Types for Bernstein blocks and their Hecke algebras

東京大学大学院数理科学研究科
小原和馬
Kazuma Ohara
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

本稿は Jeffrey D. Adler, Jessica Fintzen, Manish Mishra との共同研究 [AFMO24a, AFMO24b] の内容を含む.

1　はじめに

F を非アルキメデス的局所体とし，G を F 上定義された連結簡約代数群とする．このとき $G(F)$ の $\mathbb{C}$ 上のスムーズ表現全体からなる圏 $\mathrm{Rep}(G(F))$ についての理解を得ることは，表現論や整数論の文脈において重要な問題である．$\mathrm{Rep}(G(F))$ については，Bernstein ブロックと呼ばれる充満部分圏への分解

$$\mathrm{Rep}(G(F)) = \prod_{[M,\sigma]_G} \mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$$

が知られている．ただしここで添え字集合は G の Levi 部分群 M と，$M(F)$ の既約超尖点表現 σ の組 (M, σ) の適切な同値関係の下での同値類全体をはしる（詳細は 2 節を参照).

$G(F)$ の開コンパクト部分群 K と，その既約スムーズ表現 ρ の組 (K, ρ) が，Bernstein ブロック $\mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ に付随する type であるとは，$G(F)$ の任意の既約スムーズ表現 (π, V) に対して (π, V) が $\mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ に含まれることと，π の K への制限が ρ を含むことが同値であることをいう．このとき $\mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ は，(K, ρ) に付随する Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 上の右加群全体からなる圏と圏同値であることが知られている（詳細は 4 節を参照)．以上より，次の二つの問題が重要である．

- 各 Bernstein ブロック $\mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ に対して，付随する type (K, ρ) を構成する．
- 上で構成した type (K, ρ) について，付随する Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ の構造と表現論を調べる．

本稿ではこれらの問題について議論する．

2 記号と準備

F を非アルキメデス的局所体とし，$\mathrm{ord}_F\colon F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を F の加法的付値とする．ただしここで，$\mathrm{ord}_F(F^\times)=\mathbb{Z}$ と正規化しておく．$\mathcal{O}_F$ を F の整数環とし，$\mathfrak{p}_F$ をその極大イデアルとする．$\mathfrak{f}=\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ とし，q_F を $\mathfrak{f}$ の位数，p を $\mathfrak{f}$ の標数とする．

G を F 上定義された連結簡約代数群とする．$\mathrm{Rep}(G(F))$ を $G(F)$ のスムーズ表現全体のなす圏とし，$\mathrm{Irr}(G(F))$ を $G(F)$ の既約スムーズ表現全体のなす集合とする．P を G の放物型部分群とし，M をその Levi factor，U をその冪単根基とする．$M(F)$ のスムーズ表現 (τ,W) に対して，$G(F)$ のスムーズ表現 $\bigl(I_P^G(\tau),I_P^G(W)\bigr)$ を空間

$$I_P^G(W):=\bigl\{f\colon G(F)\to W\colon \text{局所定数関数} \mid f(umg)=\tau(m)\cdot f(g)\,(u\in U(F),m\in M(F),g\in G(F))\bigr\}$$

上の $G(F)$ の右正則表現として定める．このようにして $M(F)$ のスムーズ表現 (τ,W) に対して，$G(F)$ のスムーズ表現 $\bigl(I_P^G(\tau),I_P^G(W)\bigr)$ を対応させる操作を**放物型誘導**という．$G(F)$ の既約スムーズ表現 (π,V) が $G(F)$ の**超尖点表現**であるとは，G の任意の放物型部分群 $P\subsetneq G$ とその Levi factor M および $M(F)$ のスムーズ表現 τ に対して

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi,I_P^G(\tau))=\{0\}$$

が成り立つことをいう．$X_F^*(G)$ で F 上定義された G の代数的指標全体のなすアーベル群を表す．$G(F)$ の開部分群 G^1 を

$$G^1=\{g\in G(F)\mid \mathrm{ord}_F(\chi(g))=0\,(\chi\in X_F^*(G))\}$$

で定める．$G(F)$ の指標 χ が不分岐であるとは G^1 上自明であることをいう．$G(F)$ の不分岐指標全体の集合を $X_{\mathrm{unr}}(G)$ で表す．G をその Levi 部分群 M に取り替えることで，M に対しても同様に上の定義や記号を定める．

G の尖点的ペアとは G の Levi 部分群 M と $M(F)$ の既約超尖点表現 σ のペア (M,σ) のこととする．尖点的ペア (M_1,σ_1) と (M_2,σ_2) が inertially equivalent であるとは，ある $g\in G(F)$ と $\chi\in X_{\mathrm{unr}}(M_2)$ が存在して $({}^gM_1,{}^g\sigma_1)=(M_2,\sigma_2\otimes\chi)$ が成り立つことをいう．この同値関係における尖点的ペアの同値類を inertial equivalence class と呼び，尖点的ペア (M,σ) に対してその inertial equivalence class を $[M,\sigma]_G$ で表す．$\mathfrak{I}(G)$ で G の尖点的ペアの inertial equivalence class 全体の集合を表す．

(M,σ) を G の尖点的ペアとする．$G(F)$ の既約スムーズ表現 (π,V) であって，M を Levi factor に持つ G の放物型部分群 P と $\chi\in X_{\mathrm{unr}}(M)$ が存在して

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi,I_P^G(\sigma\otimes\chi))\neq\{0\}$$

をみたすもの全体からなる集合を $\mathrm{Irr}^{(M,\sigma)}(G(F))$ で表す．この集合は (M,σ) の inertial equivalence class にしか依らないので $\mathrm{Irr}^{[M,\sigma]_G}(G(F)):=\mathrm{Irr}^{(M,\sigma)}(G(F))$ と定めることができる．$G(F)$ の既約スムーズ表現 π であって，任意の既約部分商が $\mathrm{Irr}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ に含まれるようなもの全体からなる $\mathrm{Rep}(G(F))$ の充満部分圏を $\mathrm{Rep}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ と書く．このとき Bernstein 分解と呼ばれる次の分解が知られている [Ber84]

$$\mathrm{Rep}(G(F))=\prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{I}(G)}\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F)).$$

各充満部分圏 $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ を $\mathrm{Rep}(G(F))$ の Bernstein block という．Bernstein 分解により $\mathrm{Rep}(G(F))$ を理解するという問題は，各 Bernstein block を理解するという問題に分割される．

3 $G = \mathrm{SL}_2$ の場合の Bernstein block の構造

この節では $G = \mathrm{SL}_2$ の場合について二種類の Bernstein block の構造を観察する．

Example 3.1 π を $\mathrm{SL}_2(F)$ の既約超尖点表現とし $\mathfrak{s} = [\mathrm{SL}_2, \pi]_{\mathrm{SL}_2} \in \mathfrak{I}(\mathrm{SL}_2)$ とする．このとき以下が成り立つ．

$$\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(\mathrm{SL}_2(F)) \simeq \mathbb{C} - \mathrm{Vect}\,.$$

ただし $\mathbb{C} - \mathrm{Vect}$ で $\mathbb{C}$-ベクトル空間全体のなす圏を表し，対応は $\pi \mapsto \mathbb{C}$ で与えられる．

Example 3.2 T を対角行列全体のなす SL_2 の極大トーラスとし，B を上三角行列全体のなす SL_2 の Borel 部分群とする．triv_T で $T(F)$ の自明表現を表し，$\mathfrak{s}_T = [T, \mathrm{triv}_T]_{\mathrm{SL}_2} \in \mathfrak{I}(\mathrm{SL}_2)$ とかく．このとき定義から $I_B^{\mathrm{SL}_2}(\mathrm{triv}_T) \in \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}_T}(\mathrm{SL}_2(F))$ である．さらに $\mathrm{SL}_2(F)$ の自明表現 $\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}_2}$ は $I_B^{\mathrm{SL}_2}(\mathrm{triv}_T)$ の部分表現であり，商表現 $\mathrm{St}_{\mathrm{SL}_2} := I_B^{\mathrm{SL}_2}(\mathrm{triv}_T)/\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}_2}$ は既約表現であることが知られている．一方でこれらのなす完全列

$$1 \to \mathrm{triv}_{\mathrm{SL}_2} \to I_B^{\mathrm{SL}_2}(\mathrm{triv}_T) \to \mathrm{St}_{\mathrm{SL}_2} \to 1$$

は分裂しない．

4 Type の理論

この節では Bernstein block の構造を調べるための方法として type の理論と呼ばれる理論を紹介する．

Definition 4.1 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ とし，K を $G(F)$ の開コンパクト部分群，ρ を K の既約スムーズ表現とする．このときペア (K, ρ) が $\mathfrak{s}$-*type*，あるいは Bernstein block $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ に付随する type であるとは次が成り立つことをいう：

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G(F)) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(G(F)) \mid \mathrm{Hom}_K(\rho, \pi\restriction_K) \neq \{0\}\}\,.$$

type を用いることで以下のようにして Bernstein block の構造を調べることができる．

Proposition 4.2 ([BK98, Theorem 4.3]) $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ とし (K, ρ) を $\mathfrak{s}$-type とする．このとき次の圏同値がある：

$$\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F)) \simeq \mathrm{Mod} - \mathcal{H}(G(F), \rho).$$

ただしここで $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ は下で定義される (K, ρ) に付随する Hecke 環を表し，$\mathrm{Mod} - \mathcal{H}(G(F), \rho)$ は $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 上の右加群全体のなす圏を表す．

Definition 4.3 (Hecke 環) (K, ρ) を $G(F)$ の開コンパクト部分群とその既約スムーズ表現のペアとする．このとき (K, ρ) に付随する *Hecke* 環とは $\mathbb{C}$-ベクトル空間

$$\mathcal{H}(G(F), \rho) = \{f \colon G(F) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\rho) : \text{compactly supported} \mid f(k_1 g k_2) = \rho(k_1) \circ f(g) \circ \rho(k_2)\, (k_i \in K, g \in G(F))\}$$

に畳み込みで積を入れて得られる $\mathbb{C}$-代数である．すなわち $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$ に対してその積 $f_1 * f_2 \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$ は積分

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_{G(F)} f_1(x) \circ f_2(x^{-1} g) dx$$

で定義される．

Remark 4.4 Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ は $\mathbb{C}$-代数として自己同型環 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ と同型である．Proposition 4.2 の圏同値は $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ に対して $\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho),\pi\right)$ を対応させ，$\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ の $\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$ への左作用を用いて $\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho),\pi\right)$ に $\mathcal{H}(G(F),\rho)\simeq \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ の右作用を入れることで得られる．

Proposition 4.2 を用いることで Bernstein block の構造を調べるという問題は，type を構成しそれに付随する Hecke 環の構造と表現論を調べるという問題へと帰着される．以下ではこれらの問題について議論を行う．

Example 4.5 $G=\mathrm{SL}_2$ とし，

$$I=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(F) \mid a,d\in\mathcal{O}_F^{\times}, b\in\mathcal{O}_F, c\in\mathfrak{p}_F\right\}$$

と定める．triv_I を I の自明表現とする．このとき Example 3.2 の記号のもとでペア (I,triv_I) は $\mathfrak{s}_T$-type である．さらに付随する Hecke 環

$$\mathcal{H}(G(F),\mathrm{triv}_I)=C_{\mathrm{c}}(I\backslash \mathrm{SL}_2(F)/I)$$

は次の生成元と関係式による表示を持つ：

$$\langle T_0,T_1 \mid (T_i-q_F)(T_i+1)=0\,(i=0,1)\rangle.$$

これは $\widetilde{A_1}$ 型の affine Weyl 群の q_F-変形として得られる affine Hecke 環であり，その表現論は深く調べられている．

5 Depth-zero types

この節では depth-zero type と呼ばれる特別な type を導入し，その Hecke 環の構造に関する Morris の結果を紹介する．簡単のためこの節に限り G は半単純単連結であるとする．この仮定は説明を簡潔にするためだけのものであり，適切な修正をすることで一般の簡約代数群に対しても同様の理論と結果が得られる．

K を $G(F)$ の parahoric 部分群とし，K_+ をその pro-p radical とする．このときある $\mathfrak{f}$ 上の簡約代数群 $\mathbf{G}_K$ が存在して自然な同型

$$K/K_+\simeq \mathbf{G}_K(\mathfrak{f})$$

が成り立つ．

Example 5.1 $G=\mathrm{SL}_2$ とする．$K=\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ とすると

$$K_+=\{g\in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)\mid g\equiv I_2 \bmod \mathfrak{p}_F\}$$

であり，このとき $K/K_+\simeq \mathrm{SL}_2(\mathfrak{f})$ である．

Example 5.2 $G=\mathrm{SL}_2$ とする．Example 3.2 の記号のもとで $K=I$ とすると

$$I_+=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in I \mid a,d\in 1+\mathfrak{p}_F\right\}$$

であり，このとき

$$I/I_+ \simeq \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathfrak{f}^\times \right\} \simeq \mathrm{GL}_1(\mathfrak{f})$$

である．

F 上の代数群の表現に対する超尖点的表現の定義と同様にして，$\mathfrak{f}$ 上の代数群の表現に対して尖点的表現という概念を定めることができる．ρ を $\mathbf{G}_K(\mathfrak{f})$ の既約尖点的表現とする．ρ を K/K_+ の表現だとみなし，さらに K_+ 上自明な K の既約スムーズ表現とも同一視する．このとき次が成り立つ．

Proposition 5.3 ([MP96])　ある $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ が存在してペア (K, ρ) は $\mathfrak{s}$-type となる．

このようにして得られるペア (K, ρ) を *depth-zero type* という．

Remark 5.4　一般に Moy–Prasad filtration という概念を用いることで $G(F)$ の表現や, Bernstein block に対して *depth* という非負実数を定義することができる．このとき depth-zero type は depth が 0 の Bernstein block (*depth-zero block*) に付随する type になっている．depth-zero block は有限簡約代数群の表現論と密接に関係しており，一般の Bernstein block に比べてはるかに調べやすいものとなっている．

Example 5.5　Example 4.5 で現れるペア (I, triv_I) は depth-zero type である．

depth-zero type に付随する Hecke 環の構造は Morris によって詳細に調べられている．

Theorem 5.6 ([Mor93, Theorem 7.12])　(K, ρ) を depth-zero type とする．このとき (K, ρ) に付随する Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ について Example 4.5 と類似の生成元と関係式による記述がある．より詳細には，$\mathcal{H}(G(F), \rho)$ はある affine Hecke 環とある捻れ群環の半直積と同型である．

Theorem 5.6 により，depth-zero block の構造を affine Hecke 環の表現論を用いて理解することができる．

6　Kim–Yu types

この節では depth-zero type を一般化して得られる Kim–Yu type という type を紹介する．以下では次を仮定する：

Assumption 6.1

1. G は F のある馴分岐拡大で分裂する．
2. p は G の Weyl 群 W_G の位数を割らない．

このとき任意の $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ に対して $\mathfrak{s}$-type の具体的な構成が知られている．

Theorem 6.2 ([KY17], [Fin21], [FKS23])　$\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ とする．このとき *Kim-Yu type* と呼ばれる $\mathfrak{s}$-type (K, ρ) の具体的な構成が存在し，次が成り立つ．G の簡約部分群 G^0 と G^0 の depth-zero type (K^0, ρ^0) であって以下をみたすものが存在する：

1. $K^0 \subset K$ であり，この包含は同型 $K^0/K^0_+ \simeq K/K_+$ を誘導する．ただし K^0_+, K_+ はそれぞれ K^0, K の pro-p radical を表す．
2. ある K の既約表現 κ が存在し，同型 $\rho \simeq \mathrm{inf}(\rho^0) \otimes \kappa$ が成り立つ．ただし $\mathrm{inf}(\rho^0)$ は $K \to K/K_+ \simeq$

K^0/K^0_+ と ρ^0 の合成を表す.

Remark 6.3 本稿では κ の具体的な構成は述べないが，κ は有限体上の symplectic 群の Weil 表現の理論を用いて構成される表現である.

Remark 6.4 Kim-Yu [KY17] による Kim-Yu type の構成については，p が G の Weyl 群 W_G の位数を割らないという仮定は必要なく，この構成で全ての $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ に対して $\mathfrak{s}$-type を得ることができるという主張の部分にこの仮定が必要となる．この主張は Fintzen [Fin21] によって証明された.

Remark 6.5 本稿では元々の [KY17] による type の構成ではなく，それを [FKS23] で定義された符号指標で捻った構成を用いる．元々の構成のままでは，本稿の主定理 Theorem 7.1 は成り立たない.（実際に反例が存在する.）

7 主定理

Theorem 6.2 によると任意の $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ に対して $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ に付随する Kim-Yu type (K, ρ) が存在するため，任意の Bernstein block の構造を調べるためには任意の Kim-Yu type に付随する Hecke 環の構造がわかれば良い．一方で Kim-Yu type はある depth-zero type (K^0, ρ^0) と密接に関係しており，depth-zero type に付随する Hecke 環については Morris による詳細な記述がある．この depth-zero type に付随する Hecke 環を Kim-Yu type に付随する Hecke 環と結びつけるのが本稿の主定理である.

Theorem 7.1 ([AFMO24a, Theorem 4.3.11]) (K, ρ) を Kim-Yu type とし，$G^0, (K^0, \rho^0)$ を Theorem 6.2 のものとする．このとき $\mathbb{C}$-代数の同型

$$\mathcal{H}(G^0(F), \rho^0) \simeq \mathcal{H}(G(F), \rho)$$

が存在する.

本定理は元々 $\mathfrak{s} = [G, \pi]_G$ という形の場合には [Yu01] によって予想されており，執筆者が [Oha24] においてこの予想を解決した．Theorem 7.1 の主張はこの結果を一般の $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ へと拡張したものであり，執筆者の Jeffrey D. Adler, Jessica Fintzen, Manish Mishra との共同研究による結果である．一般の場合には Hecke 環の構造が $\mathfrak{s} = [G, \pi]_G$ の場合に比べて複雑であり，Theorem 7.1 の証明もはるかに長大で難解なものとなっている.

$\mathcal{H}(G^0(F), \rho^0)$ の構造は Theorem 5.6 によって詳細に記述されているため，Theorem 7.1 と合わせることで一般の Kim-Yu type に付随する Hecke 環についてもその生成元と関係式による記述を得ることができる．また，Proposition 4.2 による圏同値と合わせることで以下の系を得る.

Corollary 7.2 ([AFMO24a, Theorem 4.5.2]) $\mathfrak{s} \in \mathfrak{I}(G)$ とする．このとき G の簡約部分群 G^0 と $\mathfrak{s}^0 \in \mathfrak{I}(G^0)$ であって次をみたすものが存在する：圏同値

$$\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G(F)) \simeq \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}^0}(G^0(F))$$

が存在し，さらに $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}^0}(G^0(F))$ は depth-zero block である.

上の系は任意の Bernstein block がある depth-zero block と圏同値であるということを主張している．Remark 5.4 で述べたように depth-zero block はその有限簡約代数群の表現論との結びつきから一般の

Bernstein block に比べて非常に調べやすい block となっている．Corollary 7.2 は p-進群の表現論の様々な問題が depth-zero の場合へと帰着されることを示唆しており，そのような方向の応用が今後期待される．

参考文献

[AFMO24a] Jeffrey D. Adler, Jessica Fintzen, Manish Mishra, and Kazuma Ohara, *Reduction to depth zero for tame p-adic groups via Hecke algebra isomorphisms*, arXiv e-prints (2024), arXiv:2408.07805.

[AFMO24b] ———, *Structure of Hecke algebras arising from types*, arXiv e-prints (2024), arXiv:2408.07801.

[Ber84] J. N. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, Edited by P. Deligne, pp. 1–32. MR 771671

[BK98] Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko, *Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), no. 3, 582–634. MR 1643417

[Fin21] Jessica Fintzen, *Types for tame p-adic groups*, Ann. of Math. (2) **193** (2021), no. 1, 303–346. MR 4199732

[FKS23] Jessica Fintzen, Tasho Kaletha, and Loren Spice, *A twisted Yu construction, Harish-Chandra characters, and endoscopy*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 12, 2241–2301. MR 4654051

[KY17] Ju-Lee Kim and Jiu-Kang Yu, *Construction of tame types*, Representation theory, number theory, and invariant theory, Progr. Math., vol. 323, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 337–357. MR 3753917

[Mor93] Lawrence Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, Invent. Math. **114** (1993), no. 1, 1–54. MR 1235019

[MP96] Allen Moy and Gopal Prasad, *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, Comment. Math. Helv. **71** (1996), no. 1, 98–121. MR 1371680

[Oha24] Kazuma Ohara, *Hecke algebras for tame supercuspidal types*, Amer. J. Math. **146** (2024), no. 1, 277–293. MR 4691489

[Yu01] Jiu-Kang Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 579–622. MR 1824988