On the graded quotients of the algebra of $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$-characters of F_2

東京理科大学理学研究科　加藤　瑶
Yoh Katoh
Graduate School of Science,
Tokyo University of Science

1　概要

本稿は佐藤隆夫氏（東京理科大学）との共同研究に基づく．

1890 年代に Fricke と Klein によって定義された Fricke 指標は，その後，特に代数的な側面から Horowitz や Magnus を筆頭とする研究者たちによって研究されてきた．詳しくは Magnus の Survey[14] を参照されたい．

Fricke 指標のなす環には自然に自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ が作用する．この作用について，佐藤-畠中は Johnson 準同型のアナロジーによる研究を行い，ある種の極大イデアルの冪からなる降下列を考えることで，Andreadakis-Johnson フィルトレーションの類似物を得た [7]．また，佐藤は Johnson-森田理論の手法を Fricke 指標のなす環に対して適用することで，あるねじれ係数における $\mathrm{Aut}(F_n)$ の非自明な crossed homomorphism を得た [15]．また，筆者は Brumfiel と Hilden[3] によって定義された代数を用いて，上述の極大イデアルの次数商の $\mathrm{Aut}(F_n)$ 加群としての構造を記述した [8]．これらの一連の研究は既存の研究とは異なり，アーベル化の誘導する自己同型群の間の準同型，すなわち

$$\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(F_n^{\mathrm{ab}}) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$$

を経由しない表現が主に現れるため，強力な道具である GL 表現論が使えず未解明な点が多い．

現代的には，Fricke 指標のなす環は自由群の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 指標多様体の座標環として扱われることも多い．そのある種の一般化として自由群の $\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$ 指標多様体の座標環への $\mathrm{Aut}(F_n)$ 作用が考えられる．しかしながら，$\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$ 指標多様体，ならびにその座標環については，その構造は複雑かつ未解明な点も多く残っており，単純に Fricke 指標についての議論を拡張して扱うことは難しい．本研究では，$m \geq 3$ の場合におけるもっとも簡単な例である，自由群のランクが 2 の場合について考える．また，$m = 2, 3$ の場合に Outer space と呼ばれる空間を用いて，ねじれ係数の $\mathrm{Out}(F_2)$ のコホモロジー群の計算を行って得られた結果をいくつか紹介する．さらに，F_2 の場合に，$m = 3$ の時の極大イデアルの 1 次の次数商の $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群としての直和分解を与える．

2　自由群 F_n の $\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$ 指標のなす代数

F_n を $x_1, \cdots, x_n$ で自由的に生成される自由群とする．$\mathrm{Hom}(F_n, \mathrm{SL}(m,\mathbb{C}))$ で自由群 F_n の $\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$ 表現全体を表す．$\mathfrak{F}_n^m = \{f \mid f : \mathrm{Hom}(F_n, \mathrm{SL}(m,\mathbb{C})) \to \mathbb{C}\}$ とし，各点ごとに和

と積，スカラー倍を定義することにより，可換 $\mathbb{Q}$ 代数とみなす．以下のように関数を定義する．各 $x \in F_n$ に対して

$$\mathrm{tr}(x)(\rho) := \text{the trace of } \rho(x),\ \rho \in \mathrm{Hom}(F_n, \mathrm{SL}(m, \mathbb{C}))$$

として定める．これを $x \in F_n$ の $\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$ 指標という．$\mathrm{tr}(x) \in \mathfrak{F}_n^m$ であり，このような形の元全体が生成する $\mathfrak{F}_n^m$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数を $\mathfrak{X}_n^m$ で表すことにする．自由群 F_n の自己同型群を $\mathrm{Aut}(F_n)$ で表す．各 $\mathrm{tr}(x) \in \mathfrak{X}_n^m$ に対して，$\sigma \in \mathrm{Aut}(F_n)$ による (右) 作用を $\mathrm{tr}(x)^\sigma := \mathrm{tr}(x^\sigma)$ により定める．各 n, m に対して，

$$J_n^m := (\mathrm{tr}(x) - m \mid x \in F_n)$$

なる極大イデアルを定義する．これは $\mathrm{Aut}(F_n)$ による作用で閉じている（すなわち，$\mathrm{Aut}(F_n)$-invariant である）．これにより，$\mathrm{Aut}(F_n)$-invariant な加群の降下列

$$J_n^m \supset (J_n^m)^2 \supset \cdots \supset (J_n^m)^k \supset \cdots$$

を得る．各 $l \geq 1$ に対して，次数商を $\mathrm{gr}^l(J_n^m) = (J_n^m)^l/(J_n^m)^{l+1}$ で定義する．$\mathrm{Aut}(F_n)$ による作用が導く準同型 $\rho_k : \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(J_n^m/(J_n^m)^{k+1}$ の核を $\varepsilon_n^m(k)$ で表すことにすると，降下列

$$\varepsilon_n^m(1) \supset \varepsilon_n^m(2) \supset \cdots \supset \varepsilon_n^m(k) \supset \cdots$$

は N-series になる．

2.1　$\mathfrak{X}_n^2$ について

ここでは，$\mathfrak{X}_n^2$ について概観し，既知の事実をいくつか述べる．$\mathbb{Q}(F_n)$ で $\mathbb{Q}$ 上 F_n の群環をあらわす．また，$s : \mathbb{Q}(F_n) \to \mathbb{Q}(F_n)$ で $F_n \ni x \mapsto x^{-1} \in F_n$ を線型に拡張して得られる反準同型を意味することにする．Brumfiel と Hilden は以下のような代数を [3] で定義した．

Definition 2.1.

$$H(F_n) := \mathbb{Q}(F_n)/(x(y + s(y)) - (y + s(y))x) \mid x, y \in F_n)$$

　この代数で以下のような作用素を定義する．記号の濫用だが，s が $H(F_n)$ 上に誘導する線形写像も s で表すことにする．

$$\begin{aligned} + : H(F_n) \to H(F_n) \quad x^+ &= \frac{1}{2}(x + s(x)), \\ - : H(F_n) \to H(F_n) \quad x^- &= \frac{1}{2}(x - s(x)) \end{aligned}$$

今，$+$ 作用素による像を $H^+(F_n)$ で表すことにする．このとき，Brumfiel と Hilden により，$H^+(F_n) \cong \mathfrak{X}_n^2$ であることが示された．以下では，この同型を通して二つの代数を同一視する．ここで，

$$\boxed{\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}} := (x_i^- x_j^-)^+$$

という記号を導入する．我々は以前に以下を示した．

Theorem 2.2. 集合 $\{\boxed{\substack{p_1\\q_1}}\cdots\boxed{\substack{p_l\\q_l}} \mid 1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \cdots \leq p_l \leq q_l \leq n\}$ は $\mathrm{gr}^l(J_2^2)$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底を任意の $l \geq 1$ に対して与える．特に，対応

$$\boxed{\substack{p_1\\q_1}}\cdots\boxed{\substack{p_l\\q_l}} \mapsto (x_{p_1}x_{q_1})\cdot\cdots\cdot(x_{p_l}x_{q_l})$$

は $\mathrm{gr}^l(J_2^2)$ と $S^l(S^2(H_2))$ $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群としての同型を与える．ここで，H_2 は $\mathbb{Q}$ 係数の F_2 の一次元ホモロジー群であり，$S^l(V)$ でベクトル空間 V 上の l 次の対称テンソルを意味する．

一般の $n \geq 3$ に対して，以下のような定理を佐藤は [15] で示した．

Theorem 2.3 (佐藤)**.** $\mathrm{H}^1(\mathrm{Aut}(F_n), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_2^n), \mathrm{gr}^2(J_2^n))) \neq 0$.

上記定理は非自明なコサイクルを具体的に構成することで示されたものである．しかしながら $n = 2$ の場合にはこの構成されたコサイクルは自明なものとなってしまうことに注意する．

2.2 $\mathfrak{X}_n^3$ について

一般に，$m \geq 3$ に関して，$\mathfrak{X}_n^m$ の構造は不明な点が多く，$m = 2$ の時のようなよい代数的デバイスが存在するかどうかは分かっていない．そのため，$\mathrm{Aut}(F_n)$ 作用についてもほとんどわかっていない．任意の $m' > m \geq 2$ に対して，包含写像

$$\iota : \mathrm{SL}(m, \mathbb{C}) \ni g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_{m'-m} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(m', \mathbb{C})$$

を考える．ここで，I_k はサイズ k の単位行列である．すると，この包含写像は，$\mathbb{Q}$ 代数射 $\widetilde{\iota} : \mathfrak{X}_n^{m'} \to \mathfrak{X}_n^m$ を誘導する．特に $\widetilde{\iota}_l : \mathrm{gr}^l(J_{m'}^k) \to \mathrm{gr}^l(J_m^k)$ をも導く．すぐにわかる通り，これは $\mathrm{Aut}(F_n)$ 同変である．Horowitz は $\mathfrak{X}_n^2$ に自明に作用する自己同型たちのなす部分群について調べた [6]．$\widetilde{\iota}$ と Horowitz の結果を利用すると，以下のことがわかる．

Lemma 2.4. $m \geq 3$，$n \geq 2$ に対して，$\mathfrak{X}_n^m$ に自明に作用する自己同型全体からなる部分群はちょうど $\mathrm{Inn}(F_n)$ である．

したがって，$\mathrm{Aut}(F_n)$ による作用は $\mathrm{Out}(F_n)$ による作用とみなすことができる．本研究では，以降 $n = 2$ の場合に焦点を絞って考える．Lawton による一連の研究 [9, 10, 11] により $\mathfrak{X}_2^3$ の構造は比較的よく分かっており，他の場合より扱いやすい．まず，代数としての最小の生成系が以下で与えられる．

$$\{\mathrm{tr}(x_1^{\pm 1}),\ \mathrm{tr}(x_2^{\pm 1}),\ \mathrm{tr}(x_1x_2),\ \mathrm{tr}(x_1x_2^{-1}),\ \mathrm{tr}(x_2x_1^{-1}),\ \mathrm{tr}(x_1^{-1}x_2^{-1}),\ \mathrm{tr}([x_1, x_2])\}.$$

以下，簡単のため，各 $x \in F_n$ に対して，$c(x) := \mathrm{tr}(x) - 3$ と定める．特に $c(x_i^e)$，$c(x_i^e x_j^f)$，$c([x_1, x_2])$ をそれぞれ $[ie]$，$[ie, jf]$，$[1, 2, -1. -2]$ などとあらわすことにする．このとき，以下が成り立つ．

Theorem 2.5. (1) $\mathfrak{S} := \{[\pm 1], [\pm 2], [\pm 1, \pm 2], [\pm 1, \mp 2], [1, 2, -1, -2]\}$ はは $\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底である．

(2)

$$\mathfrak{S}' := \{\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \mathfrak{S} \setminus \{[1, 2, -1, -2]\}\},$$
$$\mathfrak{S}'' := \{\alpha[1, 2, -1, -2] \mid \alpha \in \mathfrak{S} \setminus \{[1, 2, -1, -2]\}\}.$$

とおくとき，$\mathfrak{S}' \cup \mathfrak{S}''$ は $\mathrm{gr}^2(J_3^2)$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底である

3 ねじれ係数コホモロジー群の計算

3.1 Outer space

この節では，Outer space について簡単に説明する．Outer space K_n は Culler と Vogtmann によって導入された，$\mathrm{Out}(F_n)$ に対する幾何学的対応物である．K_n は基本群として F_n を持つマーク付きグラフの poset の幾何学的実現として与えられる．特に K_n は可縮な $\mathrm{Out}(F_n)$-CW 複体であり，その作用は真性不連続，cocompact で cell stabilizer が有限群になっている．詳しくは [4] などを参照されたい．本研究では Brady[1] の方法をもとに Outer space を用いて，$\mathrm{Out}(F_2)$ のコホモロジーを計算する．

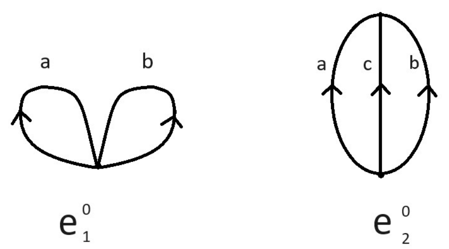
G を群とし，X を G-CW 複体とする．X_p で X の p-cell を表すものとし，$\mathcal{S}_p$ で X_p/G の代表元からなる集合を表す．σ を X の cell とするとき，G_σ でその cell stabilizer を表すものとする．また，G 加群 M に対して，M_σ で orientation character でねじれた作用を持つ G_σ 加群としての M を表すものとする．このとき，同変コホモロジーのスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_p} H^q(G_\sigma, M_\sigma) \implies H_G^{p+q}(X, M)$$

を得る．このスペクトル系列において，$X = K_n$ の場合を考えたい．特に M が $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であることを仮定すると，

$$H^p(\mathrm{Out}(F_n), M) \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_p} M^{\mathrm{Out}(F_n)_\sigma}.$$

を得る．すなわち，この右辺を計算すれば上記のスペクトル系列を計算できることになる．詳しくは，Brown[2] を参照されたい．$K_2/\mathrm{Out}(F_2)$ は 0-cell として $\{e_1^0, e_2^0\}$ を，1-cell として $\{e_1^1\}$ をそれぞれ持つ（以下の図を参照）．なお，e_1^1 は辺 c を縮める操作 $e_2^0 \xrightarrow{c} e_1^0$ によってあらわされる．



その各々に対応する cell stabilizer は以下のような元で生成されることがわかる．

σ	$(\mathrm{Out}\, F_2)_{\tilde{\sigma}}$ の生成元
e_1^0	$g_{1,1} : (x_2, x_1)$, $g_{1,2} : (x_1^{-1}, x_2)$, $g_{1,3} : (x_1, x_2^{-1})$
e_2^0	$g_{2,1} : (x_2, x_1)$, $g_{2,2} : (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$, $g_{2,3} : (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1})$ $g_{2,4} : (x_1^{-1}, x_2^{-1})$

e_1^1	$g_{2,1} : (x_2, x_1)$, $g_{2,4} : (x_1^{-1}, x_2^{-1})$

3.2 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の場合における計算例

例 1

$\mathrm{gr}^1(J_2^2)$ の場合，$\mathrm{gr}^1(J_2^2) \cong S^2(H_2)$ であったから，その基底を

$$\{x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$$

ととることにする．このとき，まず $\mathrm{gr}^1(J_2^2)^{(\mathrm{Out}(F_2))_{\widetilde{e_1^0}}}$ を決定する．すなわち

$$x = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

とおいたとき，$g_{1,1} \cdot x = x$，$g_{1,2} \cdot x = x$，$g_{1,3} \cdot x = x$ を満たす条件を求める．すると，その条件は $a = c,\ b = 0$ であることがわかる．したがって，

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_2^2)^{(\mathrm{Out}(F_2))_{\widetilde{e_1^0}}}) = 1$$

を得る．同様の計算を行うと以下の基底たちの表を得る．

$\mathrm{gr}^1(J_2^2)^{(\mathrm{Out}(F_2))_{\widetilde{e_1^0}}}$	$\mathrm{gr}^1(J_2^2)^{(\mathrm{Out}(F_2))_{\widetilde{e_2^0}}}$	$\mathrm{gr}^1(J_2^2)^{(\mathrm{Out}(F_2))_{\widetilde{e_1^1}}}$
$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2,\ x_1x_2$

さらに，以下のスペクトル系列を得る．

$$E_1^{0,0} = \mathbb{Q}^2,\quad E_1^{1,0} = \mathbb{Q}^2$$

さらに，$d_1^{0,0} : E_1^{0,0} \to E_1^{1,0}$ が同型であることが上の表からわかる．したがって以下を得る．

Proposition 3.1. 任意の $p \geq 0$ に対して

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{gr}^1(J_2^2)) = 0.$$

例 2

$\mathrm{gr}^2(J_2^2) \cong S^2(S^2(H_2))$ であったから，同様に計算すると，以下の表を得る．ただし，記号は Theorem 2.2 に従う．

e_1^0	$\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}^2 + \boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}}^2,\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}},\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}^2$
e_2^0	$\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}^2 - 2\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} + 3\boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}^2 - 2\boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}} + \boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}}^2,\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}} - \boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}^2$
e_1^1	$\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}^2 + \boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}}^2,\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} + \boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}},\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}^2,\ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}\,\boxed{\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}}$

これにより以下のスペクトル系列を得る．

$$E_1^{0,0} = \mathbb{Q}^5,\quad E_1^{1,0} = \mathbb{Q}^4$$

簡単な計算により，$d_1^{0,0}$ は全射であることがわかる．

Proposition 3.2.

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{gr}^2(J_2^2)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0). \end{cases}$$

特に，$\mathrm{H}^0(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{gr}^2(J_2^2))$ は $\mathrm{tr}([x_1, x_2]) - 2$ の類で生成されることも計算すれば確かめられる．

例 3

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_2^2), \mathrm{gr}^2(J_2^2))$ の場合にも計算を行うと，以下のスペクトル系列が得られる．

$$E_1^{0,0} = \mathbb{Q}^9, \quad E_1^{1,0} = \mathbb{Q}^{10}$$

直接 d^1 を計算するのは困難であるので，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_2^2), \mathrm{gr}^2(J_2^2))^{\mathrm{Out}(F_2)} = 0$ を示す．これは直接計算によってわかる．したがって，$d_1^{0,0}$ は単射となる．よって，以下を得る．

Theorem 3.3.

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_2^2), \mathrm{gr}^2(J_2^2))) = \begin{cases} \mathbb{Q} & (p = 1) \\ 0 & (p \neq 0). \end{cases}$$

ここで生じるコサイクルは Theorem 2.3 にある佐藤の構成したものとは異なったものであることに注意しておく．

3.3 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合

この節では，$\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合を述べる．すでに述べたとおり，$\mathfrak{X}_2^n$ に比べて，$\mathfrak{X}_3^n$ は $H^+(F_n)$ のような良い代数的なデバイスが現状存在せず，ある元 $x \in F_n$ が勝手に与えられた際に，$\mathrm{tr}(x)$ を生成元を用いて書き表すことも容易ではない．したがって cell stabilizer による作用を計算するうえでは，以下のような技術的な補題が必要になってくる．

Lemma 3.4.

$$\begin{aligned} c([x_2, x_1]) + c([x_1, x_2]) \equiv &12(c(x_1) + c(x_2) + c(x_1^{-1}) + c(x_2^{-1})) \\ &- 6(c(x_1x_2) + c(x_1x_2^{-1}) + c(x_1^{-1}x_2) + c(x_1^{-1}x_2^{-1})) \bmod (J_3^2)^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.5. $\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ において，

$$\begin{aligned} c(x_i x_j^{-2}) &= -3[i] - 3[j] + 3[-j] + [1, 2] + 3[i, -j], \\ c(x_i^{-1} x_j^2) &= -3[-i] - 3[-j] + 3[j] + 3[-i, j] + [-1, -2] \end{aligned}$$

が各 $i, j \in \{1, 2\}$，$i \neq j$ に対して成り立つ．

これらを用いることで $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の場合と同様に計算することができる．これにより以下の表を得る．

e_1^0	$[1] + [2] + [-1] + [-2]$, $[1, 2] + [1, -2] + [-1, 2] + [-1, -2]$
e_2^0	$[1] + [2] + [-1] + [-2] - [1, 2] - [-1, -2]$, $[1, 2] + [1, -2] + [-1, 2] + [-1, -2]$
e_1^1	$[1] + [2] + [-1] + [-2]$, $[1, 2] + [-1, -2]$, $[1, -2] + [-1, 2]$

そしてスペクトル系列

$$E_1^{0,0} = \mathbb{Q}^4, \quad E_1^{1,0} = \mathbb{Q}^3.$$

を得て，結果として以下を得る．

Proposition 3.6. $\mathrm{H}^p(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{gr}^1(J_3^2)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & (p=0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$

$\mathrm{H}^0(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{gr}^1(J_3^2))$ の生成元については後述する．次に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_3^2), \mathrm{gr}^2(J_3^2))$ の場合を述べる．こちらはかなりベクトル空間としての次元が大きいため，計算ソフト *Mathematica* を用いた．それにより，以下の結果を得る．

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{gr}^1(J_3^2)^* \otimes \mathrm{gr}^2(J_3^2))^{\mathrm{Out}(F_2)e_1^0} &\cong \mathbb{Q}^{29} \\
(\mathrm{gr}^1(J_3^2)^* \otimes \mathrm{gr}^2(J_3^2))^{\mathrm{Out}(F_2)e_2^0} &\cong \mathbb{Q}^{14} \\
(\mathrm{gr}^1(J_3^2)^* \otimes \mathrm{gr}^2(J_3^2))^{\mathrm{Out}(F_2)e_1^1} &\cong \mathbb{Q}^{102}.
\end{aligned}
$$

したがって直ちに以下を得る．

Theorem 3.7.

$$\dim[\mathrm{H}^1(\mathrm{Out}(F_2), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^1(J_3^2), \mathrm{gr}^2(J_3^2)))] \geq 59$$

4 $\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ の $\mathrm{Out}(F_2)$ 加群としての構造

$\mathfrak{X}_3^2$ への $\mathrm{Aut}(F_2)$ 作用に関する研究は Lawton[11] によるものがあるが，ほとんどわかっていないに等しい．この節では，$\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ の $\mathrm{Out}(F_2)$ 加群としての構造の決定を行う．$\mathrm{Out}(F_2)$ 表現に関しては通常の GL 表現や対称群の表現などとは異なり，使える道具が少なく扱いが難しい．

まず，$\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ における $\mathrm{Aut}(F_2)$ 部分加群である $\mathrm{Ker}(\widetilde{\iota_1})$ について考察する．簡単な議論から，

$$
\begin{aligned}
&a_1 = [1] - [-1], \quad a_2 = [2] - [-2], \quad b = [1,2] - [-1,-2], \\
&c_1 = [1,-2] + [-1,-2] - 2[-1] - 2[-2], \quad c_2 = [-1,2] + [-1,-2] - 2[-1] - 2[-2], \\
&d = [1,2,-1,-2]
\end{aligned}
$$

として $\mathrm{Ker}(\widetilde{\iota_1})$ の基底をとれることがわかる．このとき，Nielsen の生成系 ([13] を参照) を各基底に対し作用させてみると， a_1, a_2, b, c_1, c_2 で生成される部分空間 W は $\mathrm{Aut}(F_2)$ による作用で閉じていることがわかる．さらに Lemma 3.4 により，以下がわかる．

Proposition 4.1. $\mathrm{Ker}(\widetilde{\iota_1})/W$ は $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群として，$[F_2, F_2]/[[F_2, F_2], F_2] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と同型である．

次に W の $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群としての直和分解を決定する．そのため，まずは $\mathrm{Aut}(F_2)$ の部分群で位数 8 の二面体群 D_4 と同型なものをとり，その既約分解を求める．W の基底を以下のようにとる．

$$
\begin{aligned}
&a_1,\ a_2, \\
&k_1 := \frac{1}{2}(b + c_1 - c_2), \quad k_2 := \frac{1}{2}(b - c_1 + c_2), \\
&c := a_1 + a_2 - \frac{1}{2}(b + c_1 + c_2).
\end{aligned}
$$

すると，以下の既約分解を得る．

Proposition 4.2. D_4 加群として

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$

ここで，$W_1 = \mathrm{Span}(a_1, a_2)$，$W_2 = \mathrm{Span}(k_1, k_2)$，$W_3 = \mathrm{Span}(c)$ であり，$W_1 \cong W_2$ である．

また，作用を計算することで，以下を得る．

Proposition 4.3. $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群として，直和分解

$$W = (W_1 + W_2) \oplus W_3$$

を得る．

特に，$W_1 + W_2$，W_3 は $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群として既約であることが示せる．さらに W_3 は自明な作用を持つ加群であり，その生成元は上記の基底の c で与えられる．そのため，以下の主張を得る．

Proposition 4.4. $\mathrm{H}^0(\mathrm{Out}\, F_2, \mathrm{gr}^1(J_3^2))$ は

$$c = [1] + [2] + [-1] + [-2] - \frac{1}{2}([1,2] + [1,-2] + [-1,2] + [-1,-2])$$

で生成される．

4.1 $\mathrm{gr}^1(J_3^2)$ の分解

以下のように基底をとる．

$$\begin{aligned}
&X_1 = -[1] - [-1], \quad X_2 = -[2] - [-2], \\
&X_{12} = \frac{1}{2}([1] + [2] + [-1] + [-2] - [1,2] - [-1,-2]), \\
&a_1, a_2, k_1, k_2, c, d.
\end{aligned}$$

すると，以下のような $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群としての直和分解を得る．

Theorem 4.5. $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群としての直和分解は以下の通り与えられる．

$$\mathrm{gr}^1(J_3^2) = (W_1 + W_2) \oplus \mathrm{Span}(6c - d) \oplus \mathrm{Span}(X_1, X_2, X_{12}, c).$$

特に $W_1 + W_2$ と $\mathrm{Span}(6c - d)$ は既約であり， $\mathrm{Span}(X_1, X_2, X_{12}, c)$ は *indecomposable* である．

証明のスケッチ

それぞれが $\mathrm{Aut}(F_2)$ 作用で閉じていることは直接計算で確かめられる．$W_1 + W_2$ の既約性はすでに述べた．$\mathrm{Span}(6c - d)$ は 1 次元であるから明らかに既約である．なお，これは符号表現と一致することがわかる．したがって残りは $\mathrm{Span}(X_1, X_2, X_{12}, c)$ である．しかし c が生成する部分 $\mathrm{Aut}(F_2)$ 加群が存在するため，これは既約ではない．そこで D_4 加群としての既約分解を行い，DokoviĆ-Doniz の結果 [5] を用いることで，indecomposable なことが示せる．

References

[1] T. Brady; The integral cohomology of $\mathrm{Out}_+(F_3)$, J. Pure Appl. Algebra 87 (1993), 123–167.

[2] K. Brown; Cohomology of groups, Graduates texts in Mathematics 87, Springer (1982).

[3] W. Brumfiel and H. M. Hilden; SL(2) representations of finitely presented groups, Contemp. Math. 187 (1995).

[4] M. Culler and K. Vogtmann; Moduli of graphs and automorphisms of free groups, Invent. Math. 84 (1986), 91–119.

[5] D. Ž. Doković and D. Doniz; The complex indecomposable representations of $\mathrm{Aut}(F_2)$ of degree less than six, Int. J. Algebra Comput. 10(2) (2000), 229–260.

[6] R. Horowitz; Induced automorphisms on Fricke characters of free groups, Trans. Amer. Math. Soc. 208 (1975), 41–50.

[7] E. Hatakenaka and T. Satoh; On the graded quotients of the ring of Fricke characters of a free group, Journal of Algebra 430 (2015), 94–118.

[8] Y. Katoh; On the graded quotients of the algebra of SL(2) characters of free groups, preprint.

[9] S. Lawton; Generators, relations and symmetries in pairs of 3×3 unimodular matrices, J. Algebra 313 (2007), no. 2, 782–801.

[10] S. Lawton; Minimal affine coordinates for $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ character varieties of free groups, J. Algebra 320 (2008), no. 10, 3773–3810.

[11] S. Lawton; Algebraic independence in $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ character varieties of free groups, J. Algebra 324(6) (2010), 1383–1391.

[12] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. 78 (1918), 385–397.

[13] J. Nielsen; Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. 91 (1924), 169-209.

[14] W. Magnus; *The uses of 2 × 2 matrices in combinatorial group theory.* A survey, Resultate der Math. 4 (1981) 171–192, Reprinted in: Wihelm Magnus, Collected Papers, Springer-Verlag, 1984, pp. 701–722.

[15] T. Satoh; The Johnson-Morita theory for the ring of Fricke characters of free groups, Pacific J. Math. 275 (2015), no. 2, 443–461.