

動的な非対称 t 接合関数を用いた多変量資産価格変動の把握*

夷藤 翔[†]・吉羽 要直[‡]

Kakeru Ito and Toshinao Yoshiba

東京都立大学 大学院経営学研究科[§]

Graduate School of Management, Tokyo Metropolitan University

概要

本研究では、夷藤・中村 (2019) と Ito and Yoshiba (2024) で示された cDCC を適用した DGHSktC、DACStC の構築方法を段階的に整理する。そのうえで、吉羽 (2020a) で対象とした金融 3 業種の日次株価収益率について、直近の 6 年間 (2018-8-8~2024-8-7) も分析対象に加えて、静的な ACSktC、GHSktC、tC、NC の 4 つの接合関数の最尤推定結果を整理し、DACStC でモデル化した場合に得られる上下の裾従属係数の変化を観察し、今後の課題について整理する。

1 はじめに

金融機関のリスク管理実務においては、資産価格変動や信用状態をリスクファクターとして、その従属関係を正規接合関数 (normal copula; NC) や t 接合関数 (t copula; tC) といった楕円接合関数で捉えることが多い。正規接合関数は変量間の裾従属性が弱く、 t 接合関数はリスクファクターの上下の変動に対して対称な従属関係しか表現できないため、正規接合関数や t 接合関数に非対称性を入れたモデリングも発展してきている。

吉羽 (2020a) では、接合関数 (copula) を用いて定義される裾従属性が、金融ポートフォリオのリスク量に大きな影響を及ぼすことを想定し、資産下落方向での依存性での強さを表現できる非対称 t 接合関数を導入し、Yoshiba (2018) で導入された最尤推定法とその応用について議論した。具体的には、代表的な非対称 t 接合関数のうち最尤推定の実装が比較的容易な Azzalini and Capitanio (2003) の非対称 t 分布に内包される AC 非対称 t 接合関数 (AC skew- t copula; ACSktC) と Demarta and McNeil (2005) によって提唱された一般化双曲型 (generalized hyperbolic, GH) の非対称 t 分布に内包される GH 非対称 t 接合関数 (GH skew- t copula; GHSktC) を取り上げた。そのうえで、実証分析として、TOPIX33 業種のうち金融 3 業種の日次株価収益率から生成される疑似標本 $\{u_1, \dots, u_T\}$ を用いて、ACSktC、GHSktC、tC、NC の 4 つの接合関数について、危機時 6 年間 (2006-10-1~2012-9-30) と平時 6 年間 (2012-10-1~2018-9-30) を最尤推定して比較し、非対称性の重要性を指摘した。

一方、夷藤・中村 (2019) では、Christoffersen *et al.* (2012) に倣い、GHSktC が持つ相関行列 Σ のパラメータが Engle (2002) の DCC (dynamic conditional correlation) に基づいて変化するモ

*本研究は、2024 年度京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業」、JSPS 科研費 (21K01581, 24K00273) からの助成を受けている。

[†]E-mail address: kakewindow@gmail.com

[‡]E-mail address: tyoshiba@tmu.ac.jp

[§]Address: 18F 1-4-1 Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-0005, Japan

デルを構築した。その際、Engle (2002) の DCC では、推定される相関行列の対角成分が必ずしも 1 にならない問題があることから、Aielli (2013) によって修正された cDCC を適用した。実証分析では、メキシコ、マレーシア、トルコ、ポーランドの自国通貨建て国債インデックスに関する 4 変量日次リターンを対象として分析を行った。

Ito and Yoshiba (2024) では、夷藤・中村 (2019) が GHStC について cDCC を適用して相関行列 Σ が動的に変化するモデル DGHStC に拡張した点について、ACStC についても適用して cDCC を適用して相関行列 Σ が動的に変化するモデル DACStC を構築した。負の非対称性の場合、GHStC では下側裾従属係数が必ず 1、上側裾従属係数が必ず 0 になってしまう一方で、ACStC では上下の裾従属係数が 0~1 まで柔軟に変化する性質をまとめた。実証分析では、グローバル国債、グローバル社債、株式、REIT の 4 つの資産に対する週次収益率をモデル化し、最尤推定を行って上下の裾従属係数の変化を捉えた。そのうえで等ウェイト、リスクパリティ、さらに ES 最小化ポートフォリオなどのいくつかのポートフォリオを想定し、そのリスク対比のパフォーマンスを検討した。

本研究では、夷藤・中村 (2019) と Ito and Yoshiba (2024) で示された cDCC を適用した DGHStC、DACStC の構築方法を段階的に整理する。そのうえで、吉羽 (2020a) で対象とした金融 3 業種の日次株価収益率について、直近の 6 年間 (2018-8-8~2024-8-7) も分析対象に加えて、静的な ACStC、GHStC、tC、NC の 4 つの接合関数の最尤推定結果を整理し、DACStC でモデル化した場合に得られる上下の裾従属係数の変化を観察し、今後の課題について整理する。

2 対象とする 4 つの接合関数の対数尤度と裾従属係数

2.1 接合関数と対数尤度

同時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ は、各変量が連続確率変数であるときには、接合関数 $C(u_1, \dots, u_n)$ と各変量の周辺分布関数 $F_j(\cdot)$ $j = 1, \dots, n$ を用いて以下のように一意に表現される (Sklar の定理)。

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.1)$$

接合関数 $C(u_1, \dots, u_n)$ は、 $[0, 1]^n$ の n 変量一様分布に対する同時分布関数でもあり、接合密度 $c(u_1, \dots, u_n)$ は以下のように定義される。

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \quad (2.2)$$

(2.1) 式より、同時密度関数 $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ とし、各周辺分布関数で $u_i = F_i(x_i)$ と変換した $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ と (2.2) 式を用いて以下のように表せる。

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial^n C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \frac{\partial u_1 \cdots \partial u_n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = c(\mathbf{u}) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2.3)$$

ここで、周辺分布のパラメータを $\Theta^{mgn} = (\theta_1^{mgn}, \dots, \theta_n^{mgn})$ 、接合関数のパラメータを θ^{cpl} とし、時点 $t = 1, \dots, T$ で n 変量の観測データ $\mathbf{x}_t$ が独立に同分布に従っているとすると、対数尤度 $\ell(\theta^{cpl}, \Theta^{mgn})$ は、(2.3) 式より以下のように表せる。

$$\begin{aligned}\ell(\theta^{cpl}, \Theta^{mgn}) &= \ln \prod_{t=1}^T f(\mathbf{x}_t | \theta^{cpl}, \Theta^{mgn}) \\ &= \sum_{t=1}^T \ln c(\mathbf{u}_t | \theta^{cpl}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{t,i} | \theta_i^{mgn})\end{aligned}\tag{2.4}$$

本研究では IFM (Inference Functions for Margin) と呼ばれる 2 段階の最尤法を採用する。すなわち、第 1 段階で (2.4) 式右辺第 2 項で表現される周辺分布の対数尤度を最大化することで周辺分布のパラメータ θ_i^{mgn} を推定し、そのパラメータを用いて各周辺分布関数 $F_i(\cdot)$ で変換した $(0, 1)^n$ の時系列データ $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T\}$ から (2.4) 式右辺第 1 項を最大化することで接合関数のパラメータ θ^{cpl} を推定する。この際、接合関数のパラメータのうち、相関行列 Σ については、cDCC の枠組みに沿って Σ_t と時間変化させる。

2.2 対象とする陰的接合関数の対数尤度と接合密度

対象とする 4 つの接合関数 ACSktC、GHSktC、tC、NC はいずれも定義された同時確率分布から内包される陰的接合関数 (implicit copula) を導いた接合関数である。

一般に、 $\boldsymbol{\theta}$ をパラメータとする n 変量の分布関数 $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ に内包される接合関数 $C_G(u_1, \dots, u_n; \boldsymbol{\theta}_C)$ は、第 i 変量 ($i = 1, \dots, n$) の各周辺分布の分位点関数 (分布関数の逆関数) を $G_i^{-1}(x_i; \boldsymbol{\theta}_i)$ として、以下のように定義される。

$$C_G(u_1, \dots, u_n; \boldsymbol{\theta}_C) = G(G_1^{-1}(u_1; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, G_n^{-1}(u_n; \boldsymbol{\theta}_n); \boldsymbol{\theta})\tag{2.5}$$

陰的接合関数 (2.5) の密度 $c_G(u_1, \dots, u_n; \boldsymbol{\theta}_C)$ は、以下のように与えられる。IFM 法の第 2 段階で最大化する (2.4) 式右辺第 1 項はこの接合密度の対数値の和として表現されている。

$$\begin{aligned}c_G(u_1, \dots, u_n; \boldsymbol{\theta}_C) &= \frac{\partial^d C_G(u_1, \dots, u_n; \boldsymbol{\theta}_C)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \\ &= \frac{g(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\prod_{i=1}^n g_i(x_i; \boldsymbol{\theta}_i)}\end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ で各要素は以下で与えられる。

$$x_i = G_i^{-1}(u_i; \boldsymbol{\theta}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

2.3 GHStC と ACSktC を内包する確率ベクトル

GHStC 分布に従う d 変量確率ベクトル $\mathbf{X}$ は、非対称性を表すパラメータ $\gamma \in \mathbb{R}^d$ を用いて以下で与えられる。

$$\mathbf{X} = \gamma V^{-1} + \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{V}}$$

ただし、 $\mathbf{Z}$ は n 変量の正規分布 $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ に従う確率ベクトル、 V は $\mathbf{Z}$ とは独立なガンマ分布 $\mathcal{G}(\nu/2, \nu/2)$ に従う確率変数である。

ACSktC 分布に従う確率ベクトル $\mathbf{X}$ は、Azzalini and Dalla Valle (1996) で提案された非対称正規確率ベクトル $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ を

$$\begin{aligned} Y_i &= \delta_i |Z_0| + \sqrt{1 - \delta_i^2} Z_i, \quad j = 1, \dots, d \\ Z_0 &\sim \mathcal{N}_1(0, 1), \quad \mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^\top \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma) \end{aligned}$$

で生成した後、 $\mathbf{Y}$ とは独立な $V \sim \mathcal{G}(\nu/2, \nu/2)$ を用いて、以下のように変換する。

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Y}}{\sqrt{V}}$$

2.4 対象とする4つの接合密度

2.1節で示したように IFM 法を用いた最尤法では、 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ 、ただし、 $u_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, n$) を観測データとして、対象とする接合関数の接合密度を表現する必要がある。ここで、2.2節の議論に従い、NC、tC、GHStC、ACSktC の各接合関数の接合密度をまとめると、以下のように与えられる。

まず、NC の接合密度 $c^N(\cdot)$ は以下のように与えられる。

$$c^N(\mathbf{u}; \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (\Sigma^{-1} - I) \mathbf{x}\right)$$

ただし、 Σ は相関行列、 I は単位行列であり、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ の各要素については、 $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$ ($i = 1, \dots, n$) と1変量標準正規分布の分位点関数（逆関数）で表現される。NC では相関行列により線形の従属関係が表現される。

tC の接合密度 $c^t(\cdot)$ は、Demarta and McNeil (2005) で議論されているように以下で与えられる。

$$c^t(\mathbf{u}; \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\nu} x_i^2\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1-n} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)^{\frac{\nu+n}{2}}}$$

ただし、 Σ は相関行列、 ν は自由度パラメータ、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数であり、 $\mathbf{x}$ の各要素は1変量 t 分布の分位点関数を用いて、 $x_i = T_1^{-1}(u_i; \nu)$ ($i = 1, \dots, n$) と表現される。tC では相関行列により線形の従属関係、自由度により裾従属性が表現される。

GHSktC の接合密度 $c^{GHSkt}(\cdot)$ についても、Demarta and McNeil (2005) で議論されているように以下で与えられる。

$$\begin{aligned} c^{GHSkt}(\mathbf{u}; \Sigma, \nu, \gamma) &= \frac{2^{\frac{(\nu-2)(n-1)}{2}} K_{\frac{\nu+n}{2}} \left(\sqrt{(\nu + \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \gamma^\top \Sigma^{-1} \gamma} \right) \exp(\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \gamma)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1-n} \sqrt{|\Sigma|} \left(\sqrt{(\nu + \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \gamma^\top \Sigma^{-1} \gamma} \right)^{\frac{\nu+n}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right)^{\frac{\nu+n}{2}}} \\ &\times \prod_{i=1}^n \frac{\left(|\gamma_i| \sqrt{\nu + x_i^2} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} x_i^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}}}{K_{\frac{\nu+1}{2}} \left(|\gamma_i| \sqrt{\nu + x_i^2} \right) \exp(x_i \gamma_i)} \end{aligned}$$

ただし、 Σ は相関行列、 ν は自由度パラメータ、 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$ は非対称性のパラメータベクトルである。 $K(\cdot)$ は第 3 種の修正 Bessel 関数であり、 $\mathbf{x}$ の各要素は 1 変量 GHSkt 分布の分位点関数を用いて、 $x_i = GHSkt^{-1}(u_i; \gamma_i, \nu)$ ($i = 1, \dots, n$) と表現される。

ACSktC の接合密度 $c^{ACSkt}(\cdot)$ については、Joe (2006) で議論されているように以下で与えられる。

$$c^{ACSkt}(\mathbf{u}; \Omega, \nu, \delta) = 2^{1-n} \frac{t_n(\mathbf{x}; \Omega, \nu) T_1 \left(\tilde{\alpha}^\top \mathbf{x} \sqrt{\frac{\nu+n}{\mathbf{x}^\top \Omega^{-1} \mathbf{x} + \nu}}; \nu + n \right)}{\prod_{i=1}^n t_1(x_i; \nu) T_1(x_i; \nu + 1)}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{\Omega^{-1} \delta}{\sqrt{1 - \delta^\top \Omega^{-1} \delta}} \\ \Omega &= \Delta \left(\Sigma + \zeta \zeta^\top \right) \Delta, \quad \Delta = \text{diag} \left(\sqrt{1 - \delta_1^2}, \dots, \sqrt{1 - \delta_n^2} \right) \\ \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^\top, \quad \zeta_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{1 - \delta_i^2}}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

であり、ここで Σ と Ω は相関行列、 ν は自由度パラメータ、 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)^\top$ は非対称性のパラメータベクトルである。 $t_n(\cdot)$ は n 変量 t 分布の密度関数、 $T_1(\cdot)$ は 1 変量 t 分布の累積分布関数であり、 $\mathbf{x}$ の各要素は 1 変量 ACSkt 分布の分位点関数を用いて、 $x_i = ACSkt^{-1}(u_i; \delta_i, \nu)$ ($i = 1, \dots, n$) と表現される。

2.5 対象の 4 つの接合関数の裾従属係数

2 変量の同時分布関数 $F(x_1, x_2)$ に対し、各変量の周辺分布関数を $F_i(\cdot)$ ($j = 1, 2$) とするとき、下側・上側裾従属係数 λ_L 、 λ_U は以下で定義される。 $\lambda_L = 0$ または $\lambda_U = 0$ のとき、下側（上側）漸近独立と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0+} \lambda_L(u), \quad \lambda_L(u) = \Pr \left[X_1 \leq F_1^{-1}(u) | X_2 \leq F_2^{-1}(u) \right], \\ \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1-} \lambda_U(u), \quad \lambda_U(u) = \Pr \left[X_1 \geq F_1^{-1}(u) | X_2 \geq F_2^{-1}(u) \right]. \end{aligned}$$

下側・上側裾従属性 $\lambda_L(u)$, $\lambda_U(u)$ は、接合関数 $C(u_1, u_2)$ とその生存関数 $\bar{C}(u_1, u_2)$ を用いて、以下のように表現できる。

$$\lambda_L(u) = \frac{C(u, u)}{u}, \quad \lambda_U(u) = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}.$$

対象の4つの接合関数のうち、2変量 NC の裾従属係数は上下ともに0であり、漸近独立である。

$$\lambda_L^{NC} = \lambda_U^{NC} = 0$$

2変量 tC の裾従属係数は、Demarta and McNeil (2005) で示されているように上下で等しく以下のとおり1変量 t 分布関数を用いて与えられる。

$$\lambda_L^{tC} = \lambda_U^{tC} = 2T_1 \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}; \nu+1 \right)$$

2変量 GHStC の裾従属係数は、Fung and Seneta (2010) が共通の非対称性 ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) で以下のように整理しており、極端になる ($\gamma = 0$ でないかぎり $(0, 1)$ の値は取らない) ことがわかる。

1. $\gamma < 0 \Rightarrow \lambda_L^{GHStC} = 1, \lambda_U^{GHStC} = 0$
2. $\gamma > 0 \Rightarrow \lambda_L^{GHStC} = 0, \lambda_U^{GHStC} = 1$
3. $\gamma = 0 \Rightarrow \lambda_L^{GHStC} = \lambda_U^{GHStC} = 2T_1 \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}; \nu+1 \right)$

2変量 ACSktC の裾従属係数は、Fung and Seneta (2010) とPadoan (2011) が独立に与えており、吉羽 (2020b) で整理されているように、1変量の拡張された ACSkt の累積分布関数 $F^{EST}(\cdot)$ を用いて計算できる。共通の非対称性 ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) では、以下の関係式が成立する (裾従属係数は0や1など極端にはならない)。

1. $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_L^{ACSktC} > \lambda_U^{ACSktC}$
2. $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_L^{ACSktC} < \lambda_U^{ACSktC}$

具体的には、

$$\begin{aligned} \lambda_L^{ACSktC} &= 2F_{EST} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}; \tilde{\alpha}\sqrt{1-\rho^2}, -\sqrt{\nu+1}(1+\rho)\tilde{\alpha}, \nu+1 \right) \\ \lambda_U^{ACSktC} &= 2 - 2F_{EST} \left(\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}; \tilde{\alpha}\sqrt{1-\rho^2}, \sqrt{\nu+1}(1+\rho)\tilde{\alpha}, \nu+1 \right) \end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})^\top$ であり、 $F_{EST}(\cdot)$ は1変量の拡張 AC 非対称 t 分布の累積分布関数で

$$F_{EST}(x; \alpha, \tau, \nu) = \int_{-\infty}^x t_1(z; \nu) \frac{T_1 \left((\alpha z + \tau) \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+z^2}}; \nu+1 \right)}{T_1 \left(\tau/\sqrt{1+\alpha^2}; \nu \right)} dz$$

と定義される。

3 動的な非対称 t 接合関数の構成

3.1 動的な楕円接合関数の構成

本研究では、対象とする NC、tC、GHStC、ACStC の 4 つの接合関数に含まれる相関行列のパラメータ Σ について、Aielli (2013) が Engle (2002) の DCC を修正した cDCC を適用して、時間変化させる。cDCC での相関行列 Σ_t のダイナミクスは次のように与えられる。

$$\Sigma_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_t \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Q}_t = \tilde{\mathbf{Q}}(1 - \alpha - \beta) + \alpha \Psi(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1}) + \beta \mathbf{Q}_{t-1} \quad (3.2)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{Q}}$ は無条件の相関行列であり、 $\mathbf{x}_t$ は各要素 $x_{t,i}$ ($i = 1, \dots, n$) が各接合関数の基になっている分布の周辺分布の分位点になっている確率ベクトルであり、 $\mathbf{x}_t$ の接合関数はその時点 t でのパラメータを持つ各接合関数になっているものとする。cDCC のダイナミクスを定める α 、 β のパラメータは、 $\alpha, \beta > 0$ 、 $\alpha + \beta \leq 1$ を満たすものとする。cDCC の仮定から各時点 $t = 1, \dots, T$ での相関行列 $\mathbf{Q}_t$ の無条件期待値は、無条件の相関行列 $\tilde{\mathbf{Q}}$ に一致する必要がある。

$$\mathbb{E}[\mathbf{Q}_t] = \tilde{\mathbf{Q}} \quad (3.3)$$

相関行列パラメータ Σ を持つ接合関数について cDCC を適用するには、各接合関数に基づいて (3.3) 式のようなモーメント条件を満たすようにしつつ、(3.2) 式に含まれる $\Psi(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1})$ を特定化する必要がある。

3.2 DGHSktC と DACStC の動的な相関行列

ここで、動的な DGHSktC と DACStC において、(3.2) 式に含まれる $\Psi(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1})$ を特定することで DGHSktC と DACStC を構成する。

DGHSktC では Fortin, Simonato and Dionne (2023) の方法と同様に (3.4), (3.5) 式のように構成する。

$$\Psi^{DGHSkt}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1}) := \text{diag}(\mathbf{Q}_{t-1})^{\frac{1}{2}} \eta^{DGHSkt}(\mathbf{x}_t) \text{diag}(\mathbf{Q}_{t-1})^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

ただし、

$$\eta^{DGHSkt}(\mathbf{x}_t) := \frac{\nu - 2}{\nu} \left(\left(\mathbf{x}_t - \frac{\nu}{\nu - 2} \boldsymbol{\gamma} \right) \left(\mathbf{x}_t - \frac{\nu}{\nu - 2} \boldsymbol{\gamma} \right)^\top - \frac{2\nu^2 \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^\top}{(\nu - 2)^2 (\nu - 4)} \right) \quad (3.5)$$

本研究では ACStC について (3.6)–(3.7) 式のようにして $\Psi(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1})$ を特定化することで新

たに DACSkC を構成する。

$$\Psi^{DACSkC}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1}) := \text{diag}(\mathbf{Q}_{t-1})^{\frac{1}{2}} \left(\Delta^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{t-1} \Delta^{-1} - \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\zeta}^\top \right) \text{diag}(\mathbf{Q}_{t-1})^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_t &:= \frac{\nu-2}{\nu} \left(\eta^{DACSkC}(\mathbf{x}_t) + \frac{\nu}{\pi} \left(\frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \right)^2 \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^\top \right) \\ \eta^{DACSkC}(\mathbf{x}_t) &:= \left(\mathbf{x}_t - \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \boldsymbol{\delta} \right) \left(\mathbf{x}_t - \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \boldsymbol{\delta} \right)^\top \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3 実装方法

IFM 法の第 2 段階で最大化する (2.4) 式右辺第 1 項は 2.4 節で示した 4 つの接合密度の対数値の和として表現されるため、その逆符号（負の対数尤度、negative log-likelihood）を最小化するパラメータを求めるように実装する。ただし、動的な相関行列 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ とするため、(3.1), (3.2) 式のダイナミクスを考慮し、(3.2) 式の $\Psi(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}_{t-1})$ については、DGHSkC では (3.4) 式、DACSkC では (3.6) 式に従った制約を課して、負の対数尤度を記述すればよい。本研究では負の対数尤度を最小化するために MATLAB の fmincon 関数を利用している。

4 TOPIX の金融 3 業種での分析

4.1 分析方法

吉羽 (2020a) では、TOPIX33 業種のうち銀行業 (TPNBK)、保険業 (TPINSU)、証券・商品先物取引 (TPSECR) の金融 3 業種の日次株価収益率 $\mathbf{r}_t = (r_{t,1}, r_{t,2}, r_{t,3})^\top$ から生成される疑似標本 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T\}$ を用いて、静的な ACSkC、GHSkC、tC、NC の 4 つの接合関数について、危機時 6 年間 (2006-10-1~2012-9-30) と平時 6 年間 (2012-10-1~2018-9-30) を推定した。この際、3 業種の各日次株価収益率 $r_{t,i}$ については、日次収益率そのものと (4.1) 式で表される EGARCH(1,1) でフィルタリングしたものをを用いた。

$$\begin{aligned} r_{t,i} &= \mu_i + \epsilon_{t,i} = \mu_i + \sigma_{t,i} z_{t,i} \\ \ln(\sigma_{t,i}^2) &= \omega_i + a_{1,i} z_{t-1,i} + b_{1,i} \ln(\sigma_{t-1,i}^2) + c_{1,i} |z_{t-1,i}| \end{aligned} \quad (4.1)$$

吉羽 (2020a) では EGARCH(1,1) でフィルタリングについて統計分析ソフト R の rugarch パッケージを利用し、基準化誤差 $z_{t,i}$ については標準化された t 分布を採用して分析を行った。

本研究では、株価収益率の基準化残差に非対称性が観測されることが多いことから基準化誤差 $z_{t,i}$ の分布として rugarch パッケージで利用可能な Fernández and Steel (1998) の非対称 t 分布を

採用する。この非対称 t 分布の密度関数は以下のように与えられる。

$$f(x_i|\xi_i) = \frac{2\xi_i}{\xi_i^2 + 1} t_{1,v_i} \left(x_i \xi_i^{-\text{sign}(x_i)} \right) \quad (4.2)$$

ここで、 $t_{1,v_i}(\cdot)$ は自由度 v_i の 1 変量 t 分布の密度関数であり、 $\text{sign}(x)$ は次式で定義される。

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

疑似標本 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T\}$ については、 $\mathbf{u}_t = (u_{t,1}, u_{t,2}, u_{t,3})$ の各 i 成分 ($i = 1, 2, 3$) に関して、基準化残差の時系列から経験分布関数の一種を用いて以下のように求めたうえで、ACSkC、GHSkC、tC、NC の各接合関数を推定する。本研究では吉羽 (2020a) と同様に静的な接合関数を推定した後に、全期間で動的な接合関数を推定していく。

$$u_{t,i} = \frac{1}{T+1} \sum_{s=1}^T 1_{\{z_{s,i} \leq z_{t,i}\}}, \quad t = 1, \dots, T$$

4.2 吉羽 (2020a) 表 1, 2 の再現

まず、吉羽 (2020a) で分析した期間 1 (2006-10-1~2012-9-30) と期間 2 (2012-10-1~2018-9-30) について、基準化誤差 $z_{t,i}$ の分布をFernández and Steel (1998) の非対称 t 分布に変えて、EGARCH(1,1) に従う周辺分布の推定と静的な接合関数の推定を行う。

期間 1、期間 2 での周辺分布の推定結果は、表 1 のとおりである。

表 1: 期間 1、期間 2 での周辺分布の推定結果

観測期間	2006/10/2 — 2012/9/28			2012/10/1 — 2018/9/28		
セクター	TPNBK	TPINSU	TPSECR	TPNBK	TPINSU	TPSECR
μ	-0.0005	-0.0003	-0.0009	0.0004	0.0006	0.0003
s.e.	(0.0004)	(0.0005)	(0.0017)	(0.0001)	(0.0001)	(0.0005)
ω	-0.1240	-0.1115	-0.1392	-0.2661	-0.1856	-0.1965
s.e.	(0.0093)	(0.0152)	(0.0163)	(0.0148)	(0.0097)	(0.0185)
a_1	-0.0678	-0.0300	-0.0624	-0.0699	-0.0684	-0.0740
s.e.	(0.0186)	(0.0169)	(0.0180)	(0.0213)	(0.0229)	(0.0228)
b_1	0.9846	0.9856	0.9815	0.9681	0.9771	0.9757
s.e.	(0.0011)	(0.0019)	(0.0020)	(0.0017)	(0.0011)	(0.0023)
c_1	0.1720	0.1713	0.1637	0.2060	0.1753	0.2109
s.e.	(0.0305)	(0.0368)	(0.0370)	(0.0282)	(0.0297)	(0.0357)
ξ	1.1172	1.0316	1.0767	1.0913	1.0394	1.0761
s.e.	(0.0449)	(0.0357)	(0.0444)	(0.0365)	(0.0368)	(0.0377)
v	8.8625	13.1809	9.3586	6.4698	6.8087	5.4905
s.e.	(2.1455)	(5.6503)	(2.3308)	(1.0211)	(1.0824)	(0.8575)

基準化残差の非対称性は ξ が1から離れることで生じるが、標準誤差（s.e.）対比でそれほど離れてはおらず、TPINSUについては非対称性 ξ は有意になっていないことがわかる。また、期間1の μ と期間2の証券業セクターの μ は有意ではないが、その他のパラメータは概ね有意となっている。

期間1、期間2での静的な接合関数の推定結果は表2のとおりであり、吉羽 (2020a) の表1, 2のEGARCH(1,1)の結果とほぼ同様の結果が得られる。ただし、ここでの ρ_{ij} はGHSktC、tC、NCについては Σ の非対角要素である一方、ACSktCについては Ω の非対角要素になっている。

表 2: 期間1、期間2での静的な接合関数の推定結果

観測期間	2006/10/2 — 2012/9/28				2006/10/2 — 2012/9/28			
接合関数	ACSktC	GHSktC	tC	NC	ACSktC	GHSktC	tC	NC
ρ_{21}	0.820	0.769	0.774	0.774	0.844	0.792	0.799	0.797
s.e.	(0.017)	(0.010)	(0.009)	(0.008)	(0.014)	(0.010)	(0.009)	(0.007)
ρ_{31}	0.863	0.824	0.827	0.823	0.863	0.817	0.823	0.813
s.e.	(0.013)	(0.008)	(0.007)	(0.006)	(0.012)	(0.008)	(0.008)	(0.007)
ρ_{32}	0.785	0.724	0.730	0.715	0.808	0.744	0.752	0.751
s.e.	(0.020)	(0.012)	(0.011)	(0.010)	(0.017)	(0.011)	(0.010)	(0.009)
δ/γ	-0.578	-0.233			0.604	-0.280		
s.e.	(0.089)	(0.094)			(0.078)	(0.077)		
ν	8.193	8.261	8.431		7.803	7.474	7.878	
s.e.	(1.213)	(1.265)	(1.263)		(1.079)	(0.943)	(1.095)	
対数尤度	1571.0	1570.0	1566.3	1530.1	1647.2	1647.6	1641.3	1592.0
AIC	-3132.0	-3130.1	-3124.5	-3054.2	-3284.5	-3285.1	-3274.5	-3178.1
BIC	-3105.5	-3103.6	-3103.3	-3038.3	-3258.0	-3258.7	-3253.4	-3162.2

4.3 参考：rugarch での分布推定について

R の rugarch パッケージでは、基準化誤差に正規、非対称正規、 t 、非対称 t 、一般化誤差、非対称一般化誤差、逆正規、GH、Johnson の SU など様々な分布を想定することができる。このうち、非対称 t 分布は、(4.2) 式の密度関数で表される Fernández and Steel (1998) の分布で $\xi = 1$ のときに、非対称性がないことがわかる。

したがって、 t 値を計算する場合、単純に推定値を標準誤差で除すのではなく、推定値から1を差し引いた後に標準誤差で除す必要がある。rugarch パッケージでは表3のとおり、その処理が行われていないようであり、例えば、期間1のTPINSUの非対称性 ξ については t 値や p 値から ξ が有意であるかのように見えてしまうので、注意が必要である。

表 3: rugarch での非対称 t 分布の推定

Optimal Parameters

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000285	0.000486	-0.58594	0.557917
omega	-0.111516	0.018021	-6.18812	0.000000
alpha1	-0.029984	0.017250	-1.73817	0.082181
beta1	0.985575	0.002320	424.81550	0.000000
gamma1	0.171273	0.027667	6.19060	0.000000
skew	1.031633	0.038998	26.45329	0.000000
shape	13.180869	4.136092	3.18679	0.001439

Robust Standard Errors:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000285	0.000494	-0.57615	0.564515
omega	-0.111516	0.015181	-7.34565	0.000000
alpha1	-0.029984	0.016871	-1.77726	0.075526
beta1	0.985575	0.001904	517.64864	0.000000
gamma1	0.171273	0.036812	4.65262	0.000003
skew	1.031633	0.035726	28.87623	0.000000
shape	13.180869	5.650267	2.33279	0.019659

4.4 分析期間の更新

次に、直近までの6年間の期間3（2018/8/8～2024/8/7）と期間1～3のすべてを含む全期間4（2006/10/2～2024/8/7）について、基準化誤差 $z_{t,i}$ を [Fernández and Steel \(1998\)](#) の非対称 t 分布とする EGARCH(1,1) に従う周辺分布の推定と静的な接合関数の推定を行う。

期間3、期間4での周辺分布の推定結果は、表4のとおりである。

表 4: 期間3、期間4での周辺分布の推定結果

観測期間	2018/8/8 — 2024/8/7			2006/10/2 — 2024/8/7		
セクター	TPNBK	TPINSU	TPSECR	TPNBK	TPINSU	TPSECR
μ	0.0006	0.0006	0.0003	0.0002	0.0004	0.0001
s.e.	(0.0002)	(0.0004)	(0.0004)	(0.0002)	(0.0003)	(0.0003)
ω	-0.6160	-0.8360	-0.4211	-0.1874	-0.1283	-0.1442
s.e.	(0.0894)	(0.4065)	(0.0352)	(0.0070)	(0.0046)	(0.0074)
a_1	-0.0207	-0.0495	-0.0632	-0.0515	-0.0453	-0.0623
s.e.	(0.0259)	(0.0276)	(0.0236)	(0.0123)	(0.0122)	(0.0118)
b_1	0.9275	0.9004	0.9498	0.9773	0.9841	0.9819
s.e.	(0.0105)	(0.0482)	(0.0040)	(0.0008)	(0.0005)	(0.0010)
c_1	0.2564	0.2703	0.2197	0.1957	0.1630	0.1880
s.e.	(0.0509)	(0.0672)	(0.0441)	(0.0202)	(0.0206)	(0.0203)
ξ	1.0507	0.9721	0.9977	1.0790	1.0067	1.0491
s.e.	(0.0357)	(0.0375)	(0.0371)	(0.0243)	(0.0226)	(0.0215)
ν	5.9616	7.3031	6.7510	6.7223	8.1121	6.7731
s.e.	(0.9442)	(1.1816)	(1.1269)	(0.6940)	(1.0223)	(0.7245)

期間3、期間4での静的な接合関数の推定結果は表5のとおりであり、期間2, 3では情報量規準で GKSktC が選択されるが、全期間4では AIC、BIC 双方の情報量規準で ACSktC が選択さ

れる。

表 5: 期間 3、期間 4 での周辺分布の推定結果

観測期間	2018/8/8 — 2024/8/7				2006/10/2 — 2024/8/7			
接合関数	ACSkC	GHSkC	tC	NC	ACSkC	GHSkC	tC	NC
ρ_{21}	0.837	0.773	0.784	0.779	0.835	0.777	0.785	0.783
s.e.	(0.014)	(0.011)	(0.009)	(0.008)	(0.008)	(0.006)	(0.005)	(0.005)
ρ_{31}	0.799	0.720	0.733	0.721	0.843	0.788	0.795	0.786
s.e.	(0.017)	(0.013)	(0.011)	(0.010)	(0.008)	(0.006)	(0.005)	(0.005)
ρ_{32}	0.763	0.668	0.685	0.683	0.786	0.712	0.722	0.715
s.e.	(0.020)	(0.015)	(0.013)	(0.011)	(0.011)	(0.007)	(0.007)	(0.006)
δ/γ	-0.633	-0.347			-0.615	-0.281		
s.e.	(0.066)	(0.097)			(0.043)	(0.047)		
ν	7.722	7.542	7.893		7.571	7.492	7.713	
s.e.	(1.107)	(1.080)	(1.124)		(0.607)	(0.566)	(0.616)	
対数尤度	1321.3	1322.7	1312.5	1270.8	4472.1	4471.6	4450.7	4312.8
AIC	-2632.7	-2635.4	-2617.0	-2535.7	-8934.2	-8933.1	-8893.4	-8619.5
BIC	-2606.2	-2609.0	-2595.8	-2519.8	-8902.3	-8901.2	-8867.9	-8600.4

4.5 全分析期間に対する DACSkC の適用と裾従属係数の時系列変化

最後に全分析期間 4 の疑似標本 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T\}$ について、提案する DACSkC を最尤推定したうえで、上下の裾従属係数の時系列変化を観察する。

期間 4 の疑似標本に対して DACSkC を含む動的接合関数を最尤推定した結果は表 6 のとおりである。ここでの $\tilde{\rho}_{ij}$ は DACSkC の相関行列 Σ_t に対する無条件の相関行列 $\tilde{Q}$ の非対角要素である。

表 6: 全分析期間に対する動的接合関数の推定結果

	推定値	標準誤差
$\tilde{\rho}_{21,0}$	0.762	(0.007)
$\tilde{\rho}_{31,0}$	0.786	(0.009)
$\tilde{\rho}_{32,0}$	0.701	(0.009)
δ	-0.602	(0.007)
ν	8.620	(0.037)
α	0.029	(0.006)
β	0.952	(0.013)
対数尤度	4642.2	
AIC	-9270.5	
BIC	-9225.8	

銀行業、保険業、証券業の日次収益率に関する裾従属係数について DACSkC で捉えた上下の裾従属係数の時系列変化は図 1–3 のようになる。ここで、各 2 変量の組合せについて、濃い線が下側裾従属係数 $\lambda_{L,t}^{DACSkC}$ であり、薄い線が上側裾従属係数 $\lambda_{U,t}^{DACSkC}$ である。非対称性 (Asymmetry) は $\lambda_{L,t}^{DACSkC} - \lambda_{U,t}^{DACSkC}$ で定義されるが、前述の推定結果 $\delta = -0.602 < 0$ と変数間の相関が正

であることより、Asymmetry は必ず負になり、Asymmetry の変化は $y = 0.0$ の横軸よりも下側で推移する。

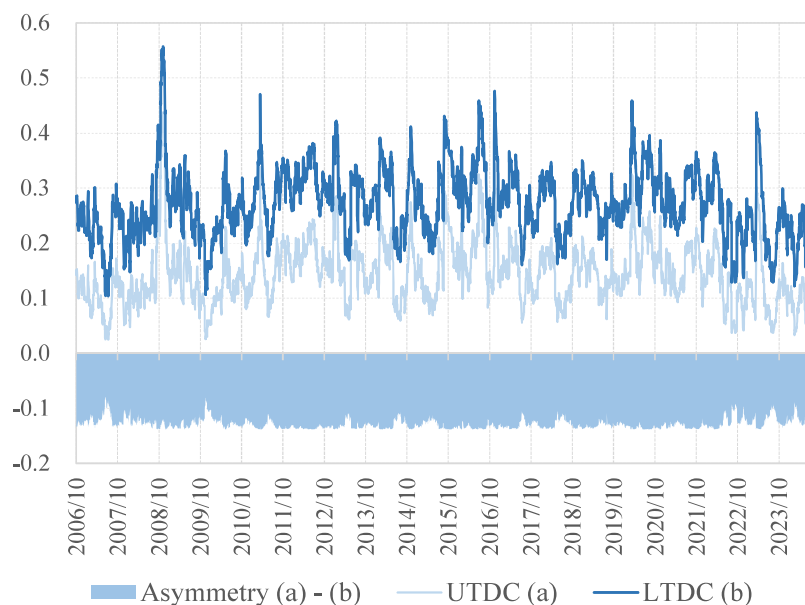


図 1: 銀行業と保険業の裾従属係数の時系列変化

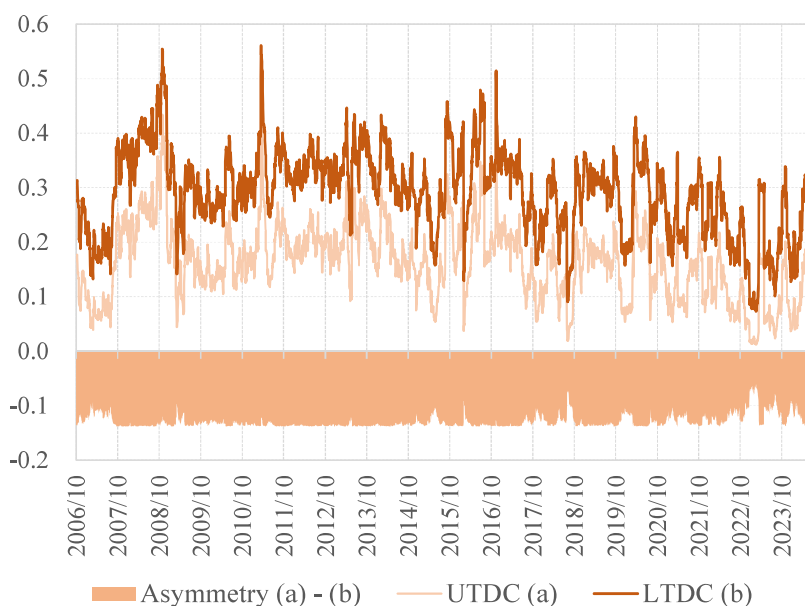


図 2: 銀行業と証券・先物取引業の裾従属係数の時系列変化

5 まとめと今後の課題

本研究では、[夷藤・中村 \(2019\)](#) と [Ito and Yoshiba \(2024\)](#) で示された cDCC を適用した DGH-SktC、DACStC の構築方法を整理した。そのうえで、[吉羽 \(2020a\)](#) で対象とした金融 3 業種の日次株価収益率について、直近の 6 年間（2018-8-8～2024-8-7）も分析対象に加えて分析した。

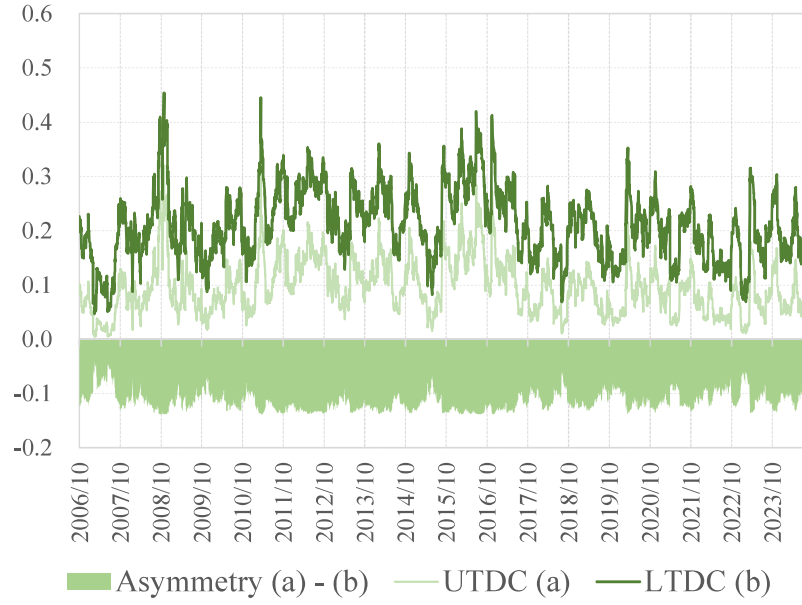


図 3: 保険業と証券・先物取引業の裾従属係数の時系列変化

周辺分布については、基準化誤差にFernández and Steel (1998)の非対称 t 分布を仮定したEGARCH(1.1)を想定して、接合関数推定用の疑似標本 $\{u_1, \dots, u_T\}$ を推定した。吉羽 (2020a)で対象とした期間1 (2006-10-1～2012-9-30)と期間2 (2012-10-1～2018-9-30)の計測機関のほか、直近の期間3 (2018-8-8～2024-8-7)と全期間4 (2006-10-1～2024-8-7)を対象とした。

期間1, 2での各周辺分布の基準化誤差の非対称性は特に保険業で有意にはならず、静的なACSkC、GHSkC、tC、NCの4つの接合関数を最尤推定した結果、吉羽 (2020a)の表1, 2のEGARCH(1,1)とほぼ同様の結果が得られた。

期間3, 4でも静的なACSkC、GHSkC、tC、NCの接合関数を最尤推定したうえで、全期間4についてIto and Yoshida (2024)で提案されたDACSkCの構築法を適用し、最尤推定したうえで、上下の裾従属係数とその差で定義される非対称性の時系列変化を観察した。

本研究でのDACSkCでは、期間中に変化するのは相関行列 Σ_t のパラメータだけであり、非対称性パラメータ δ は固定されている。相関行列 Ω_t に非対称性パラメータベクトル δ を取り込んで、拡大相関行列 R_t を

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \delta_t^\top \\ \delta_t & \Omega_t \end{pmatrix}$$

と想定することで、非対称性パラメータ δ_t の時間変化を考慮可能である。そうしたモデル化によって非対称性の強まりで裾従属係数の非対称性も大きくなる可能性があり、より保守的なリスク管理や資産運用に応用できる可能性がある。これは今後の課題である。

参考文献

- Aielli, G. P. (2013) “Dynamic Conditional Correlations: on Properties and Estimation,” *Journal of Business and Economic Statistics*, **31**(3), 282–299, [10.1080/07350015.2013.771027](https://doi.org/10.1080/07350015.2013.771027).
- Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996) “The multivariate skew-normal distribution,” *Biometrika*, **83**(4), 715–726, [10.1093/biomet/83.4.715](https://doi.org/10.1093/biomet/83.4.715).
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003) “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389, [10.1111/1467-9868.00391](https://doi.org/10.1111/1467-9868.00391).
- Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K., and Langlois, H. (2012) “Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach,” *Review of Financial Studies*, **25**(12), 3711–3751, [10.1093/rfs/hhs104](https://doi.org/10.1093/rfs/hhs104).
- Demarta, S. and McNeil, A. J. (2005) “The t Copula and Related Copulas,” *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129, [10.1111/j.1751-5823.2005.tb00254.x](https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2005.tb00254.x).
- Engle, R. (2002) “Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**(3), 339–350, [10.1198/073500102288618487](https://doi.org/10.1198/073500102288618487).
- Fernández, C. and Steel, M. F. J. (1998) “On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 359–371, [10.2307/2669632](https://doi.org/10.2307/2669632).
- Fortin, A.-P., Simonato, J.-G., and Dionne, G. (2023) “Forecasting expected shortfall: Should we use a multivariate model for stock market factors?” *International Journal of Forecasting*, **39**(1), 314–331, [10.1016/j.ijforecast.2021.11.010](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2021.11.010).
- Fung, T. and Seneta, E. (2010) “Tail dependence for two skew t distributions,” *Statistics & Probability Letters*, **80**(9-10), 784–791, [10.1016/j.spl.2010.01.011](https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.01.011).
- Ito, K. and Yoshiba, T. (2024) “Dynamic asymmetric tail dependence structure among multi-asset classes for portfolio management: Dynamic skew- t copula approach,” *International Review of Economics & Finance*, 103724, [10.1016/j.iref.2024.103724](https://doi.org/10.1016/j.iref.2024.103724).
- Joe, H. (2006) “Discussion of “Copulas: Tales and facts”, by Thomas Mikosch,” *Extremes*, **9**(1), 37–41, [10.1007/s10687-006-0019-6](https://doi.org/10.1007/s10687-006-0019-6).
- Padoan, S. A. (2011) “Multivariate extreme models based on underlying skew- t and skew-normal distributions,” *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(5), 977–991, [10.1016/j.jmva.2011.01.014](https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.01.014).

Yoshiba, T. (2018) “Maximum likelihood estimation of skew- t copulas with its applications to stock returns,” *Journal of Statistical Computation and Simulations*, **88**(13), 2489–2506, [10.1080/00949655.2018.1469631](https://doi.org/10.1080/00949655.2018.1469631).

夷藤翔・中村信弘 (2019) 「ダイナミック非対称 t コピュラを用いた新興国国債市場の相互依存構造に関する研究」, 『ジャフイー・ジャーナル』, **17**, 45–66, [10.32212/jafee.17.0_45](https://doi.org/10.32212/jafee.17.0_45).

吉羽要直 (2020a) 「非対称 t 接合関数の性質・推定法とその応用」, 『数理解析研究所講究録』 (2173), 1–17, 京都大学数理解析研究所.

吉羽要直 (2020b) 「非対称 t 接合関数の性質と統計的推定方法 —資産価格変動への応用—」, 『統計数理』, **68**(1), 45–63.