# Discrete quantum subgroups of complex semisimple quantum groups

理化学研究所 数理創造プログラム　北村 侃 *
Kan Kitamura
RIKEN iTHEMS

本稿では, 複素半単純 Lie 群の離散部分量子群の分類について [9] の結果を述べる. なお, 本稿を通じて特に断らない限り, ベクトル空間の係数体は $\mathbb{C}$ とし, 位相空間には Hausdorff 性を仮定する.

## 1　局所コンパクト量子群についての用語

作用素環を用いた量子群の定式化である, 局所コンパクト量子群についての用語を本節にまとめる.

**定義 1.1.** $M$ を単位的, 結合的な $\mathbb{C}$ 上の代数とし, 完備なノルム $\|-\|$ および反線形の反自己同型 $(-)^*\colon M \to M$ であって $(-)^{**} = \mathrm{id}_M$ なものが付随している状況を考える.

- $M = (M, \|-\|, (-)^*)$ が**単位的 C*環**とは, 全ての $a, b \in M$ について, $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$ かつ $\|aa^*\| = \|a\|^2$ となること.
- $M = (M, \|-\|, (-)^*)$ が **von Neumann 環**または **W*環**とは, C*環で, さらに Banach 空間 $X$ であって, $M$ が $X$ の双対空間になるようなものが存在すること. この $X$ はもしあれば唯一で, $M$ の前双対と呼ばれ $M_*$ としばしば書かれる.

**定義 1.2.** $M$, $N$ を von Neumann 環とする.

- 単位元を保つ $\mathbb{C}$ 代数としての準同型 $f\colon M \to N$ が***準同型**とは, 全ての $a \in M$ について $f(a^*) = f(a)^*$ となること. *準同型 $f$ が**正規**であるとは, 連続線形写像

* 〒351-0198 和光市広沢 2-1
Email: kan.kitamura@riken.jp
本研究は, 日本学術振興会科研費番号 JP21J21283, 科学技術振興機構 CREST プログラム JP-MJCR18T6, 日本学術振興会若手研究者海外挑戦プログラム, 東京大学 WINGS-FMSP プログラムの助成を受けている.

$g\colon N_* \to M_*$ で $g^* = f$ となるものが存在すること.

- $\omega \in M_*$ を有界線形写像 $M \to \mathbb{C}$ とみなしたとき, $\omega$ が $M$ の**正規状態** とは, $\omega(1_M) = 1$ かつ全ての $a \in M$ について $\omega(a^* a) \geq 0$ となること.

Von Neumann 環の族 $(M_i)_{i \in I}$ について, (von Neumann 環と正規*準同型がなす圏での) 直積 $\prod_{i \in I} M_i$ は, $M_i$ たちの $\ell^\infty$ 直和 $\{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i, \|(a_i)_{i \in I}\| := \sup_{i \in I} \|a_i\| < \infty\}$ により与えられる. Von Neumann 環 $M$, $N$ の, von Neumann 環としてのテンソル積も考えることができる. これは慣習的に $M \bar{\otimes} N$ と表され, 代数的なベクトル空間としてのテンソル積 $M \otimes N$ を $((M \bar{\otimes} N)_*$ についての) 弱*位相で稠密な部分代数として含む.

**例 1.3.** $X$ と $Y$ を測度空間とすると, $L^\infty(X)$ は von Neumann 環で, $L^\infty(X)_* \cong L^1(X)$ となる (厳密には $X$ が $\sigma$ 有限でないときには $L^\infty(X)$ の定義は少し工夫が必要であるが, ここでは深く触れないことにする). $L^\infty(X)$ の正規状態は, $X$ 上の非負値な可測関数で $L^1$ ノルムが 1 のものと 1 対 1 に対応する. テンソル積について, $L^\infty(X) \bar{\otimes} L^\infty(Y) \cong L^\infty(X \times Y)$ となる. この意味で, von Neumann 環は測度空間の非可換な一般化とみなせる.

なお, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の上の有界作用素全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は (作用素ノルムと共役演算について)von Neumann 環である. 任意の von Neumann 環 $M$ はある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の von Neumann 部分環として実現できる (つまり, ある単射な正規*準同型 $M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在する). これらの作用素環の基本的な事項については, 教科書 [14] などを参照されたい.

**例 1.4.** $G$ を局所コンパクト群とし, その左ないし右 Haar 測度をそれぞれ $h_l$, $h_r$ とおく. すると, $L^\infty(G)$ は von Neumann 環で, 次の well-defined な正規*準同型をもつ:

$$\begin{gathered} \Delta_G\colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) \cong L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(G). \\ f \mapsto [(g_1, g_2) \mapsto f(g_1 g_2)] \end{gathered}$$

この $\Delta_G$ は $G$ の二項演算を $L^\infty(G)$ の言葉で書き換えたものとみなせる.

また, $\phi, \psi\colon L^\infty(G)_+ \to [0, \infty]$ を $\phi := \int_G (-) dh_l$, および $\psi := \int_G (-) dh_r$ と定義しておくと, $\phi$ や $\psi$ は $G$ の Haar 測度の情報をもっている.

この四つ組 $(L^\infty(G), \Delta_G, \phi, \psi)$ は次の定義で述べる条件を満たしている.

**定義 1.5** (Kustermans–Vaes [10, 11])**. 局所コンパクト量子群**とは, von Neumann 環 $M$ と正規*準同型 $\Delta_G\colon M \to M \bar{\otimes} M$ からなる二つ組 $G = (M, \Delta_G)$ で, 次を全て満たすもの.

- $\Delta_G$ は余結合的. つまり, $(\Delta_G \bar{\otimes} \mathrm{id}_M)\Delta_G = (\mathrm{id}_M \bar{\otimes} \Delta_G)\Delta_G$ が成立する.
- 写像 $\phi, \psi\colon M_+ := \{a^* a \mid a \in M\} \to [0, \infty]$ であって, 次を満たすものが存在する:
  - $M$ の正規状態の非負実数倍からなる族 $\Phi \subset M_*$ であって, 全ての $a \in M_+$ について $\phi(a) = \sup_{\omega \in \Phi} \omega(a)$ となるものがある. $\psi$ についても同様.

特に, $\phi(0)=0$ かつ $\phi(sa+tb)=s\phi(a)+t\phi(b)$ が全ての $a,b\in M_+$, $s,t\in(0,\infty)$ について成立.

– 全ての $0\neq a\in M_+$ について, $\phi(a)>0<\psi(a)$.
– $\phi^{-1}([0,\infty))\subset M_+$ の生成する線形空間が $M$ の中で弱*位相について稠密. $\psi$ についても同様.
– 全ての $a\in M_+$ と正規状態 $\omega\in M_*$ について, $\phi(\omega\,\bar{\otimes}\,\mathrm{id}_M)\Delta_G(a)=\phi(a)$ と $\psi(\mathrm{id}_M\,\bar{\otimes}\,\omega)\Delta_G(a)=\psi(a)$ が成立.

このとき, 形式的に $L^\infty(G):=M$ と書くことと約束する. また, $\Delta_G$ のことを $G$ の**余演算**と呼ぶことにする. さらに, 上の条件を満たす $\phi$ と $\psi$ は正の実数の掛け算を除いて唯一となることが知られており, それぞれ $G$ の**左**ないし**右 Haar 荷重**と呼ばれる.

なお, 2 つの局所コンパクト群 $G$, $H$ について, $G$ と $H$ が位相群として同型であることと, ある正規*同型 (正規*準同型で全単射なもの) $L^\infty(G)\cong L^\infty(H)$ であって余演算を保つものが存在することは同値であることが分かっている [2, 11]. なので, 上の定義は測度論的な見た目だが, 位相群としての局所コンパクト群の拡張になっている. 実際, 局所コンパクト位相空間の非可換化に相当する C*環を使っても上と同値な局所コンパクト量子群の定式化を与えることができる. しかし以降での記述を簡潔にするために, 本稿では von Neumann 環側の言葉で話を進めることにする.

もともと, Pontryagin 双対の非可換な拡張が局所コンパクト量子群を考える動機の一つであった. それぞれの局所コンパクト量子群 $G=(L^\infty(G),\Delta_G)$ に対して, Pontryagin 双対の一般化にあたる立ち位置の局所コンパクト量子群 $\widehat{G}=(L^\infty(\widehat{G}),\Delta_{\widehat{G}})$ が存在する. これは $\widehat{\widehat{G}}\cong G$ を満たす.

**注意.** $G$ を局所コンパクト量子群とする.

- $G$ が局所コンパクト群で例 1.4 のようにして与えられることと, $L^\infty(G)$ が環として可換になることは同値.
- $G$ が**コンパクト**量子群であるとは, $\phi(1)<\infty>\psi(1)$ となることとする.
- $G$ が**離散**量子群であるとは, $\widehat{G}$ がコンパクト量子群となることとする.

**定義 1.6.** 局所コンパクト量子群 $G$ の**閉部分量子群**とは, 局所コンパクト量子群 $H$ と単射な正規*準同型 $\iota\colon L^\infty(\widehat{H})\to L^\infty(\widehat{G})$ がなす二つ組 $(H,\iota)$ であって $\Delta_{\widehat{G}}\iota=(\iota\,\bar{\otimes}\,\iota)\Delta_{\widehat{H}}$ となるものとする. このとき, $\iota\colon H\to G$ とも書く. また, そのような $(H,\iota)$ が 2 つ与えられたとき, $L^\infty(\widehat{G})$ 内の像 $\iota(L^\infty(\widehat{H}))$ が一致するものについては同じ閉部分量子群を与えるものとみなすことにする.

閉部分量子群 $\iota\colon H\to G$ で, $H$ がさらに離散量子群にもなっているとき, $(H,\iota)$ を $G$

の**離散部分量子群**という．

$G$, $H$ を局所コンパクト群とする．すると，$L^\infty(\widehat{G})$ は $G$ の左正則ユニタリ表現の $\mathcal{B}(L^2(G))$ 内の像により生成される $\mathcal{B}(L^2(G))$ の von Neumann 部分環となる．このとき，連続群準同型 $H \to G$ が $G$ のある閉部分群への同相になっていることと，その連続準同型が well-defined な単射正規*準同型 $L^\infty(\widehat{H}) \to L^\infty(\widehat{G})$ を誘導することは同値であることが，Herz restriction theorem の帰結としてわかる (cf. [5])．

**定義 1.7.** $G$ を局所コンパクト量子群，$M$ を von Neumann 環とする．$M$ への**右 $G$ 作用**とは，単射正規*準同型 $\alpha\colon M \to M \mathbin{\bar{\otimes}} L^\infty(G)$ であって $(\alpha \mathbin{\bar{\otimes}} \mathrm{id}_{L^\infty(G)})\alpha = (\mathrm{id}_M \mathbin{\bar{\otimes}} \Delta_G)\alpha$ となるもののこととする．

このとき，$G$ 作用の不動点環を $M^\alpha := \{a \in M \mid \alpha(a) = a \mathbin{\bar{\otimes}} 1_{L^\infty(G)}\}$ により定義する．これは $M$ の von Neumann 部分環である．$\alpha$ が**エルゴード的**とは $M^\alpha = \mathbb{C}1_M$ となることとする．

同様に，$M$ への**左 $G$ 作用** とは，単射正規*準同型 $\alpha\colon M \to L^\infty(G) \mathbin{\bar{\otimes}} M$ で $(\mathrm{id}_{L^\infty(G)} \mathbin{\bar{\otimes}} \alpha)\alpha = (\Delta_G \mathbin{\bar{\otimes}} \mathrm{id}_M)\alpha$ となるもののこととする．

局所コンパクト量子群 $G$ の余演算 $\Delta_G$ はいつでも $L^\infty(G)$ 自身への 左/右 $G$ 作用を与える．$G$ の閉部分量子群 $(H, \iota)$ について，右 $G$ 作用 $\Delta_G$ の $H$ への "制限" にあたる右 $H$ 作用 $\Delta_\iota\colon L^\infty(G) \to L^\infty(G) \mathbin{\bar{\otimes}} L^\infty(H)$ を考えることができる．群のときのアナロジーから，$L^\infty(G/H) := L^\infty(G)^{\Delta_\iota}$ と書くと，$\Delta_G$ が $L^\infty(G/H)$ への左 $G$ 作用を再び与える．

## 2　複素半単純 Lie 群の $q$ 変形の離散部分量子群

量子群の興味深い例として，半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の Drinfeld–Jimbo による $q$ 変形 $U_q(\mathfrak{g})$ がある．コンパクト半単純 Lie 群 $K$ の表現論は，対応する Lie 環の普遍包絡環の表現論におおむね対応するように，$U_q(\mathfrak{g})$ の作用素環的な描像は $K$ の量子化にあたるコンパクト量子群を与える．もともと，$K = SU(n)$ の場合にこのコンパクト量子群は Woronowicz [17] によって構成され，作用素環的な量子群論が創始された．一方，コンパクト Lie 群の量子化とは別に複素半単純 Lie 群の量子化にあたるものを作用素環的に与えることができ，(コンパクトでない) 局所コンパクト量子群として興味深い例を与えている．

**例 2.1.** 1-連結なコンパクト Lie 群 $K$ について，$G$ を $K$ の複素化とし，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ とおく．

各パラメーター $0 < q < 1$ について，$\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の $q$ 変形 $U_q(\mathfrak{g})$ を考える．それぞれの dominant integral ウェイト $\lambda \in P_+$ に対し，Verma 加群の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての既約商 $V_\lambda$ は有限次元で，カノニカルな内積をもつ．すると，コンパクト量子群 $K_q$ であって，

その Pontryagin 双対 $\widehat{K}_q$ について, $L^\infty(\widehat{K}_q) \cong \prod_{\lambda \in P_+} \mathcal{B}(V_\lambda)$ で, $\Delta_{\widehat{K}_q}$ が $U_q(\mathfrak{g})$ の余演算により誘導されるようなものが存在する.

Von Neumann 環 $M$, $N$ について, 正規*同型 $\sigma\colon M \bar{\otimes} N \to N \bar{\otimes} M$ を $\sigma(a \bar{\otimes} b) := b \bar{\otimes} a$ で定める. $u^*u = 1_M = uu^*$ となる $u \in M$ のことを**ユニタリ**という.

**定義 2.2** ([18, 3])**.** 局所コンパクト量子群 $G$ について, ユニタリ $W^G \in L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(\widehat{G})$ であって, $(\Delta_G \bar{\otimes} \mathrm{id})(W^G) = ((\sigma \bar{\otimes} \mathrm{id})(1 \bar{\otimes} W^G))(1 \bar{\otimes} W^G)$ かつ $(\mathrm{id} \bar{\otimes} \Delta_{\widehat{G}})(W^G) = ((\mathrm{id} \bar{\otimes} \sigma)(W^G \bar{\otimes} 1))(W^G \bar{\otimes} 1)$ を満たすものが一意に存在する.

このとき, $\mathrm{D}(G) := \Big(L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(\widehat{G}), (\mathrm{id} \bar{\otimes} \sigma \mathrm{Ad} W^G \bar{\otimes} \mathrm{id}) \Delta_G \bar{\otimes} \Delta_{\widehat{G}}\Big)$ は well-defined な局所コンパクト量子群となり, $G$ の **quantum double** や **Drinfeld double** と呼ばれる.

**例 2.3.** $K$ を 1-連結なコンパクト Lie 群とし, $G$ を $K$ の複素化とする. 実数 $0 < q < 1$ について, $G_q := \mathrm{D}(K_q)$ とおき, $G$ の量子化とみなすことにする.

この構成の解釈の一つは, Iwasawa 分解 $G = KAN$ が与える Manin triple $(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(K), \mathrm{Lie}(AN))$ の量子化である (cf. [8]). 適切な $G_1$ を付け加えた局所コンパクト量子群の (C*環の)“連続な”族 $(G_q)_{0<q\leq 1}$ を作る方法がいくつか存在し [12], 作り方によって $G_1$ は $G$ 自身や Cartan motion group $K \ltimes \mathrm{Lie}(K)^\vee$ としてとることができる. $G_q$ のユニタリ表現論については, [13, 1, 15] などを参照のこと. 実半単純 Lie 群の量子化の作用素環的な描像についてはいくつかのアプローチが存在する. 最近, 複素化の量子化の余イデアルによる定式化が提案された [6].

例 2.1 において, $K$ の極大トーラス $T$ を自然に $K_q$ の閉部分 (量子) 群とみなすことができる. 特に, $K$ の中心 $Z$ を $K_q$ の離散部分 (量子) 群とみなせる. また, $P$, $Q$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ のウェイト格子, ルート格子としたとき, 各 $\chi \in \widehat{Z} \cong P/Q$ について $L^\infty(\widehat{K}_q; \chi) := \prod_{\substack{\lambda \in P_+ \\ \lambda + Q = \chi}} \mathcal{B}(V_\lambda)$ とおく. これは $L^\infty(\widehat{K}_q) = \prod_{\chi \in P/Q} L^\infty(\widehat{K}_q; \chi)$ を満たすことに注意. すると $K_q/Z := (L^\infty(K_q/Z), \Delta_{K_q})$ は well-defined なコンパクト量子群であることが示せる. なお, $L^\infty(\widehat{K_q/Z}) \cong L^\infty(\widehat{K}_q; 1_{\widehat{Z}})$ であることに注意. 特に, $\widehat{K_q/Z}$ は $\widehat{K}_q$ の離散部分量子群である. 以上の記号の準備の下で, $G_q$ の離散部分量子群を次のように分類できる:

**定理 2.4** ([9])**.** 1-連結なコンパクト Lie 群 $K$, その複素化 $G$, 実パラメータ $0 < q < 1$ について, 1-連結なコンパクト単純 Lie 群 $K_1, \cdots, K_n$ を用いて $K = \prod_{k=1}^{n} K_k$ と分解し, 各 $J \subset \{1, \cdots, n\}$ に対し $K_J := \prod_{k \in J} K_k$ とおく. このとき, $G_q$ の離散部分量子群 $\Gamma$ と次のデータからなる四つ組 $(J, S, F, f)$ との間に全単射が存在する. $J$ は $\{1, \cdots, n\}$ の部分集合, $S \subset T$ は $K$ の極大トーラスの有限部分群, $F \subset \widehat{Z}_J$ は $K_J$ の中心の Pontryagin 双対の部分群, $f\colon F \to T/S$ は群準同型. そのような $(J, S, F, f)$ に対し, 対応する $\Gamma$ は次の von

Neumann 環 (と自然に付随する余演算) で与えられる:

$$L^\infty(\Gamma) = \prod_{\chi \in F} \ell^\infty(f(\chi)S) \mathbin{\bar{\otimes}} L^\infty(\widehat{K}_{J,q}; \chi).$$

特に Lie($G$) が単純なときは, $G_q$ の任意の離散部分量子群 $\Gamma$ について, $\dim_{\mathbb{C}} L^\infty(\Gamma) < \infty$ であるか, $\widehat{K_q/Z}$ が $\Gamma$ の離散部分量子群で $\dim_{\mathbb{C}} L^\infty(\Gamma/(\widehat{K_q/Z})) < \infty$ を満たすものになっているかの, 少なくともどちらか一方が成立する. (よって, $\Gamma$ は自明群か $\widehat{K}_q$ のどちらかに "commensurate"であることになる.)

群の場合は, Margulis による超剛性の理論のおかげで, 実ランクが 2 以上の半単純 Lie 群 (と, いくつかのランク 1 の Lie 群) の任意の既約な格子は arithmetic であることが証明されている (Margulis' arithmeticity theorem). 一方で, 量子群の場合に定理 2.4 のような分類ができる本質的な理由としては, 離散量子群 $\widehat{K}_q$ が unimodular でないという事実 (これは群でない離散量子群に特有の現象である) が, 離散部分量子群の存在に大きな制約を与えることが挙げられる. ここで, 局所コンパクト量子群が **unimodular** であるとは, その左 Haar 荷重が右 Haar 荷重の条件も満たしていることとした. 結果として, $G$ の場合と比べて $G_q$ の離散部分量子群の構造はずいぶん簡単なものになってしまう.

もともと定理 2.4 は, $G_q$ に対する格子の類似にあたる現象を探す上での最初のアプローチとして示したものである. 現時点では, 量子群に対する格子の類似概念の定式化として決定的なものは存在しないが, 次のものが [4] において提案されている.

**定義 2.5** (Brannan–Chirvasitu–Viselter [4])**.** 局所コンパクト量子群 $G$ の離散部分量子群 $\iota\colon \Gamma \to G$ が [4] の意味での格子とは, 正規状態 $\theta \in L^\infty(G/\Gamma)_*$ であって $(\mathrm{id}_{L^\infty(G)} \otimes \theta)\Delta_G = \theta(-)1_{L^\infty(G)}$ なものが存在することとする.

[4] により, unimodular な離散量子群 $\Gamma$ は $\mathrm{D}(\Gamma)$ の [4] の意味での格子になっていることが確かめられている. 残念ながら, unimodular ではない $\Gamma$ については次の否定的な結果がある.

**命題 2.6** ([9])**.** 離散量子群 $\Gamma$ について, $\mathrm{D}(\Gamma)$ が [4] の意味での格子をもつならば, $\Gamma$ は unimodular (上で述べたように, その逆も成立することに注意).

特に, 1-連結なコンパクト Lie 群 $K$ と 実パラメータ $0 < q < 1$ について, $\mathrm{D}(\widehat{K}_q)(\cong \mathrm{D}(K_q) = G_q)$ は [4] の意味での格子をもたない.

群の場合は, 局所コンパクト群 $G$ の格子は $G$ の等質空間で $G$ 不変な確率測度をもつものと対応していた. しかし, 非可換な場合では, 局所コンパクト量子群 $G$ はエルゴード的な $G$ 作用をもつ von Neumann 環で, 閉部分量子群 $H$ について $G/H$ と表すことができないようなものの存在を許すことがある. なので, von Neumann 環へのエルゴード的な $G_q$ 作用

で $G_q$ 不変な正規状態をもつようなものを考える意味は依然としてあり, 実際に次のような例が存在する.

**例 2.7.** $0 < q < 1$ に対する $SL_q(2,\mathbb{C}) = \mathrm{D}(SU_q(2))$ を考える. もし $N := (q+q^{-1})^2$ が整数なら (これは必ず 4 よりも大きいことに注意), ある von Neumann 環 $M$ へのエルゴード的な左 $SL_q(2,\mathbb{C})$ 作用 $\alpha$ であって, $(\mathrm{id}\,\bar{\otimes}\,\theta)\alpha = \theta(-)1$ を満たす正規状態 $\theta \in M_*$ が唯一あるようなものが存在する.

これは, 量子対称群 $S_N^+$ と呼ばれるコンパクト量子群 [16] に関するいくつかの結果を組み合わせることで観察できる. 議論の概略を簡単に述べる. まず, 上のような $(q, N)$ に対し, $S_N^+$ と $SO_q(3)$ が同じ表現圏をもつことが知られており, このときエルゴード的な左 $SO_q(3)$ 作用をもつ von Neumann 環 $P$ を与えることができる [7]. ここで, $SO_q(3)$ はコンパクト量子群で, 定理 2.4 直前の記法にならって $SO_q(3) := SU_q(2)/Z$ と定義されるものとする (ここでの $Z$ は $SU(2)$ の中心). 次に, Miyashita–Ulbrich 作用と呼ばれる $\widehat{SO}_q(3)$ の $P$ への作用を組み合わせることで, $P$ への $SO_q(3)$ 作用を $\mathrm{D}(SO_q(3))$ 作用に延長できる. そして, 離散部分量子群 $\widehat{SO}_q(3) \to \widehat{SU}_q(2)$ の quantum double から誘導される, $\mathrm{D}(SU_q(2))$ 作用をもつ von Neumann 環 $M := \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}(SO_q(3))}^{\mathrm{D}(SU_q(2))} P$ が求めているものであることが, $\widehat{S}_N^+$ が unimodular であることと以上の構成から確かめることができる.

不変正規状態をもつ $SL_q(2,\mathbb{C})$ のエルゴード的な作用の分類や, 他の複素半単純 Lie 群 $G$ に対する同様の例を見つけることは興味深い問題である.

# 参考文献


[1] Y. Arano, *Comparison of unitary duals of Drinfeld doubles and complex semisimple Lie groups*, Comm. Math. Phys. **351** (2017), no. 3, 1137–1147.

[2] S. Baaj and G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **26** (1993), no. 4, 425–488.

[3] S. Baaj and S. Vaes, *Double crossed products of locally compact quantum groups*, J. Inst. Math. Jussieu **4** (2005), no. 1, 135–173.

[4] M. Brannan, A. Chirvasitu, and A. Viselter, *Actions, quotients and lattices of locally compact quantum groups*, Doc. Math. **25** (2020), 2553–2582.

[5] M. Daws, P. Kasprzak, A. Skalski, and P.M. Sołtan, *Closed quantum subgroups of locally compact quantum groups*, Adv. Math. **231** (2012), no. 6, 3473–3501.

[6] K. De Commer, *Quantisation of semisimple real Lie groups*, Preprint, arXiv:2404.05397.

[7] A. De Rijdt and N. Vander Vennet, *Actions of monoidally equivalent compact

*quantum groups and applications to probabilistic boundaries*, Ann. Inst. Fourier **60** (2010), no. 1, 169–216.

[8] V.G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1987, pp. 798–820.

[9] K. Kitamura, *Discrete quantum subgroups of complex semisimple quantum groups*, Int. Math. Res. Not. **2024** (2024), no. 9, 7234–7254.

[10] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **33** (2000), no. 6, 837–934.

[11] ———, *Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting*, Math. Scand. **92** (2003), no. 1, 68–92.

[12] A. Monk and C. Voigt, *Complex quantum groups and a deformation of the Baum–Connes assembly map*, Trans. the Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 12, 8849–8877.

[13] W. Pusz, *Irreducible unitary representations of quantum Lorentz group*, Comm. Math. Phys. **152** (1993), 591–626.

[14] S. Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1998.

[15] C. Voigt and R. Yuncken, *Complex semisimple quantum groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2264, Springer Nature, 2020.

[16] S. Wang, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 195–211.

[17] S.L. Woronowicz, *Tannaka–Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. **93** (1988), 35–76.

[18] T. Yamanouchi, *Double group construction of quantum groups in the von Neumann algebra framework*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), no. 4, 807–834.