

初等幾何における動的幾何ソフトウェアによる新しいアプローチの導入 —図形の退化と複数のアプローチに着目して—

東京理科大学・理学部 清水 克彦
Katsuhiko Shimizu,
College of Science,
Tokyo University of Science

1 はじめに

数学教育におけるコンピュータの利用は 50 年ほど前から始まり、数学教育の内容と方法に大きな変革をもたらしている。その代表的なものが「実験数学 (Experimental Mathematics)」である。実験数学は、[1] によって初めて大きく提唱された言葉で、方法と内容の両方を指すものである。Maple, Mathematica, Magma, Neil Sloane's online integer sequence recognition tool, the inverse symbolic calculator などの台頭により、数学者の研究のツールとして広まったことによって、数学者の研究のスタイルと研究成果の提示の仕方に影響を与えるようになったことに実験数学は背景を持っている。[3], p.1 は、

A mathematical experiment has always been a key source for a mathematical discovery. Over the past 50 years, thanks to digital technologies, its role in mathematical research has grown significantly. Digital technologies have opened up fundamentally new opportunities for experimentation in mathematics education, bringing mathematical education closer to mathematical research for the majority of students. (p.S92)

とデジタル・テクノロジーがによって数学における実験が、数学研究における役割の重要性を増し、数学教育においても実験に対する機会をもたらしていること、数学研究に近い数学教育を多くの生徒にもたらしていることを、指摘している。また、

Attempts to prove something should logically follow from an experimental material and should be motivated and constantly correlated with it. Proofs constructed individually by every student at their level are also created with visual computer support: proofs are illustrated by drawings, certain calculations are carried out on a computer, etc. (p.S592)

と「何かを証明することは実験から論理的に生じるものであり、実験結果に動機づけられ、関連しているべきである。」と指摘し、「学校数学における個々の生徒のレベルに沿って証明は構成される、コンピュータによる視覚的な補助もとづいて創造されること：証明はコンピュータなどで実行された図や計算によって説明される。[3], p.1」と指摘して

いる。実験数学と証明の関係は、その先駆者 Bailey ら [2] は、「実験数学的な活動は形式的な証明へのアプローチを示唆する (Suggesting approaches to formal proof). 」と指摘したことを端緒に、数学教育においても実験数学活動から生徒が証明を手掛かりをえるようなアプローチを取る教材開発が行われるようになった [4]。松本・清水 [4] は次のような実験数学のプロセスを提案している。

1. 実験によるデータの収集 (データの整理や数学的知識にもとづいて考察する)
2. 推測の生成 (数学の言葉で表現する)
3. 推測の検証実験 (より多くのデータで成り立つかを確認する)
4. 推測の改訂 (反例が得られたら、それに着目して)
5. 証明へのアプローチ (証明へどのようにアプローチするか検討する)
6. さらなる問題へ (一般化、特殊化や類比を用いてどのようになるか推測を立て検証をする)

このようなプロセスは小池 [5] においても提案されており、数学教育のアプローチとして注目されつつある。

このような実験数学から証明への展開は、[3] によれば、特に幾何教育においては、次のような考えにその導入が阻まれているという。

Traditional objection to geometric courses based entirely on computer experiments reads as a picture cannot replace logical reasoning. This objection was discussed above in the general form. In fact, this implies that memorizing someone else's proof (with a doubtful understanding) is fundamentally more important than student's own hypothesis about the truth of a geometric statement.(p.S95)

すなわち、コンピュータ実験の導入は幾何科目では伝統的な反論があり、絵は論理的推論にとって代わることはできないこと、先人の証明を覚えることが生徒自身が幾何の命題の真理性に関する仮説を立てることより、基本的に重要であるという考えにそれは支えられているという。しかし、[3] や [4] の立場が示すように、

We believe, as a number of other well-known mathematicians, that independent analysis of mathematical reality (good, if visually represented) is a necessary element of work of a mathematician and a student learning mathematics.(p.S95)

数学の真実性についての個々の分析は、視覚的に「正しく」示されるならば、数学者の研究ならびの生徒の数学学習にとって、不可欠な要素であるという主張に即している。幾何分野における動的幾何ソフトウェア (Dynamic Geometry Software:DGS) の実験数学アプローチには、確かに「形式的証明へのアプローチを示唆する」という特徴と意義は存在する。しかし、上記のような反論も存在する。そこで、本稿では「形式的証明へのアプローチを示唆する」だけではなく、DGS の実験数学への活用には新しいアプローチの可能性があることを示す。

2 実験数学における DGS の活用によってもたらされる新しいアプローチ

2.1 動的幾何によって図形の退化 (degneration) に触れる活動

以下に示す図は、中学校数学科の図形分野で扱われる中点連結定理の応用として広く用いられている Varignon の定理を示したものである。通常は、この場合について四角

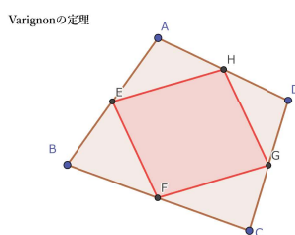


図 1: Varignon Theorem

形 EFGH が平行四辺形であることの証明を行う。DGS で、自由に ABCD を変形すると、次のような場合でも成り立っていることが観察できる。さらに四角形 ABCD を下

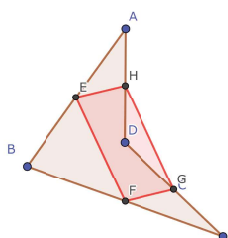


図 2: 凹四角形の場合

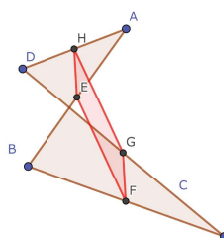


図 3: 交差四辺形の場合

図のように変形すると、B, D, C が線分 B(D)C に退化した場合においても成り立っていることが確認できる。教員研修に参加し、DGS を使う経験をされた教員の方が非常に楽しそうに報告されていた。DGS のもとで、実験数学活動を行い、このように退化 (Denegeration) した例を体験・観察することで、Varignon の定理が生徒が通常イメージできる凸四角形の図以外の場合に成り立つ「広い」定理であることが意識できるようになる。このような経験から四角形 ABCD が 1 点を共有する 2 線分 AB(D), B(D)C に変形したときに現れる線分 EF(GH) が平行四辺形が退化したものとみることができるようになることも可能であり、動的な図形の捉え方がさらに広がる可能性ももたらしている。

次に Napoleon 定理における退化例を示す。Napoleon 定理は任意の三角形の辺上に正三角形をたて、その中心を結んでできる三角形が正三角形になるという定理である。

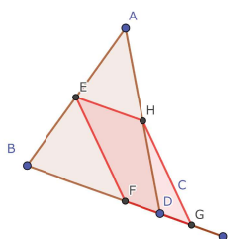


図 4: 四角形が退化した例 1

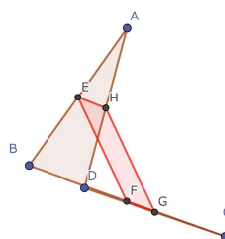


図 5: 四角形が退化した例 2

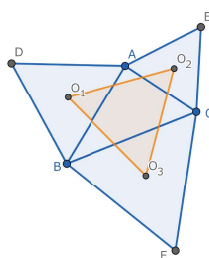


図 6: Napoleon Theorem

この図の場合には，DGS における実験数学活動を行い，下図のような三角形 ABC が退化して線分 A(B)C になる退化を観察することができる．このように線分に退化した場合においても正三角形になっており，Napoleon 定理が成り立つことが視覚的に確認できる．Napoleon 定理の良く知られている初等幾何的な証明がこの退化例では適用しに

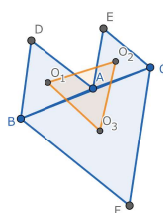


図 7: Napoleon Theorem において三角形 ABC が線分に退化した場合

くく，場合分けをして証明することが求められる．

次に，Napoleon 定理からの四角形での類比に相当する Van Aubel の定理の退化例を示す．Van Aubel の定理は任意の四角形の辺上に正方形をたて，その中心を結んでできる四角形が等長直交四角形 (iso-ortho-quadrilateral：対角線が長さが等しく直交する四角形) になるという定理である．この定理においては，様々な特殊例が存在することが知られており，その中には四角形の退化による特殊例も含まれている [6]．以下，[6] に挙げられている「エレガントな特殊例」を示す．Varignon の定理と同様に凹四角形、交差四辺形の場合にも成り立つことが観察できる．

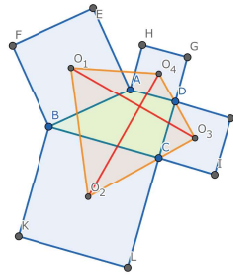


図 8: Van Aubel の定理の一般的位置

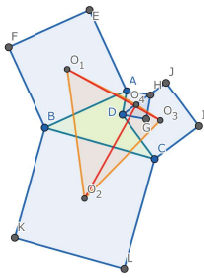


図 9: 凹四角形の場合

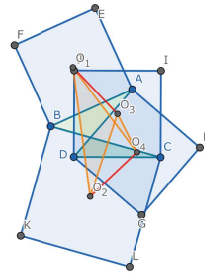


図 10: 交差四辺形 (crossed quadrilateral) の場合

次に線分に退化した例が挙げられている．左図は同じ側の 2 点 B, C が線分 B, C の上に

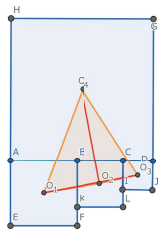


図 11: 線分 A(BC)D に退化した場合

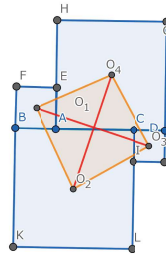


図 12: 線分 B(AC)D に退化した場合

のった場合，右図は異なる側の 2 点 A, C が線分 BD の上にのった場合である．このような退化の特殊例でも成り立つことが観察できる．左図は 2 点 A, D が線分 CB の上にのった場合で $O_1O_2O_3O_4$ は凹四角形になる．対角線は直接交わらないが直交し，等長であることが観察できる．右図は 2 点 A, D が $A = D = O_4$ になるように線分 CB の上にのった場合で，線分に退化するだけでなく 2 点が 1 点に退化する (線分が点に退化した) 場合で， $O_1O_2O_3O_4$ は凹四角形になる．対角線は直接交わらないが直交し，等長である．DGS のもと，このような場合においても Van Aubel の定理が成り立つことが確認できる．

四角形 ABCD が三角形に退化した特殊例も Van Aubel の定理では DGS で観察できる．四角形 ABCD が $C = D = O_3$ となることで三角形 ABCC に退化した場合で，DGS の

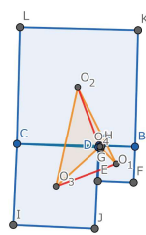
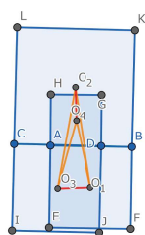


図 13: 線分 $C(AD)B$ に退化した場合 図 14: 線分 $C(A=D)B$ に退化した場合

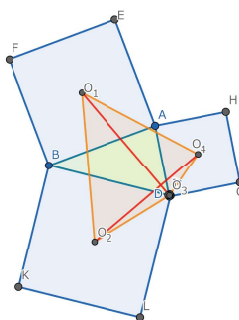


図 15: 四角形 $ABCD$ が三角形に退化した場合

もとこのような場合においても Van Aubel の定理が成り立つことが観察できる．また，Varignon の定理の退化例で教員研修で教員の方が楽しまれた退化も観察できる．左図は

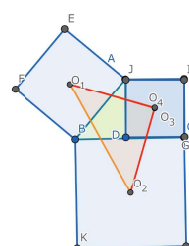
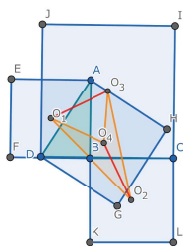


図 16: 線分 DC 上に B が乗ったに退化した場合 1 図 17: 線分 DC 上に B が乗ったに退化した場合 1

ABD が直角三角形になるように BC 上に点 B をのった場合で，やはり Van Aubel の定理がなりたっていることが観察できる．右図は ABD が直角三角形を保ったまま，上手く $A = J$ となるように DGS で図を変形すると $O_3 = O_4$ が直角三角形となり，Van Aubel の定理より $O_1O_4 = O_4O_2$ が成り立つことから，直角三角形 $O_1O_4O_2$ が直角二等辺三角形になるような場合も観察できる． $ABCD$ が凹四角形の場合にもこのような $O_1O_2O_3O_4$ が三角形 $O_1O_4O_2$ が直角三角形になるような変形ができる．

また，各辺の内側に正方形をたてた内 Van Aubel 配置においては， $O_1 = O_3, O_2 = O_4$

となり，等長直交四角形 $O_1O_2O_3O_4$ が線分に退化するような場合も DGS で観察することができる．

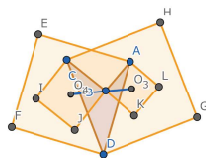


図 18: $O_1O_2O_3O_4$ が線分に退化した場合

2.2 新しい証明方法への取り組みを考えさせる機会を与える

Van Aubel 定理の初等幾何的な証明は，Finsler-Hadwiger 定理を補助定理とするもので，図 8 の作図の場合をもとにするものがある [7]．しかし，これまで見てきたように，Napoleon 定理，とりわけ Van Aubel の定理には生徒が推測 (Conjecture) を立てても，初等幾何的な証明を試みようとする様々な特殊例を考慮し，場合分け証明を試みなければならない．すべての特殊例を含んだ「広い」証明が可能なのかということに，生徒は疑問を持つと考えられる．このとき，DGS でのこのような観察が別の証明アプローチに取り組む機会を与えている．DGS は実験数学的な活動から形式的証明への示唆を与えることが期待されているが，このように別の証明アプローチへと目を向ける機会を与える可能性がある．

例えば，今回の Napoleon の定理の推測や Van Aubel の定理の推測を行うことは，生徒にとって視覚的に取り組みやすい課題であると思われる．しかし，退化を含む様々な特殊例を観察したことを含んだ初等幾何的な証明を行うことは難しいのではないだろうか．そのとき，複素数を用いた証明は，高等学校で複素数平面を学習した後では，有用なアプローチになる．まず，Napoleon の定理について，複素数による証明のアプローチを示す．

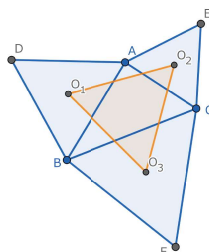


図 19: Napoleon の定理の図; 再掲

Proof of Napoleon's Theorem by complex numbers. $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$, もとの三角形を ABC とし, 辺上にたてられた正三角形を ABD, ACE, BCF とする. ω を 120° 回転を表す複素数とすると, ABD, ACE, BCF が正三角形であることは,

$$A + \omega B + \omega^2 D = 0 \quad (1)$$

$$C + \omega A + \omega^2 E = 0 \quad (2)$$

$$B + \omega C + \omega^2 F = 0 \quad (3)$$

$\triangle ABD$ の中心は $O_1 = \frac{A+B+D}{3}$ で与えられる. 同様に $\triangle ACE$ と $\triangle BCF$ の中心は, $O_2 = \frac{C+A+E}{3}, O_3 = \frac{B+C+F}{3}$ で与えられる. ナポレオン三角形が正三角形になることを示すには, $O_1 + \omega O_2 + \omega^2 O_3 = 0$ を示せばよい. 実際

$$\begin{aligned} 3(O_1 + \omega O_2 + \omega^2 O_3) &= A + B + D + \omega(C + A + E) + \omega^2(B + C + F) \\ &= (B + \omega C + \omega^2 F) + \omega(A + \omega B + \omega^2 D) + \omega^2(C + \omega A + \omega^2 E) \\ &= 0 \quad (1), (2), (3) \text{ より} \end{aligned}$$

□

三角形 ABC の各辺上に立てられた ABD, ACE, BCF が正三角形であることを表す最初の 3 つの式は, 三角形 ABC がどのような形に変化しても成り立っていることから, 複素数を用いた証明アプローチで, 退化した場合も含んだ証明になっていることが理解できるのではないだろうか.

次に Van Aubel の定理について, 複素数による証明のアプローチを示す.

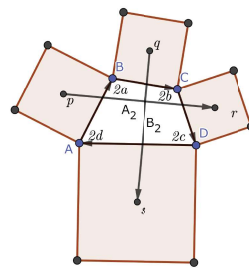


図 20: Van Aubel の定理の図: 証明用

Proof of Van Aubel's Theorem by complex numbers. 四角形 $ABCD$ において, 頂点 A を原点 O とする. 次に, ベクトル AB を複素数 $2a$ と表す. 同様に BC を $2b$, CD を $2c$, DA を $2d$ とする. 各複素数の係数 2 は計算の都合上そう表している. ベクトル AP を複素数 p で表し, 同様に AQ を q , AR を r , AS を s と表す. 四角形 $ABCD$ は閉じているので, $2a + 2b + 2c + 2d = 0$ となる. よって

$$a + b + c + d = 0$$

となる．これを用いて証明を行う．

点 P は AB 上の中点で， 90° 回転し，同じ距離を進めば良い．よって

$$p = a + ia = (1 + i)a$$

と表せる．また，極形式 (r, θ) で表すと．

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

と表せ， a に i をかけることは，その数に半径 $r = 1$ ，角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の複素数をかけることであると解釈できる．つまり，拡大縮小を含まない純粋な回転変換である．

同様に q, r, s も以下のように表せる．

$$q = 2a + (1 + i)b$$

$$r = 2a + 2b + (1 + i)c$$

$$s = 2a + 2b + 2c + (1 + i)d$$

点 Q から点 S へのベクトルを A で，点 P から点 R へのベクトルを B で表すと， $A = s - q$ ならびに $B = r - p$ であるから，次のように表せる．

$$A = s - q = (b + 2c + d) + i(d - b),$$

$$B = r - p = (a + 2b + c) + i(c - a).$$

QS と PR が等しい長さを持ち，直交することを証明しなければならないので，複素数 A, B は以下の関係を満たさなくてはならない．

$$B = iA$$

上の式の両辺に i を乗じると次のようになる．

$$A + iB = 0$$

この等式が成り立つことを示せば十分であるので，実際に計算すると，

$$\begin{aligned} A + iB &= (b + 2c + d - c + a) + i(d - b + a + 2b + c) \\ &= (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0 \end{aligned}$$

と望まれる命題が証明される [8].

□

$a + b + c + d = 0$ の関係は，四角形が凸，凹，交差，線分に退化したとき，三角形に退化したとき，1 点を共有した 2 線分になったときなど，どのようなときでも四角形 $ABCD$ は閉じていることから成り立っている．よって，Van Aubel の定理の非常に一般的証明になっていることが分かる．複素数による証明のアプローチは，このように特殊な図になった場合でも統一的に証明しているため，有用なアプローチであることが高校生にも理解できるのではないだろうか．

平面幾何における DGS による実験数学的な活動は、先に挙げたように退化などの様々な特殊例を観察することを可能にする。退化した場合などに生徒が図形の性質についての推測を広げられることは、生徒の図形の見方を広げるうえで、大きな機会を与えていると言えよう。その一方で、初等幾何的証明つまりユークリッド幾何的な証明には描かれた図に向けた論理的推論を進めることが中核となるため、このような様々な特殊例をカバーできる証明として用いるには困難さが伴う。しかし、ここに挙げた複素数による証明アプローチは、作図配置を表した複素数表現が、様々な具体例をカバーすることができるため、DGS による実験数学的活動はこのアプローチを有力なアプローチとして利用することの機会を与えたいと考えられる。

さらに Geogebra の DGS には「角度を指定して点の回りにオブジェクトを回転」というツールが用意されており、オブジェクトも点だけではなく線分、多角形などを対象にできる。そのため、Geogebra では鏡映変換、回転変換、平行移動などが行え、それらにもとづいた証明アプローチをとることができる。幾何的証明に変換幾何学を取り入れた数学教育を提唱する数学者・数学教育者が存在している。

ここでは Napoleon 定理の回転変換による証明を Geogebra で行った例を紹介する。

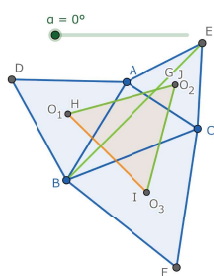


図 21: 回転前の図

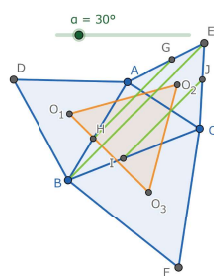


図 22: 30 度回転後の図

Proof. O_1O_2 を A を中心に反時計回り 30° 回転し, O_3O_2 を C を中心に時計回りに 30° 回転すると, AB 上の H , AE 上の G をとる HG に O_1O_2 は写る. これは $\angle O_1AB = \angle O_2AE = 30^\circ$ であることによる. 同様に, O_3O_3 は BC 上の I , CE 上の J をとる IJ にうつる.

正三角形においては, 頂点から中心への距離は辺の $\frac{\sqrt{3}}{3}$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{AH}{AB} &= \frac{AO_1}{AB} = k \\ \frac{AG}{AE} &= \frac{AO_2}{AC} = k \\ \frac{CI}{CB} &= \frac{CO_3}{BC} = k \\ \frac{CJ}{CE} &= \frac{AO_2}{AC} = k\end{aligned}$$

よって, $\triangle ABE$ と $\triangle AHG$, $\triangle CBE$ と $\triangle CIJ$ が相似であり, $IJ \parallel BE \parallel HG$ であり,

$$GH = kBE = IJ$$

よって, $O_1O_2 = O_2O_3$ である. 同様に, $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$ である. □

Geogebra では、スライダーを動かすことによって、線分 O_1O_2 と O_2O_3 が反時計回りと時計回りに回転し、 HG と IJ へと移動していく様子を観察できる。この変換によって中点連結定理の発展の定理を適用して、証明することが可能になる。このように Geogebra の DGS で回転、鏡映、平行移動を利用して、変換幾何的な証明のアプローチを導入することができる。

3 今後の研究の方向性

現在、DGS によって導入できる本稿で述べたような新しいアプローチを取り入れた Web 教材を、Geogebra Classroom を用いて開発中である。Polygon Offsetting（任意の多角形の辺上に正多角形や相似図形などを立てる作図配置）を用いた実験数学指向の探究 Web 教材として、公開を予定している。下図の探究活動のサイクル（[10],p.24）を取り入れ、文科省が示すような探究活動を導入した探究における数学的探究の教材として提供・実践を計画している。

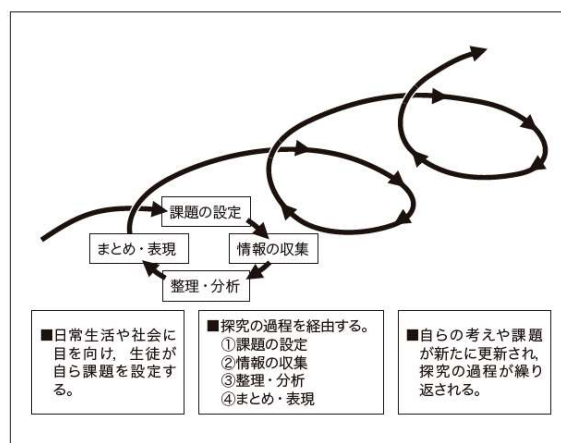


図 23: 探究における望ましい生徒の活動：文科省

謝辞

本研究は JSPS 科研費 24K06242 の助成を受けている。

Tokyo University of Science
College of Science
Kaugurazaka 1-3 Shinjyuku ward Tokyo 162-8601
JAPAN
E-mail address: kshimizu3141@rs.tus.ac.jp

参考文献

- [1] David H. Bailey and Jonathan M. Borwein(2005)Experimental Mathematics Examples, Methods and Implications,2005,Notice of THE AMS,Vol. 52, No. 5,pp.502-514
- [2] Jonathan M.Borwein,David H. Bailey(2004),Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. A.K. Peters. pp.vii..
- [3] G. B. Shabata et.al : Computer Experiment in Teaching Mathematics, Doklady Mathematics, 2023, Vol. 107, Suppl. 1, pp. S92–S116
- [4] 松本昌也, 清水克彦 (2023) Geogebra Classroom を用いた実験数学教材の検討-ヴァンオーベルを題材にした探究活動を通して -, 京都大学数理解析研究所講究録, 「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」 2273,pp.11-22
- [5] 小池正夫 (2011), 実験・発見・数学体験 (数学書房選書 3), 数学書房
- [6] V.Oxman,M.Stupel(2015), Elegant Special Cases of Van Aubel’s Theorem, The Mathematical Gazette, Vol. 99, No. 545, pp.256-262
- [7] C.Alsina,Roger B.Nelsen (2010),The FinslerHadwiger Theorem 8.5, Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics, Mathematical Association of America,p.125
- [8] Y.Nishiyama(2011),The beautiful geometric theorem of Van Aubel.,International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 66 No.1,pp.71-80
- [9] K.A.Camenga (NCTM’s 2011 Annual Meeting & Exposition),Transforming Geometric Proof with Reflections, Rotations and Translations.
- [10] 文部科学省 (2023), 「今求められる力を高める総合的な探究の時間の展開」, アイフォス