一様な測度を持つ粗空間上の Ponzi scheme について

東京大学大学院数理科学研究科 宮内俊輔
Shunsuke Miyauchi
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

Block-Weinberger は 1992 年に Ponzi scheme という関数を用いて有限生成離散群の従順性を距離空間に対して拡張した．これは粗幾何学的な観点からの従順性の一般化である．本稿では，Ponzi scheme のアナロジーである μ-PS(μ-Ponzi scheme) と Winkel(2021) の従順性の関連について考察する．

1 序

局所コンパクト群の従順性は 1929 年に von-Neumann[3] によって定義された概念であり，当初は Banach-Tarski のパラドックスを説明するために導入された．その後，特に有限生成離散群はある意味での粗同値不変な性質を持つということから，粗幾何学の観点から Block-Weinberger[1] および Roe[2]，Winkel[4] によって粗空間の従順性が定式化された．Block-Weinberger と Roe は Ponzi scheme という関数の非存在によって従順性を定式化し (定義 4.2)，Winkel はある条件の満たす線形作用素が存在することで定式化を行った (定義 5.1)．

本稿では Winkel[4] によって与えられた '測度の一様性' という概念を用いて，Ponzi scheme の再定式化（本稿では μ-PS と呼ぶ, 定義 4.1）について考察する．ここで，Ponzi scheme は粗空間のみを用いて定義される概念であるが，μ-PS は粗空間と一様な測度を用いて定式化される概念である．

本稿の主結果は以下の定理である．

定理 5.3. 粗空間 X が一様な測度 μ を持つと仮定する．このとき，以下の 3 条件は同値である．

1. X は Ponzi scheme を持つ.

2. X は μ-PS を持つ.
3. X は Winkel の従順性条件を満たす.

この定理により，Block-Weinberger, Roe の定式化と Winkel の定式化が同値であることがわかる．第 5 章ではこの定理の証明の概略を述べる.

2　粗空間

この章では，粗空間の定義とその間の写像について復習する．X を集合とする．以下のように記号を約束する：

- 集合 $E \subset X \times X$ に対して，E の転置集合 E^T を $E^T \coloneqq \{(x', x) \colon (x, x') \in E\}$ で定める.
- 集合 $E_1, E_2 \subset X \times X$ に対して, 集合の合成 $E_1 \circ E_2$ を $E_1 \circ E_2 \coloneqq \{(x, z) \colon (x, y) \in E_1, (y, z) \in E_2$ なる y が存在する $\}$ で定める.
- 集合 $E \subset X \times X, K \subset X$ に対して，$E[K] \coloneqq \{y \in X \colon (x, y) \in E, x \in K\}$ と書く．特に, $E_x \coloneqq E[\{x\}]$ と書き，これを x の E 近傍と呼ぶ.
- Δ_X を対角線集合，すなわち $\Delta_X = \{(x, x) \colon x \in X\}$ とする.
- 写像 $\varphi \colon X \to Y$, 集合 $E \subset X \times X$ に対して, E の $\varphi \times \varphi$ による像を $(\varphi \times \varphi)_*(E) \coloneqq \{(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \colon (x_1, x_2) \in E\}$ と書く.

定義 2.1. ([2, Def. 2.3, Prop. 2.16])

1. $X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{E}$ が**粗構造**（coarse structure）であるとは，以下の条件を満たすときをいう：
   (a) $\Delta_X \in \mathcal{E}$
   (b) $E \subset E'$ で $E' \in \mathcal{E}$ ならば $E \in \mathcal{E}$ である.
   (c) $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$ である.
   (d) $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば $E_1 \circ E_2 \in \mathcal{E}$ である.
   (e) $E \in \mathcal{E}$ ならば $E^T \in \mathcal{E}$ である.
   また，$\mathcal{E}$ の元のことを**制御された集合**（controlled set）と呼ぶ．粗構造 $\mathcal{E}$ を持つ集合 X のことを**粗空間**（coarse space）と呼ぶ.
2. 粗空間 X の部分集合 B が**有界**（bounded）であるとは制御された集合 E と元 x が存在して $B \subset E_x$ を満たすことをいう.

粗空間の間の写像を考察するために，以下の概念を導入する．

定義 2.2. ([2, Def. 2.14, Def. 2.21])

1. X が粗空間で S が集合とする．二つの写像 $\varphi_1, \varphi_2 \colon S \to X$ が**近い**（close）とは集合 $\{(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) \colon s \in S\}$ が制御された集合であるときをいう．このとき，$\varphi_1 \sim \varphi_2$ と書く．
2. $\varphi \colon X \to Y$ を粗空間の間の写像とする．
   (a) 写像 φ が**ボルノロガス**（bornologous）とは，X 上の任意の制御された集合 E に対して，$(\varphi \times \varphi)_*(E)$ が Y 上で制御された集合になるときをいう．
   (b) ボルノロガスな写像 $\varphi \colon X \to Y$ が**粗同値**（coarsely equivalent）であるとはあるボルノロガスな写像 $\psi \colon Y \to X$ が存在して $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{i.d.}_X, \varphi \circ \psi \sim \mathrm{i.d.}_Y$ が成り立つときをいう．

一つ粗空間の例を挙げよう．

例 2.3. ([2, Ex.2.5]) (X, d) を距離空間とする．距離から定まる**有界粗構造** $\mathcal{E}^d$ を $\mathcal{E}^d \coloneqq \{E \subset E_r \colon r > 0\}$ と定める．ここで，E_r は $E_r \coloneqq \{(x, y) \colon d(x, y) \leq r\}$ で定義される集合である．

3 測度の一様性

この章では粗空間の可測性と Winkel[4] によって導入された測度の一様性について議論する．以下，X を集合, $\mathcal{B}$ を X 上の σ 加法族，$\mathcal{E}$ を X 上の粗構造とする．

定義 3.1. 粗構造 $\mathcal{E}$ が**可測**であるとは，任意の制御された集合 E に対して，積空間 $X \times X$ 上で可測でかつ制御された集合 $\tilde{E} \in (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \cap \mathcal{E}$ が存在して[*1]，$E \subset \tilde{E}$ を満たすことをいう．

注 3.2. Winkel[4] も粗構造の可測性について定義しているが，上の定義とは異なる．

実際，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の可測集合 E' で第一成分への射影が Borel 可測集合ではないものが存在する．集合 $E \coloneqq E' \cap [0, 1] \times [0, 1]$ は定義 3.1 の意味で $\mathbb{R}$ 上の可測な制御された集合であるが，Winkel [4] の意味では可測な制御された集合ではない．逆に，$X = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に離散位相を入れたものについて，対角線集合 Δ_X は Winkel [4] の意味で X 上可測な制

[*1] $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ は矩形集合全体 $\{E \times F \colon E, F \in \mathcal{B}\}$ を含む最小の σ 加法族のことである．

御された集合になるが，定義 3.1 の意味では可測な制御された集合にはならない．

定義 3.3. ([4, Def. 3.6])

1. X 上の測度 μ が粗構造 $\mathcal{E}$ に関して**一様有界**（uniformly bounded）であるとは任意の可測な制御された集合 E に対して，

$$\sup_{x\in X} \mu(E_x) < \infty$$

が成り立つことをいう．

2. 可測な制御された集合 E が **μ-太い**（μ-gordo）とは

$$\inf_{x\in X} \mu(E_x) > 0$$

が成り立つことをいう．

3. μ が粗構造 $\mathcal{E}$ に対して**一様**（uniform）であるとは，一様有界であって，μ-太い可測集合が存在することをいう．

例 3.4. (X, d) を可分な距離空間とし，X 上のボレル集合全体 $\mathcal{B}$ で可測構造を定める．このとき，有界粗構造 $\mathcal{E}^d$ は可測になる．

また，X 上の測度 μ が一様有界であることと，任意の $r > 0$ について $\sup_{x\in X} \mu((E_r)_x) < \infty$ が成り立つことは同値である．μ-太い可測集合が存在することと，十分大きな $R >> 0$ について $\inf_{x\in X} \mu((E_R)_x) > 0$ が成り立つことは同値である．

4 μ-PS と Ponzi scheme

本章では μ-PS(μ-Ponzi scheme) を定義し，Ponzi scheme を復習する．以下，μ は粗構造に対して一様有界であることと，測度空間 (X, μ) が σ 有限であることを仮定する．

定義 4.1.

1. 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が **μ-0 チェイン**であるとは，測度空間 (X, μ) 上の本質的有界関数であるとき，すなわち $f \in L^\infty(X, \mu)$ であるときをいう．X 上の μ-0 チェイン全体の集合を $C_0(X, \mu)$ と書く．[*2]
2. 関数 F が **μ-1 チェイン**であるとは積測度空間 $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ 上の本質的有界関数であって，ある可測な制御された集合 E_F が存在して $\mathrm{supp} F \subset E_F$ を満たす，

[*2] $L^\infty(X, \mu) = C_0(X, \mu)$ である．

つまり

$$\int_{X\times X\setminus E_F} |F| d\mu\otimes\mu = 0$$

であるときをいう．X 上の μ-1 チェイン全体の集合を $C_1(X,\mu)$ とかく．

3. **境界写像**（boundary map）$\partial\colon C_0(X,\mu)\to C_1(X,\mu), F\mapsto \partial F$ を以下で定める：

$$\partial F(x) = \int_X F(y,x)d\mu(y) - \int_X F(x,y)d\mu(y).$$

4. μ-1 チェイン F が μ**-PS** であるとは，ある $\varepsilon>0$ が存在して μ に関してほとんど至るところ $\partial F\geq\varepsilon$ を満たすときをいう．

μ-PS の言葉を用いて Ponzi scheme を説明してみよう．

定義 4.2. ([2, Def. 3.27-Def. 3.32],[1])

1. $\Lambda\subset X$ が**擬格子**（quasi latice）であるとは下記の 2 条件を満たすことをいう：
   - ある制御された集合 E_0 に対して $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(E_0)_\lambda = X$ を満たす．
   - すべての制御された集合 E について $\displaystyle\sup_{x\in X}\#(E_x\cap\Lambda)<\infty$ を満たす．
2. $\Psi\colon X\times X\to\mathbb{R}$ が **Ponzi scheme** であるとはある擬格子 Λ が存在して，$\mathrm{supp}\Psi\subset\Lambda\times\Lambda$ で Ψ が Λ 上の $\#$-PS であるときをいう．

Ponzi scheme は以下の意味で粗同値不変性がある．

事実 4.3. ([2, Prop. 3.35],[1]) 粗空間 X と Y が粗同値で，X が Ponzi scheme を持つとき，Y も Ponzi scheme を持つ．

以下に μ-PS と Ponzi scheme の例を挙げる．

例 4.4. X がポアンカレ円盤で d をポアンカレ計量から誘導される距離，μ を不変測度とする．このとき，以下で定義される関数 $F\colon X\times X\to\mathbb{R}$

$$F(z,z') := \begin{cases} 1 & (d(z,z')\leq 1 \ \&\ d(z,0)\geq d(z',0)) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

は μ-PS である．

例 4.5. ([2, Ex. 3.46]) 2 元生成自由群 $\mathbb{F}_2=\langle a,b\rangle$ 上の Ponzi scheme として以下の Ψ が取れる（有限生成離散群では擬格子として自身をとれることに注意する）．

$$\Psi(g,g') := \begin{cases} 1 & (d(g,g')\leq 1 \ \&\ d(g,e)\geq d(g',e)) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

以下の事実によって Ponzi scheme の非存在は従順性の一般化とみなせる．

事実 4.6. ([1]) G を有限生成離散群とし，d を語距離とする．このとき，G が従順群であることと粗空間 $(G, \mathcal{E}^d)$ が Ponzi scheme を持たないことが同値である．

よって，事実 4.6 と事実 4.3 により，有限生成離散群について従順性は粗同値不変であることがわかる．

事実 4.7. 有限生成離散群 G, G' がそれぞれの語距離について粗同値であると仮定する．このとき，G が従順群であることと G' が従順群であることは同値である．

5 主結果

本稿の主結果（定理 5.3）に出てくる概念の定義を述べ，証明の概略を与える．なお，本章では粗空間 X 上の測度 μ に対して一様性条件，すなわち，μ が一様有界であることと X が μ 太い可測集合をもつこと，を仮定する．

定義 5.1. [4]

1. X の可測集合族 $\{A_i\}_i$ が**ブロック形**（blocking collection）であるとは以下の 3 条件を満たすことをいう：
   - A_i がそれぞれ互いに交わらない集合である
   - $\bigsqcup_i A_i \times A_i$ が制御された集合となる
   - ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在してすべての i について $\mu(A_i) > \varepsilon$ が成り立つ
2. 一様な測度 μ を持つ粗空間が **Winkel の従順性条件**[*3]をみたすとは以下の 3 条件を満たす $L^\infty(X, \mu)$ 上の線形汎関数 φ が存在するときをいう：
   - μ に関してほとんど至るところすべて非負の値をとる関数 $f \in L^\infty(X, \mu)$ について，$\varphi(f) \geq 0$ が成り立つ．
   - X 上の定義関数 1_X について，$\varphi(1_X) = 1$ が成り立つ．
   - 関数 $f \in L^\infty(X, \mu)$ とブロック形の可測集合族 $\{A_i\}_i$ について, すべての i について $\int_{A_i} f d\mu = 0$ で，$\bigcup_i A_i$ の外では $f \equiv 0$ となるとき，$\varphi(f) = 0$ となる．

Winkel の従順性条件は以下の意味で従順性の一般化とみなせる．

[*3] Winkel[4] はこれらの条件を満たす（一様な測度 μ をもつ）粗空間 X を単に amenable であると呼んでいる．

事実 5.2. G を有限生成離散群とし d を語距離とする．このとき，G が従順群であることと $(G, \mathcal{E}^d)$ を数え上げ測度つきの粗空間として Winkel の従順性条件を満たすことは同値である．

ここで本稿の主結果である定理 5.3 を再掲しよう．

定理 5.3. 粗空間 X が一様な測度 μ を持つと仮定する．このとき，以下の 3 条件は同値である．

1. X は Ponzi scheme を持つ．
2. X は μ-PS を持つ．
3. X は Winkel の従順性条件を満たす．

この定理の証明の概略を述べる．条件 1. と条件 2. の同値性を示すために以下の補題を用意する：

補題 5.4. 測度 μ が粗構造に関する一様性条件を満たすとき，以下の 3 条件を満たすような擬格子 Λ と互いに交わらない可測集合族 $\{\tilde{E}_\lambda\}_\lambda$ が存在する：

1. $\displaystyle\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{E}_\lambda \times \tilde{E}_\lambda$ は X 上の制御された集合である．
2. $X = \displaystyle\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{E}_\lambda$.
3. ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mu(\tilde{E}_\lambda) > \varepsilon$ が成り立つ．

この補題によって，測度 μ を持つ粗空間と（数え上げ測度をもつ）その上の擬格子を‘粗い意味で同一視’でき，このことを用いて，Ponzi scheme と μ-PS を互いに構成しあうことができる．ここで，同じ粗空間上の擬格子は互いに粗同値であるので，必要であれば擬格子を上の条件を満たすものとして取り直してよいことに注意する．

背理法を用いて直接計算すれば，条件 3. から条件 2. を導くことができる．条件 2. から条件 3. を導くために Hahn-Banach の拡張定理を用いる．

謝辞

本稿は 2024 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「表現論と調和解析のひろがり」（2024 年 6 月 11 日（火）- 6 月 14 日（金））の講究録です．発表の機会をくださりました世話人の田中雄一郎氏に深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] Jonathan Block and Shmuel Weinberger. Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(4):907–918, 1992.

[2] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] John von Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fund. Math.*, 13(1):73–111, 1929.

[4] Jeroen Winkel. Geometric property (T) for non-discrete spaces. *J. Funct. Anal.*, 281(8):Paper No. 109148, 36, 2021.