

マルコフ過程を用いた動的幾何ソフトウェアについて（みつどもえ作図の収束について）

明治大学 総合数理学部 阿原 一志
Kazushi Ahara, University

概要：著者は、マルコフ過程を用いた動的幾何ソフトウェアである PointLine を開発中である。PointLine を用いた、みつどもえ作図（およびその類型）の作図収束に関する数理的解決の部分解が得られましたので報告する。

1 はじめに

1.1 動的幾何学ソフトウェア概観

動的幾何ソフトウェア (Dynamic geometry system, DGS) の定義については、おおむね合意が得られており、Wikipedia に記載されているものが標準であると考えられる。それによると、「コンピュータソフトウェアにであって、おもに平面幾何学の作図を行うことができるものをいう。これらの動的幾何学ソフトにおいては、作図は点・直線・円などをマウスクリック・ドラッグによって行い、作図手順が記録される。作図を行った後に、幾何要素（点・直線・円など）を動かして、作図全体を変化させることができるのが主な特徴である。」

上記定義において「平面幾何学の作図」は、古代ギリシャ以来の「コンパスと定規による作図」を核として、そこにいくつかの「便利と思われる作図手順」を追加したものであると考えられる。阿原 (2023a) によれば「作図ソフトウェアの基本思想は、コンパスと定規による作図の作業を電子化したものである。GeoGebra をはじめとする、ほぼすべての従来の DGS では、コンパスや定規による作図の手順を入力することにより、演繹的に図を構築する仕組みが導入されている。定規とコンパスによる演繹的な作図においては、手順が後の幾何要素（頂点、直線、円など）は、すでに生成された幾何要素から一方向的に依存するのが当然であり、従来の DGS ではこの思想でソフトウェアが成立している。」このことも、広く同意を得ているものと考えられる。

1.2 PointLine：双方向的 DGS の先駆け

阿原 [2] (2018) により公開されているソフトウェア PointLine では、双方向的な作図モジュールという考え方を導入して、この考え方をマルコフ過程の技法を援用することによりシステム実装を行っている。詳細は [3] にゆだねる。

PointLine はソースコードを公開している [4][5]。

1.3 PointLine の問題点

画面上の**作図が安定すること**を、頂点の点群に作用するマルコフ過程が任意の初期状態に対して収束することとする。作図が形をかえないままに回転したり平行移動したりすることは含まないものとする。すべての作図が安定するようなマルコフ過程をもつ作図モジュールが設計できるかどうかは数理的な解析が必要である。図が成立するような作図のほとんどすべてでは、現状の PointLine のもつマルコフ過程群で安定している。さんすくみ作図は、当初は安定しないものと考えられていたが、本稿で説明するようにパラメータを制限すれば安定であることが示された。

本稿では、作図モデルを定義し、いくつかの具体的な作図モデルにおいて、図が安定するためにはパラメータに条件付けが必要であるということを紹介する。

2 問題の設定：作図モデルの収束性の解析

PointLine に実装されている双方向的な機能は、平面上の点群を対象として、作図の構成要素（点同士の関係性、モジュールと呼んでいる）を実現するような、いくつかのマルコフ過程を考え、点群に連立的にこのマルコフ過程をイテレートすることにより実現している。このことから、作図の構成要素を実現するマルコフ過程は、イテレートにより単体で収束することも求められるが、作図全体で収束することも要請される。本稿では、PointLine の機能の中から、**中点モジュール**に関するものと、**頂点の固定**に関するものだけを仮想的に取り出し、作図の安定的な収束が保証される条件について数理的に解決することを目指す。

そのうえで、本稿では次節以降でこの2つの構成要素のみで作れる3種類の図（図2，3，4）の収束性について説明する。この図を取り上げた理由としては、PointLine 開発過程において、図3（ふたつどもえ）、図4（みつどもえ）に対して、図を安定的に収束させるような中点モジュールの設計がわからず、試行錯誤のうえでパラメータ調整に成功した、という経緯がある。

この二つの図に共通することは、二つ以上の中点モジュールが相互参照をしているという点であり、よつどもえ、いつつどもえ、など点要素を増やした場合に、挙動がどのように変化するかという問題は未解決である。Mathematica によるシミュレーションでは、 $2r < t$ という条件については、よつどもえ、いつつどもえにおいても収束が保証されることが観察されている。

3 作図モデルの定義

この節では、**作図モデル**の定義を行う。作図モデルとは、幾つかのモジュールと、頂点の固定・非固定設定の組み合わせから構築されるものである。ここではモジュールは中点モジュールだけに限定して考察を行う。

3.1 中点モジュール：作図モデルの部品 (1)

3.1.1 中点モジュールを表す行列 M

中点モジュールを次のように定義する

定義 1 3つの平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を成分とする列ベクトル全体の集合を $(\mathbb{R}^2)^3$ とする. 関数 $M : (\mathbb{R}^2)^3 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^3$ が $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の中点に指定する**中点モジュール**の遷移関数であるとは, 以下の4つの条件をみたすものとする.

(条件0) M は対角化可能な3次実正方行列で表現される.

(条件1) 任意の ${}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n({}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$ は $((\mathbb{R}^2)^3 = \mathbb{R}^6$ として) 収束する. この極限を ${}^t(\mathbf{a}^\infty, \mathbf{b}^\infty, \mathbf{c}^\infty)$ と書くことにする.

(条件2) 任意の ${}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ に対して, $\mathbf{a}^\infty + \mathbf{b}^\infty = 2\mathbf{c}^\infty$ である.

(条件3) M は必ず固有値1を持つものとし, 固有値1の固有空間の次元は2であるものとする.

(条件4) M は自明な行を持たないものとする. ここで第 i 行が自明であるとは, $M = \begin{pmatrix} m_{ij} \end{pmatrix}$ としたとき, 任意の j に対して $m_{ij} = \delta_{ij}$ であることと定める.

M が上記の条件0～条件2を満たすものとして, M の固有値の絶対値に着目する. 条件1により, M の固有値は, 絶対値が1未満の複素数であるか, または1である. M の固有値の絶対値のすべてが1未満の場合には, 必ず $\mathbf{a}^\infty = \mathbf{b}^\infty = \mathbf{c}^\infty = 0$ となり, 条件2は必ず満たされるが, この場合は M は条件3により, 中点モジュールではない.

M の固有値1の固有空間の次元が1であり, 残りの固有値の絶対値がすべて1未満だとすると, $\mathbf{a}^\infty, \mathbf{b}^\infty, \mathbf{c}^\infty$ は, 初期の ${}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ によらず, 原点を通るような一つの直線上に載ることになる. DGS を実装するためのモジュールの適切さから, この場合は除外して考える.

M が対角化不可能の場合も考えられるが, 条件1の収束性から2次元のジョルダンブロックはないことが示されるので, (断らずとも良かったのだが) 条件0には対角化可能であるとした.

ソフトウェア仕様の観点からは, 3次正方行列で与えられないような関数 $M : (\mathbb{R}^2)^3 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^3$ を考えてもよい. 実際に中点以外のモジュールでは, 線形ではないような遷移関数を想定している. ここでは, 問題を簡素にするために, このようなセッティングをおこなった.

アルゴリズム工学の観点からは, 「早く収束する」ことも大切だが, このことは特に問わないものとする. 実際には, 実用に耐えるステップ数でほぼ収束するようにコーディングすることが可能である.

定理 1 (1) 写像 M が条件0～条件4を満たすとき, ある実数 r, s, t が存在して

$$M = M(r, s, t) = \begin{pmatrix} 1-r & -r & 2r \\ -s & 1-s & 2s \\ \frac{t}{2} & \frac{t}{2} & 1-t \end{pmatrix}$$

である。ただし、 $0 < r + s + t < 2$ である。

(2) $M(r, s, t)$ の固有値は $1, 1, 1 - r - s - t$ であり、固有空間はそれぞれ

$$W_1 = \text{Span} \left({}^t(2, 0, 1), {}^t(-1, 1, 0) \right)$$

$$W_{1-r-s-t} = \text{Span} \left({}^t(r, s, -\frac{t}{2}) \right).$$

である。

証明: 固有値 1 の固有空間を W_1 と書くことにする。 ${}^t(a, b, c) \in W_1$ について、次の命題が成立する。

命題 1 ${}^t(a, b, c) \in W_1$ であるならば、 $a + b = 2c$ である。

証明: 任意の ${}^t(a_1, b_1, c_1), {}^t(a_2, b_2, c_2) \in W_1$ に対して、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2), \mathbf{c} = (c_1, c_2)$ とすると、 $M({}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = {}^t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ であることから、条件 1, 2 より $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{c}$ である。このことより、 $a_1 + b_1 = 2c_1$ が従う。(証明終わり)

固有値 1 の固有空間の次元が 2 であることから

$$W_1 = \{(a, b, c) \mid a + b = 2c\} = \text{Span} \left({}^t(2, 0, 1), {}^t(-1, 1, 0) \right)$$

であることが従う。

1 以外の固有値を α 、その固有ベクトルの一つを ${}^t(x, y, z)$ (ただし、 $x + y \neq 2z$) と置くことにする。このとき、

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

と置いて、 $M' = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$ を求めると

$$M' = \frac{1}{-x - y + 2z} \begin{pmatrix} -\alpha x - y + 2z & -x(\alpha - 1) & 2x(\alpha - 1) \\ -y(\alpha - 1) & -x - \alpha y + 2z & 2y(\alpha - 1) \\ -z(\alpha - 1) & -z(\alpha - 1) & -x - y + 2\alpha z \end{pmatrix}$$

である。この行列 M' は、固有値 $1, \alpha$ をもち、固有空間はそれぞれ $\text{Span}({}^t(2, 0, 1), {}^t(-1, 1, 0))$, $\text{Span}({}^t(x, y, z))$ である。ここで、 $r = \frac{x(\alpha - 1)}{-x - y + 2z}$, $s = \frac{y(\alpha - 1)}{-x - y + 2z}$, $t = \frac{-2z(\alpha - 1)}{-x - y + 2z}$ とおくと、

$$M' = \begin{pmatrix} 1 - r & -r & 2r \\ -s & 1 - s & 2s \\ \frac{t}{2} & \frac{t}{2} & 1 - t \end{pmatrix}$$

を得る。このとき、 $x : y : z = r : s : -t/2$ であり、 $r + s + t \neq 0$ が条件となる。改めて固有値を求めると $\alpha = 1 - r - s - t$ となる。イテレートによって収束する条件より、 $-1 < 1 - r - s - t < 1$ であって、 $0 < r + s + t < 2$ が従う。このことから、 M' を改めて M とおけば、これが求める行列である。(証明終わり)

3.1.2 中点モジュールを表す行列の図形的な意味

この解は図形的な意味もあることがわかる．実際に， ${}^t(a'_1, a'_2, a'_3) = M^t(a_1, a_2, a_3)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-r)a_1 + r(-a_2 + 2a_3) \\ (1-s)a_2 + s(-a_1 + 2a_3) \\ (1-t)a_3 + t(a_1 + a_2)/2 \end{pmatrix}$$

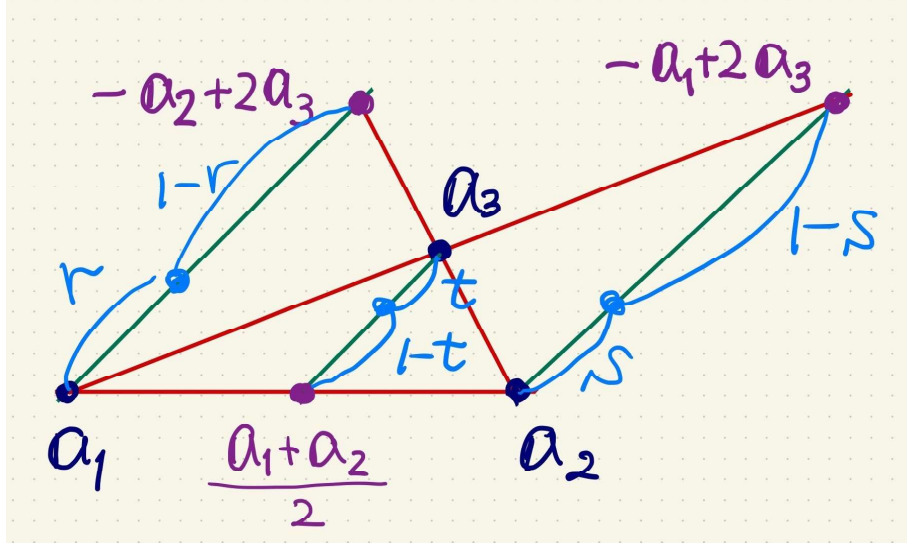


図 1: 中点モジュールの図形的意味

つまり， a'_1 は2点 $a_1, (-a_2 + 2a_3)$ を $r : 1-r$ に内分した点であり， a'_2 は2点 $a_2, (-a_1 + 2a_3)$ を $s : 1-s$ に内分した点であり， a'_3 は2点 $a_3, (a_1 + a_2)/2$ を $t : 1-t$ に内分した点である（図1）．この行列は，自由な3点から始めて，その3点のそれぞれが，等間隔に並んでいる状況からどれだけ離れているかを調べ，内分により等間隔に並んでいる状況に近づけようとするような写像になっている．

仮定 1 以降，DGS としての適切さから， $0 < r, s, t < 1, r = s$ を仮定する．

$r = s$ という条件は図1の a_1, a_2 に関する遷移を等価にするための条件である． $0 < r, s, t < 1$ であることは， a'_1, a'_2, a'_3 のそれぞれが内分であるための条件である． a_1, a_2, a_3 のうちの任意の2つを固定した場合，残りの1つが適切な位置へと収束するためには a'_1, a'_2, a'_3 のそれぞれが内分である必要がある．これも DGS としての自然なふるまいを要請するための条件として追加した．もっとも，数学的にはこの**仮定**を課す必要はなく，以下の考察においても，この**仮定**を付けない議論には数学的な興味があるものと考えている．

3.1.3 一般の点群についての中点モジュールを表す行列 M_{ijk}

平面ベクトルを成分とする列ベクトルの集合 $(\mathbb{R}^2)^n$ を考える．これは，平面上の n 個からなる点群であるとも考えることもできる．このような状況で， n 個の内の特定の 3 点について上記の中点モジュールを作用させるような写像を定義する．

定義 2 $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ を互いに異なる 3 数とする． $\mathbf{a}_k$ を $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ の中点に指定する写像 $M_{ijk} : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \text{ に対して } {}^t(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_n) &= M_{ijk}({}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)) \text{ を} \\ (1) \quad {}^t(\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}'_j, \mathbf{a}'_k) &= M({}^t(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k)) \\ (2) \quad \mathbf{a}'_m &= \mathbf{a}_m \quad (m \neq i, m \neq j, m \neq k) \end{aligned}$$

によって定める．

3.2 頂点の固定：作図モデルの部品 (2)

頂点のいくつかを固定するような作図モデルを構築することを考える．実際に，マルコフ過程を構成する遷移関数の各々において，「幾つかの頂点を固定する」という定義を含めることにする．実際には以下のように定義する．

平面ベクトルの列 $(\mathbb{R}^2)^n$ と互いに異なる 3 数 $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ を考え， $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 F に対して， $M_{ijk}^F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$ を以下で定義する．

実際に， ${}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ に対して

$${}^t(\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \dots, \mathbf{a}''_n) = M_{ijk}^F({}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)) \text{ を}$$

$$\mathbf{a}''_m = \begin{cases} \mathbf{a}_m & \text{if } m \in F \\ \mathbf{a}'_m & \text{if } m \notin F \end{cases}$$

ただし， $\mathbf{a}'_m$ は ${}^t(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_n) = M_{ijk}({}^t(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n))$ により定める．

3.3 作図モデルの構築

点の個数 n を指定し，平面上の点群 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を考える．点群の要素を頂点と呼ぶことにして，点群の要素の中から固定する要素を指定し，点群の要素の間に中点の関係性を設定する．以下に示した最初の例では，「点の個数 $n = 3$ ， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を固定， $\mathbf{a}_3$ を $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ の中点に指定」のように書かれているが，これで作図モデルとしては必要十分である．

作図モデルを構築出来たら，次は遷移関数の設定を行う． $F \subset \{1, 2, \dots, n\}$ によって，頂点の幾つかを固定したうえで，特定の 3 点の間に中点という相互関係を持たせるような関数 M_{ijk}^F を準備する．中点モジュールが複数ある場合には，中点モジュールそれぞれに応じて M_{ijk}^F を準備する．

マルコフ過程としては、点群の初期状態は、互いに異なることを前提に任意の一般の位置にあるとして、遷移関数は準備した1つ以上の M_{ijk}^F の合成関数を考えることにする。合成関数を作る際には、合成の順序が問題になる可能性はあるが、PointLineを開発しているうえでは、この合成の順序は重要視していない。合成の順序交換による、収束・非収束の変動や、極限の点配置の変動については、数理的な課題としては認識しているが、本稿では言及しない。

主たる問題は「点群の初期値に関わらず、遷移関数を繰り返し適用する（イテレートする）ことにより、点群が収束するかどうか」である。PointLineでは多くの種類のモジュールがあり、その組み合わせも無数にあるが、そもそも図が破綻しないようなモジュールの組み合わせで、遷移関数のイテレートが収束しない場合のある例は、本稿のふたつどもえ、みつどもえ以外には見つかっていない。（見つかっていないから存在しないということにはならない。）

4 作図モデルの構築と、その収束性

4.1 例1：固定された2点の midpoint の作図モデル

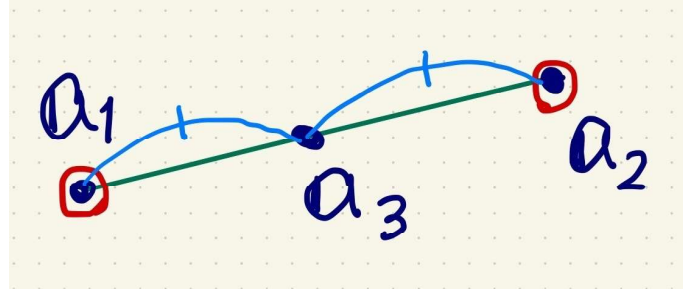


図 2: 固定された2点の midpoint

頂点の個数 $n = 3$

a_1, a_2 を固定, a_3 を a_1a_2 の midpoint に指定

まず、図2について説明する。頂点の個数 n は3である。 a_1 と a_2 の頂点に丸囲みがあるが、これは固定された頂点を意味する。 a_1 から a_3 へパーレン、 a_3 から a_2 はパーレンがあるが、これは a_3 を a_1a_2 の midpoint に指定するような midpoint モジュールを設定することを意味する。

以上より、遷移関数は $M_{123}^{\{1,2\}}$ である。具体的に、遷移関数は

$$M_{123}^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & \frac{t}{2} & 1-t \end{pmatrix}$$

であり, 明らかに, 固有値は $1, 1, 1-t$ であって, $0 < t < 1$ の条件のもと, a_3 は a_1a_2 の中点へと収束する.

なお, 参考までに, 固定する頂点の組を変更して,

a_1, a_3 を固定, a_3 を a_1a_2 の中点に指定

という作図モデルで考えると, 遷移関数は $M_{123}^{\{1,3\}}$ となり, a_2 は a_1a_3 を $2:1$ に外分する地点へと収束することが確かめられる.

4.1.1 例2：ふたつともえ作図による作図モデル

この節では, ふたつともえ作図について考察する. この作図は図3で与えられる. GeoGebraなどの従来型のDGSで, 固定された a_1a_2 から a_3, a_4 を作図するためには, 3等分の作図をする必要があり, GeoGebraの中点の機能だけでは, この図に相当する作図はできない. (GeoGebraでスクリプトコーディングをすれば, その限りではないが, ネイティブな機能では作図できない.)

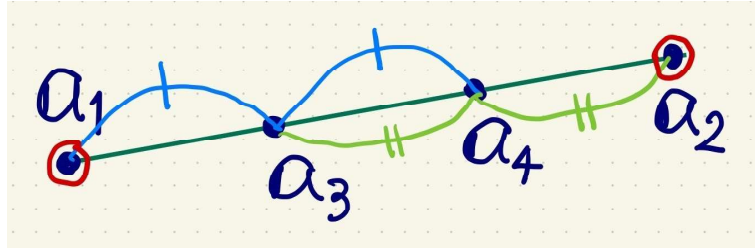


図 3: ふたつともえ作図

点の個数は $n = 4$ である. 頂点には順に $a_1, \dots, a_4$ と命名する.
 a_1, a_2 を固定, a_3 を a_1a_4 の中点に a_4 を a_2a_3 の中点に指定

遷移関数は $M_{143}^{\{1,2\}} M_{234}^{\{1,2\}}$ である.

$$\begin{aligned}
 M_{143}^{\{1,2\}} M_{234}^{\{1,2\}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1-t & \frac{t}{2} \\ -r & 0 & 2r & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1-r & 2r \\ 0 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} & 1-t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t}{2} & -r(1-t) + \frac{t^2}{4} & (1-r)(1-t) + \frac{t^2}{4} & (1-t)(2r + \frac{t}{2}) \\ -r & -2r^2 + \frac{(1-r)t}{2} & (1-r)(2r + \frac{t}{2}) & 4r^2 + (1-r)(1-t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

この行列のすべての固有値が「1 または絶対値が1未満」となるための r, t の条件を求めたい. 実質的に右下の 2×2 小行列を P_2 とおくと

$$P_2 = \begin{pmatrix} (1-r)(1-t) + \frac{t^2}{4} & (1-t)(2r + \frac{t}{2}) \\ (1-r)(2r + \frac{t}{2}) & 4r^2 + (1-r)(1-t) \end{pmatrix}$$

であり、 P_2 の固有値を α_2, β_2 とすると、遷移関数を表す行列の固有値は $1, 1, \alpha_2, \beta_2$ である。 α_2, β_2 を実際に計算してみると以下の二つの性質があることがわかる

命題 2 (0) 行列 P_2 の固有値は r, t に関わらず実数

(1) 行列 P_2 の固有値の絶対値が 1 未満である必要十分条件は $2r < t$ である。 .

証明： α_2, β_2 は 2 次方程式の解なので、この方程式を実際に書き下してみると $x^2 + bx + c = 0$ であって、

$$b = -2(1-r)(1-t) - \left(4r^2 + \frac{t^2}{4}\right),$$

$$c = (1-r-t)^2.$$

である。ここで、判別式を計算すると

$$\frac{b^2}{4} - c = (1-r)(1-t) \left(2r + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(4r^2 - \frac{t^2}{4}\right)^2$$

$$> 0,$$

となり、 α_2, β_2 がともに実数であることが保証される。また、 α_2, β_2 の絶対値が 1 未満であるための必要十分条件は $1 \pm b + c > 0$ かつ $-1 < -\frac{b}{2} < 1$ である。ここで前者は $x = \pm 1$ で $x^2 + bx + c > 0$ である条件、後者は $y = x^2 + bx + c$ の軸が -1 と 1 の間にある条件である。 b が負、 c が非負であることから、 $1 - b + c > 0$ と $-1 < -\frac{b}{2}$ は必ず成り立つ。残った条件は $1 + b + c > 0$ かつ $-\frac{b}{2} < 1$ である。前者の条件について、

$$1 + b + c = -\frac{3}{4}(2r-t)(2r+t).$$

であり、 $2r + t$ は正であることから、この式が正であることは $2r < t$ と同値である。

後者の条件について、 $0 < r < 1$ かつ $0 < t < 1$ の範囲で、 $2r < t \Rightarrow b + 2 > 0$ であることが計算により示すことができる。このことから、 $2r < t$ が求めるべき必要十分条件である。

つまり、図としては成立しうるが、パラメータが $r \ll 1, t \ll 1$ であっても、作図モデルが収束しない組 (r, t) が存在することが明らかになった。この性質を持つような作図モデルは、現状では「ふたつどもえ」「みつどもえ」とこの系列の図が判明しているだけである。

図 4 において、 $2r = t$ だとしても、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の移動距離が等しくなる。このことが、相互参照を含むような図の非収束の根拠になるものと想像される。

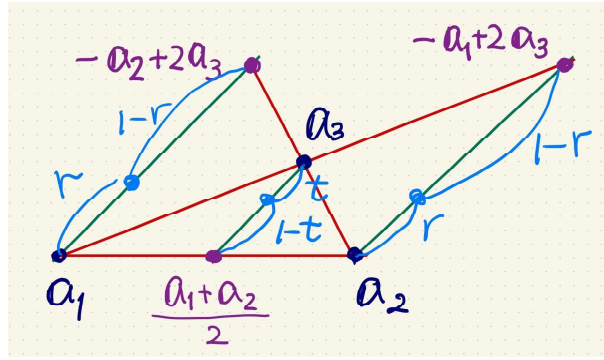


図 4: 移動距離の観測

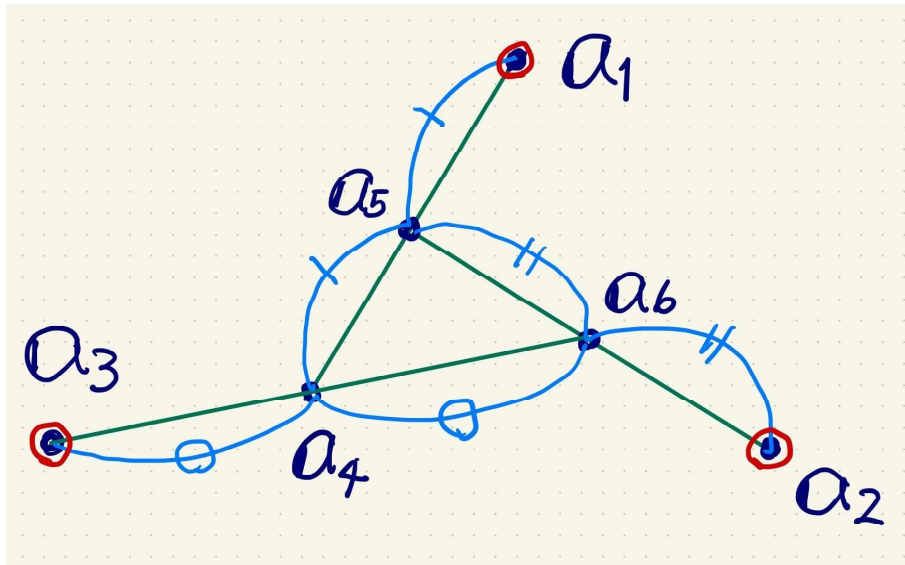


図 5: みつどもえ作図

4.2 例3：みつどもえ作図による作図モデル

本稿の主たる目的である，次の図についての説明と，現在判明している数学的な性質について説明する．

点の個数は $n = 6$ である．頂点には順に $a_1, \dots, a_6$ と命名する．
 a_1, a_2, a_3 を固定， a_5 を a_1a_4 の中点に， a_6 を a_2a_5 の中点に， a_4 を a_3a_6 の中点に指定する．

このことから，遷移関数は

$$M_{145}^{\{1,2,3\}} M_{256}^{\{1,2,3\}} M_{364}^{\{1,2,3\}}, M_{145}^{\{1,2,3\}} M_{364}^{\{1,2,3\}} M_{256}^{\{1,2,3\}}$$

のいずれかになる．今回は前者 $M_{145}^{\{1,2,3\}} M_{256}^{\{1,2,3\}} M_{364}^{\{1,2,3\}}$ を用いるが，後者を用いても同様の解析は成立する．

命題 3 遷移関数の行列は具体的に

$$M_{145}^{\{1,2,3\}} M_{256}^{\{1,2,3\}} M_{364}^{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} I_3 & O \\ * & P_3 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ただしここで

$$P_3 = \begin{pmatrix} 8r^3 + (1-r)(1-t) & 2(1-r)r & (1-r)(4r^2 + t/2) \\ (1-t)(4r^2 + t/2) & (1-r)(1-t) & 2(1-r)r(1-t) + t^2/4 \\ 2r(1-t) & t/2 & (1-r)(1-t) \end{pmatrix}$$

である．

この部分行列 P_3 のすべての固有値が 1 であるかまたは絶対値が 1 未満であるとき、この遷移関数はイテレーションによって収束する．固有値を与える P_3 の特性方程式を $f_3(x; r, t) = 0$ とすると

$$f_3(x; r, t) = x^3 - (3(1-r)(1-t) + 8r^3)x^2 + (3(1-r)(1-t)(1-r-t) - t^3/8)x - (1-r-t)^3$$

である．

P_3 が固有値 1 を持つための必要十分条件は $2r = t$ である．

4.2.1 すべての固有値の絶対値が 1 未満である条件

この 3 次方程式 $f_3(x; r, t) = 0$ の解すべてが「1 または絶対値が 1 未満」を満たすような r, t の条件を求めたい．Mathematica でシミュレーションしてみると、 $2r \leq t$ である「ように見える．」このことの人力による証明はできていない．

Mathematica による量子消去によって、次の命題は検証された．(この検証結果を信じてよいか、筆者は判断根拠をもたない．)

命題 4 Mathematica の量子消去による検証結果を真とすれば、 x に関する方程式 $f_3(x; r, t) = 0$ が絶対値が 1 の複素数解を持つための r, t に関する条件は $2r = t$ である．

実際に以下のコードによる．

```
Resolve[Exists[
  x, {1 - 3 r + 3 r^2 - r^3 - 3 t + 6 r t - 3 r^2 t + 3 t^2 -
    3 r t^2 - t^3 - 3 x + 6 r x - 3 r^2 x + 6 t x - 9 r t x +
    3 r^2 t x - 3 t^2 x + 3 r t^2 x + (t^3 x)/8 + 3 x^2 - 3 r x^2 +
    8 r^3 x^2 - 3 t x^2 + 3 r t x^2 - x^3 == 0, Abs[x] == 1,
    Im[r] == 0, 0 < Re[r], Re[r] < 1, Im[t] == 0, 0 < Re[t],
    Re[t] < 1}], Complexes]
```

出力は以下のとおりである

$$0 < t < 1 \ \&\& \ r == t/2$$

計算により、 $r = t/2$ のときには、固有値 1 を持つことがわかっているので、1 以外の「絶対値 1 の固有値」が存在しないことも検証されたことになる．

4.2.2 r, t が 0 に近いときの挙動

$r \ll 1, t \ll 1$ を仮定するとき、遷移行列 $M_{145}^{\{1,2,3\}} M_{256}^{\{1,2,3\}} M_{364}^{\{1,2,3\}}$ の 1 次近似 $P_3^{(1)}$ を計算してみると、ターゲットとなる行列は

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-r-t & 2r & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 1-r-t & 2r \\ 2r & \frac{t}{2} & 1-r-t \end{pmatrix}$$

となる．この行列の行列式について、以下が計算できる．

命題 5 (1) $P_3^{(1)}$ の固有値は

$$1 + r - \frac{t}{2}, \quad 1 - 2r - \frac{5}{4}t \pm \frac{\sqrt{3}}{4}(4r - t)i$$

である．

(2) $0 < r \ll 1, 0 < t \ll 1$ の条件下では、すべての固有値の絶対値が 1 未満であることは $2r < t$ と同値である．

$P_3^{(1)}$ の特性多項式は

$$\frac{1}{8}(2 + 2r - t - 2x)((4 - 16r + 28r^2 - 10t + 14rt + 7t^2) + (-8 + 16r + 10t)x + 4x^2)$$

であり、これを解くことにより (1) を得る． $1 + r - \frac{t}{2}$ の絶対値が 1 未満である r, t の範囲は $2r < t$ であり、 $1 - 2r - \frac{5}{4}t \pm \sqrt{3}(4r - t)i$ の絶対値が 1 未満である r, t の範囲は $(1 - 2r - \frac{5t}{4})^2 + \frac{3}{16}(4r - t)^2 < 1$ (場所が確定している楕円の内部) である．これらの計算により (2) が従う．

この命題より、 $r \ll 1, t \ll 1$ の条件下では $2r < t$ で (初期状態に関わらず) 図は収束することが保証された．それと同時に、 $r \ll 1, t \ll 1$ であっても図が収束しないようなパラメータ (r, t) の存在も証明できた．

Mathematica の量子消去による検証結果と合わせて考察をしよう． x に関する方程式 $f_3(x; r, t) = 0$ の解は r, t について連続であり、絶対値が 1 の複素数になる必要十分条件は $2r = t$ であることから、 (r, t) が $(0, 0)$ の近傍にあるときの考察を合わせて、以下の結論を得る．

命題 6 Mathematica の量子消去による検証結果を真とすれば、 x に関する方程式 $f_3(x; r, t) = 0$ の解がすべて絶対値が 1 未満であるための r, t に関する必要十分条件は $2r < t$ である．

5 今後の研究の方向性

残っているいくつかの問題について提示する.

みつどもえ作図に現れる行列 P_3 の固有値の絶対値の評価を完成させたい. また, パラメータ r, t の値を少し広げても同じような結論が得られるかを調べたい.

「中点モジュール」を「比 $m:n$ の内分点モジュール」の場合に拡張したとき, r, t についての条件は変わることが強く想定される. このときは, **仮定**のなかにある $r = s$ という条件を置く必要はなくなる. ふたつどもえ作図で, $(m+n)r/n < t$ かつ $(m+n)r/m < t$ のような収束条件が発生することを予想しているが, 証明できるだろうか.

今回の結論は「正しい図に近づくように少しずつ動かすようなマルコフ過程を組み合わせても, 不安定になることはありうる」だが, ふたつどもえ, みつどもえ特有の話とも思えないので, もう少し一般論が構築できないだろうか.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP23K11375 の助成を受けている.

参考文献

- [1] 阿原一志「マルコフ過程を用いた幾何作図ソフトウェアによる探究型数学教材の可能性について」, 教育工学会 (2024)
- [2] 阿原一志, PointLine, <https://aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/>, pp.37–46, 2021
- [3] 阿原一志「マルコフ過程を用いた動的幾何ソフトウェアについて (1)」京都大学数理解析研究所講究録 2273, pp.153–158, 京都
- [4] 阿原一志, PointLine の Unity によるソースコード, <https://github.com/PointLineAharaLab/PointLine>
- [5] 阿原一志, PointLine のによるソースコード, <https://github.com/aharalabMeiji/PyPointLine>