \mathfrak{u}(\lambda))$ は中心的かつ

$$[\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(\mathrm{soc} \, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}}^{\mathrm{Q}_n} \mathfrak{u}(\lambda))] = [\bar{C}(F^n, q^{-\lambda})] \in \mathrm{BW}(F)$$

が成り立つ.

$\mathfrak{u}(\lambda)$ は単純左 $C(F^n, q^\lambda)$ スーパー加群の構造を持つ. 特に $\mathfrak{u}(\lambda)$ は 1 次元とは限らない. また, $\mathfrak{u}(\lambda)$ の同型類は最大 2 つある (何らか 1 つとそのパリティ変更). 2 つある場合にこ

れらを標準的に区別する方法は一般的には存在しない．前節で述べたように (2) があることによって Π の同一視無しで既約表現の分類が決定される．

$[\bar{C}(F^n, q^{-\lambda})]$ の計算については退化部分である $\lambda_i = 0$ の部分を無視して定理 3.19 を適用することで計算できる．対応する具体的なスーパー多元体は定理 3.18 の通りである．

上記の定理の経緯について述べる．まず Penkov 氏が標数 0 の代数閉体上のスーパー Lie 環の設定で上述の既約表現の分類を与えた．その後 Brundan 氏と Kleshchev 氏は標数が 2 でない代数閉体上の奇怪スーパー群の既約表現の分類を与えた[*4]．柴田氏は一般の標数が 2 でない体上の分裂準簡約スーパー代数群に対する Borel–Weil 理論を展開することで分類の結果を得た．ただし彼の方法では $X^\flat(H^{\mathrm{spl}})$ は抽象的に定義されるものでしかなく，上述のような組み合わせ論的記述は一般論としてはわかっていない．(2) の中心性について，$F = \mathbb{C}$ のときは Schur の補題による．$F = \mathbb{R}$ のときは (1) の写像 $\mathrm{Irr}_\Pi \mathbb{H}^{\mathrm{spl}} \to X^*(H^{\mathrm{spl}})$ の構成からわかる．後半の等式は柴田氏の議論を Brauer–Wall 群の言葉に翻訳した結果である (必要なら [7, Proposition 5.8] を参照せよ)．「分裂」と呼ばれているにも関わらず $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(\mathrm{soc}\,\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}}^{\mathrm{Q}_n} \mathfrak{u}(\lambda))$ が非自明になるのは $C(F^n, q^\lambda)$ の単純スーパー加群が底変換と可換でないからである．これにより定理 2.1 (1) (II) のような Galois 降下の問題が現れる．それに加えてパリティを取り換える自己同型があるかという基本的な問題があることも注記しておく．

4.3 非分裂な実形の場合に関する一般的な注意

この節では Q_n と書いたら複素奇怪スーパー群のことを指すことにする．次節から Q_n のある 2 系列の実形の既約表現を調べる．その前にいくらか一般的な事柄について述べておきたい:

- $g \mapsto \mathrm{diag}(g, g)$ により GL_n を Q_n の部分群と見なす．これは Q_n の偶部と言われる部分群で標準的な定義が存在する．
- 奇怪スーパー群の特筆すべき性質として，$\mathfrak{q}_{n,\bar{0}}$ と $\mathfrak{q}_{n,\bar{1}}$ の H^{spl} に関する (非零)[*5] ルートの集合が一致することであることが挙げられる．さらにこれらのルート集合は $(\mathrm{GL}_n, H^{\mathrm{spl}})$ のルート集合と一致する．$\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}$ は [13] の意味で標準的な負ルートの集合と対応する．このことから，$(\mathrm{Q}_n, H^{\mathrm{spl}})$ の実形 $(\mathbb{G}, H)$ が与えられたとき $\bar{\mathbb{B}}^{\mathrm{spl}}$ は $(\mathrm{GL}_n, H^{\mathrm{spl}})$ の Weyl 群捻りにより $\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}$ に戻すことができる ($\bar{B}^{\mathrm{spl}} = wB^{\mathrm{spl}}w^{-1}$)．従って定理 2.5 のようなことが出来ることが想定される．実際，例えば次の全単射が

[*4] 正標数の場合は $X^\flat(H^{\mathrm{spl}})$ の記述については標数に関連して修正が必要である．

[*5] $\mathfrak{q}_{n,\bar{1}}$ は非零な零ウェイト空間を持つ．このウェイトをルートと呼ぶかどうかは人や状況に依るようである．本稿では零ウェイトは含めないものとする．

ある:

$$X^\flat(H^{\mathrm{spl}}) \cong \mathrm{Irr}_\Pi\,\mathrm{Q}_n \cong \mathrm{Irr}_\Pi\,\mathbb{G}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \quad \Gamma\backslash X^\flat(H^{\mathrm{spl}}) \cong \mathrm{Irr}_\Pi\,\mathbb{G}.$$

ここで, Γ の $X^\flat(H^{\mathrm{spl}})$ への作用は $H^{\mathrm{spl}} \subset \mathrm{GL}_n$ の実形により定まる $*$ 対合である. Π が残ってしまうが, これは前述のとおり実既約表現の自己準同型スーパー多元体を計算することで解消することができる.

- 分裂の場合でも $\mathbb{E}\mathrm{nd}$ が非自明であったのは $\mathfrak{u}(\lambda)$ の降下の問題と関係した. 次節以降は $\mathbb{B}^{\mathrm{spl}}$ の共役を取ることによって上述の w が $\mathbb{E}\mathrm{nd}$ の決定に関与することが想定される. $\mathfrak{u}(\lambda)$ 本位に見れば, $\mathfrak{u}(\lambda)$ の 「w による捻り付きの有理性」を考えることになるはずである.
- $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}})$ が中心的であることと $*\lambda = \lambda$ が成り立つことは同値である. これらの条件が成り立たないとき $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}})$ は $\mathbb{C}$ 上中心的である.

上述のように $\mathfrak{u}(\lambda)$ と $\Pi\mathfrak{u}(\lambda)$ の区別は一般には困難であり, これにより Borel–Weil 型の定理を Q_n の実形に対して与えることは困難であるように思える. しかし以下で述べる実形の場合は相異なる理由から偶然うまく計算出来たのでその報告を以て本稿を終える.

4.4 ユニタリ奇怪スーパー群に対する Borel–Weil の定理

定義 4.4 ([7, Example 5.37])**.** 非負整数 $n = p + q \geq 0$ に対して複素奇怪スーパー群 Q_n の実形 $\mathrm{Q}(p, q)$ を次で定義する:

$$\mathrm{Q}(p,q;A) = \{g \in \mathrm{Q}_n(A\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}) :\ (\delta g)^* I_{p,q|p,q}\, g = I_{p,q|p,q}\},$$

$$I_{p,q|p,q} \coloneqq \mathrm{diag}(I_p, -I_q, I_p, -I_q),$$

$$\delta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \sqrt{-1}b \\ -\sqrt{-1}c & d \end{pmatrix}, \quad (-)^* : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a}^T & \bar{c}^T \\ -\bar{b}^T & \bar{d}^T \end{pmatrix}.$$

定理 4.5 ([7, Example 6.13])**.** *(1)* $X^\flat(H^{\mathrm{spl}})$ の $*$ 対合は $\lambda \mapsto (-\lambda_{p+q+1-i})$ で与えられる.

(2) $\bar{\lambda} = w\lambda$ とする. このとき $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathrm{Q}(p,q)}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ である.

(3) $\bar{\lambda} \neq w\lambda$ とする. このとき次が成り立つ:

$$[\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}})] = [\bar{C}(\mathbb{C}^n, q^\lambda)] \in \mathrm{BW}(\mathbb{C}).$$

重要なのは $\bar{\lambda} = w\lambda$ の場合である. 両辺を計算して具体的な数値的条件を書き下してみると, その数値的制約から奇跡的に表現の構成について実形と整合的になり前述のような区別の問題が発生しなくなることがわかる. というのも定理 4.3 及び 3.19 により $\Pi V(\mathfrak{u}(\lambda)) \not\cong V(\mathfrak{u}(\lambda))$ がわかる. また, $\mathfrak{u}(\lambda)$ の構成に立ち返ってある良い選択のもと計算してみると, $\mathfrak{u}(\lambda)$ は w 捻り付きの共役とぴったり一致することがわかる (ここにも $\bar{\lambda} = w\lambda$

が使われる). このことから $V(\mathfrak{u}(\lambda))$ は自己共役であることがわかる. 2 つの結果と Loewy 氏による実既約表現の構成を合わせると $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}})_{\bar{1}}=0$ がわかる ([7, Proposition 3.26]).

あとは指数の計算が問題であるが, これについては偶部 $\mathrm{U}(p,q)$ の既約表現と $\mathfrak{u}(\lambda)$ の寄与に「分ける」ことができる ([7, Theorem 5.46]). $\mathrm{U}(p,q)$ 側の寄与は例えば定理 2.5 を使って計算してみると自明であることがわかる ([6, Example 4.1.3]). あとは $\mathfrak{u}(\lambda)$ の方であるがこちらは「w 捻り付き指数」とでも呼ぶべきものを計算することになる. 指数を定義する式に w の捻りを適切に付けるということを意図しているが, $\mathfrak{u}(\lambda)$ の w 捻り付きの共役が $\mathfrak{u}(\lambda)$ とぴったり一致することから指数はその式は恒等射になり, 指数は 1 であるとわかる. 以上を合わせることで (2) が従う.

ということで (2) の計算には奇部が自明になること及び $\mathfrak{u}(\lambda)$ の寄与が自明になることが重要だった. そしてそれらは $\bar{\lambda}=w\lambda$ という組み合わせ論的条件によりかなり幸運が重なったことが要因であった.

4.5 四元数奇怪スーパー群に対する Borel–Weil の定理

定義 4.6 ([7, Example 5.38])**.** 複素奇怪スーパー群 Q_{2n} の実形 $\mathrm{Q}^*(2n)$ を次で定める:

$$\mathrm{Q}^*(2n;A)=\{g\in \mathrm{Q}_{2n}(A\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}):\ \bar{g}J_{n|n}=J_{n|n}g\},$$
$$J_{n|n}=\mathrm{diag}(J_n,J_n).$$

定理 4.7 ([7, Example 6.12])**.** *(1)* $X^\flat(H^{\mathrm{spl}})$ の $*$ 対合は自明である.

(2) 標準的に $\{\pm1\}\cong \mathrm{Br}(\mathbb{R})\subset \mathrm{BW}(\mathbb{R})$ と見なす. このとき

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathbb{G}}(V(\mathfrak{u}(\lambda))_{\mathbb{R}})=(-1)^{\sum_{i=1}^{2n}\lambda_i}[\bar{C}(\mathbb{R}^n,q^{-\lambda})]\in \mathrm{BW}(\mathbb{R})$$

である.

今回の場合, 一度複素化をスーパー群の複素化を経由して実形を取り直すことで実分裂奇怪スーパー群 Q_{2n} の場合に帰着できるという奇跡が起こる. 直接 $\mathrm{Q}^*(2n)$ と実分裂奇怪スーパー群 Q_{2n} を比較して実表現に関する結果を「移送」する. このときのひずみとして $\mathrm{Q}^*(2n)$ のブロック対角部である $\mathrm{U}^*(2n)$ の複素既約表現の指数が係数 $(-1)^{\sum_{i=1}^{2n}\lambda_i}$ として現れる. 結果的に $\mathrm{U}^*(2n)$ と実分裂奇怪スーパー群 Q_{2n} に対する同問題に完全に分けて計算が出来, その結果が上である.

なぜこのようなことが起こるのか? これは先ほどとは異なり, 群の構造的な奇跡による. まず偶部からの寄与とも言える $*$ 作用が一致する. 実際両方自明であり複素既約表現が共に Π を除いて自己共役になるとわかる. それでも指数はずれて $\mathrm{U}^*(2n)$ の複素既約表現の指数が現れる. あとは奇部の寄与である $\mathfrak{u}(\lambda)$ に関する部分だが, $*$ 作用を延長して $\mathbb{H}$ の複素化

の「$*$ 作用」に延長できる．これが $\mathrm{Q}^*(2n)$ と実分裂奇怪スーパー群 Q_{2n} の方で一致することで $\mathfrak{u}(\lambda)$ やその捻り付き共役を直接比較することができる．以上から，偶部の指数の寄与さえ無視すれば $\mathrm{Q}^*(2n)$ と実分裂奇怪スーパー群 Q_{2n} の複素既約表現や $\mathfrak{u}(\lambda)$ 及びその (捻り付き) 複素共役がすべて直接対応し，結果定理 4.3 が引用できるのである．最後の結論を正確に説明するためには定理 3.18 (2) の全単射の構成の理論的な説明が必要である．詳細は割愛する．

参考文献

[1] J. Brundan and A. Kleshchev. Modular representations of the supergroup $Q(n)$. I. volume 260, pages 64–98. 2003. Special issue celebrating the 80th birthday of Robert Steinberg.

[2] E. Cartan. Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:149–186, 1914.

[3] P. Deligne. Notes on spinors. In *Quantum fields and strings: a course for mathematicians, Vol. 1, 2 (Princeton, NJ, 1996/1997)*, pages 99–135. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[4] J. M. G. Fell. Conjugating representations and related results on semi-simple Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:405–426, 1967.

[5] G. Frobenius and I. Schur. Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen. *Berl. Ber.*, 1906:186–208, 1906.

[6] T. Hayashi. Half-integrality of line bundles on partial flag schemes of classical Lie groups. *Bull. Sci. Math.*, 188:Paper No. 103317, 2023.

[7] T. Hayashi. Classification of irreducible representations of affine group superschemes and the division superalgebras of their endomorphisms. arXiv:2309.15967 (2023).

[8] N. Iwahori. On real irreducible representations of Lie algebras. *Nagoya Math. J.*, 14:59–83, 1959.

[9] A. Loewy. Ueber die Reducibilität der Reellen Gruppen linearer homogener Substitutionen. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4(2):171–177, 1903.

[10] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[11] A. L. Onishchik. *Lectures on real semisimple Lie algebras and their representations*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[12] I. B. Penkov. Characters of typical irreducible finite-dimensional $\mathfrak{q}(n)$-modules. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(1):37–45, 96, 1986.

[13] T. Shibata. Borel-Weil theorem for algebraic supergroups. *J. Algebra*, 547:179–219, 2020.

[14] J. Tits. Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples (d'après V. Morozov, A. Malčev, E. Dynkin et F. Karpelevitch). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 3*, pages Exp. No. 119, 197–214. Soc. Math. France, Paris, 1956.

[15] C. T. C. Wall. Graded Brauer groups. *J. Reine Angew. Math.*, 213:187–199, 1963/64.