

4次元多様体の Kirby-Thompson 不変量について

津山工業高等専門学校 浅野 喜敬

National Institute of Technology, Tsuyama College

1 序

本稿では、4次元多様体の組合せ不変量の1つである Kirby-Thompson 不変量に関する幾つかの不等式について報告する．より詳しい事柄については、[3]を参照して頂きたい．本稿の内容は小川将輝氏（東北大学）直江央寛氏（東京科学大学）との共同研究の内容を含む．

Kirby-Thompson 不変量は4次元多様体の分割の1つであるトライセクションを用いて定義される．4次元多様体 X のトライセクションとは、3つの4次元1-ハンドル体 $\mathbb{H}^4(S^1 \times D^3)$ による X の分割であり、Gay-Kirby により導入された [6]．これは3次元多様体を2つの種数 g の1ハンドル体 $\mathbb{H}^3(S^1 \times D^2)$ に分割する Heegaard 分解の4次元アナロジーである．4次元多様体にトライセクションを与えることで、4次元多様体を曲面上の3つの曲線族として表示することが出来る．トライセクションは4次元多様体の表示手法の1つとして、現在多数の研究者により研究されている．

Kirby-Thompson は、トライセクション図式の“複雑度”ともいえる量を考察することで、4次元多様体 X の微分同相類に関する非負整数値の不変量 L_X を導入した [9]．これを本稿では Kirby-Thompson 不変量と呼ぶ．Kirby-Thompson は、不変量を導入した論文の中で次を示した．

定理 1.1 ([9]). X を閉4次元多様体とする． $L_X \leq 1$ であることと、 X が $\{S^4, \mathbb{CP}^2, \overline{\mathbb{CP}^2}, S^1 \times S^3, S^2 \times S^2\}$ の中から (重複を許して) 有限個を選んで連結和したものと微分同相であることは同値である．

注意 1.2. Kirby-Thompson による定理 1.1 の仮定を、 $L_X \leq 2$ に拡張した結果が小川氏により得られている [11]．

4次元トポロジーにおける基本的な問の1つに「標準的4次元球面 S^4 と同相な多様体は、 S^4 と微分同相か？」というものがある．この問題は可微分 Poincaré 予想と呼ばれ、4次元多様体の微分構造に関わる研究において重要視されている． S^4 と同相な4次元多様体 X に対し、 $L_X \leq 2$ であるならば、 X は S^4 に微分同相であることがしたがう．つまり Kirby-Thompson 不変量が計算できれば、可微分 Poincaré 予想の反例候補となる4次元多様体を判定することが出来る．

また、Kirby-Thompson 不変量の類似として、境界付き4次元多様体の不変量や曲面結び目の不変量も考察されており (cf. [1, 2, 4, 5]), 各々に対して定理 1.1 の類似が証明されている．

Kirby-Thompson 不変量は最小値により定義される不変量であるため、その計算は容易でない．研究を始めた当初は、0でない値を持つ多様体の例すら知られていない状況で

あった．執筆現在でも 0 でない値で不変量の値を決定出来た例は，レンズ空間 $L(2, 1)$ のスピン 4 次元多様体 $\mathcal{S}(L(2, 1))$ を除いて知られていない．講演では，この不変量に対して，Kirby 図式・ホモロジー群・基本群といった基本的な道具を用いた次の 3 つの下からの評価を紹介した．

定理 1.3 ([3]). 閉 4 次元多様体 X は少なくとも 1 つの 1-ハンドルを持ち， $S^1 \times S^3$ を連結和成分に含まないとする．このとき， $L_X \geq 4$ である．

定理 1.4 ([3]). 閉 4 次元多様体 X は $S^1 \times S^3$ を連結和成分に持たず， $\pi_1(X) \neq 1$ かつ $\pi_1(X) \neq \mathbb{Z}$ であるとする．このとき， $L_X \geq 6$ である．

定理 1.5 ([3]). 閉 4 次元多様体 X の 1 次ホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ が有限群のとき，ある正の定数 $C > 0$ が存在して， $L_X \geq C \sqrt{\log |H_1(X)|}$ である．

定理 1.5 は，閉 4 次元多様体 X の 1 次ホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ が有限群のとき，その Kirby-Thompson 不変量 L_X は 1 次ホモロジー群の位数 $|H_1(X; \mathbb{Z})|$ に依存した関数を用いて下から評価されるということを意味している．定理 1.4, 1.5 より，次の系を得る．閉 n 次元多様体 M に対し， $\mathring{M} = \overline{M} \setminus D^n$ と定める．

系 1.6 ([3]). (1) 閉 4 次元多様体 $\mathcal{S}(L(2, 1)) = \partial(L(2, 1) \times D^2)$ に対して， $L_{\mathcal{S}(L(2, 1))} = 6$ である．

(2) Kirby-Thompson 不変量は非有界な不変量である．即ち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある閉 4 次元多様体 X が存在して， $L_X \geq n$ である．

$\mathcal{S}(L(2, 1)) = \partial(L(2, 1) \times D^2)$ はレンズ空間 $L(2, 1)$ のスピン 4 次元多様体と呼ばれる多様体であり，Pao の多様体と呼ばれるクラスに属する．レンズ空間 $L(p, q)$ のスピン 4 次元多様体 $\mathcal{S}(L(p, q))$ については，例えば [10] を参照して頂きたい．

系 1.6(1) を示す． $\pi_1(\mathcal{S}(L(2, 1))) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので，定理 1.4 より， $L_{\mathcal{S}(L(2, 1))} \geq 6$ である．Meier による $\mathcal{S}(L(2, 1))$ のトライセクション図式 (cf. [10]) に対して，具体的にハンドルスライドの系列を構成することにより， $L_{\mathcal{S}(L(2, 1))} \leq 6$ であることが分かる [9]．したがって $L_{\mathcal{S}(L(2, 1))} = 6$ である．次に系 1.6(2) を示す． $H_1(\mathcal{S}(L(p, q); \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ なので，与えられた $n \in \mathbb{N}$ に対して，十分大きな p を取り定理 1.5 を用いることで， $L_{\mathcal{S}(L(p, q))} \geq n$ であることが分かる．

2 章で紹介する Kirby-Thompson 不変量の定義から明らかに， $\{S^4, \mathbb{CP}^2, \overline{\mathbb{CP}^2}, S^1 \times S^3, S^2 \times S^2\}$ 及びこれらの中から (重複を許して) 有限個を選び連結和して得られる閉 4 次元多様体の値は 0 であることが分かる．この計算例と系 1.6(1) を踏まえると，「 $0 < L_X \leq 5$ を満たす閉 4 次元多様体 X が存在するか？」という自然な問が生じるが，執筆現在これは未解決である．また，定理 1.4, 1.5 と同様の手法により，次の 2 つの不等式も得られている．

定理 1.7. (1) 閉 4 次元多様体 X は $S^1 \times S^3$ を連結和成分に持たないとする．このとき， $L_X \geq 3b_1(X)$ である．

(2) 閉 4 次元多様体 X の 2 次ホモロジー群 $H_2(X; \mathbb{Z})$ が有限群のとき，その Kirby-Thompson 不変量 L_X は 2 次ホモロジー群の位数 $|H_2(X; \mathbb{Z})|$ に依存した関数を用いて下から評価される．即ち，ある正の定数 $C > 0$ が存在して， $L_X \geq C \sqrt{\log |H_2(X)|}$ である．

定理 1.7(1) より， $6 \leq L_{S^2 \times T^2}$ であることが分かる．一方で $S^2 \times T^2$ のトライセクション図式からハンドルスライドの系列を具体的に構成することで， $L_{S^2 \times T^2} \leq 9$ であることがしたがうが， $L_{S^2 \times T^2}$ の値の決定には至っていない．また，単連結な閉 4 次元多様体に関する評価も知られていない．

2 準備

本章では，トライセクションの定義及び Kirby-Thompson 不変量の定義を述べる．

断りのない限り，本稿を通じて，多様体はすべて閉，連結，有向，可微分であるとする．閉多様体 X に対して， $\#^k X$ は X の k 個のコピーを連結和して得られる多様体を表す． $k=0$ のときは S^3 であると定める．また，境界付き多様体 M に対して， $\natural^k M$ は M の k 個のコピーを境界連結和して得られる多様体を表す． $k=0$ のときは D^4 であると定める．

2.1 4次元多様体のトライセクション

閉4次元多様体 X のトライセクションとは，3つの4次元1-ハンドル体 $\natural^k(S^1 \times D^3)$ による X の分割であり，3次元多様体を2つのハンドル体により分解する Heegaard 分解の4次元類似である．

定義 2.1 ([6]). k, g を $0 \leq k \leq g$ を満たす非負整数とする．閉4次元多様体 X の分割 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ で次を満たすものを (g, k) -トライセクションという：

- (1) $X_i \simeq \natural^k(S^1 \times D^3)$,
- (2) $X_i \cap X_j \simeq H_g$,
- (3) $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \simeq \Sigma_g$.

ここで， H_g は3次元の種数 g のハンドル体， Σ_g は種数 g の向き付け可能閉曲面である．

注意 2.2. (g, k) -トライセクション $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ の定義において，各 X_i の持つ4次元の1-ハンドルの個数はすべて同じ k 個であった．このようなトライセクションを均衡なトライセクションと呼ぶ．定義 2.1(1) の条件を，次の条件 (1') に拡張したトライセクションを(不均衡な) (g, k_1, k_2, k_3) -トライセクションと呼ぶ．：

- (1') $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し， $X_i \simeq \natural^{k_i}(S^1 \times D^3)$ ($i = 1, 2, 3$)

本稿の議論は (g, k_1, k_2, k_3) -トライセクションでも同様に成り立つが，簡単のため本稿では各 X_i の持つ1-ハンドルの数はすべて同じであるとする．

4次元多様体にトライセクションが与えられると，その微分同相類の情報を曲面上の曲線族として表示することが出来る．このとき表示された図式をトライセクション図式と言う．

定義 2.3 ([6]). Σ_g を種数 g の向き付け可能閉曲面， α, β, γ を Σ_g 上の g 個の単純閉曲線からなる族とする． $(\Sigma_g; \alpha, \beta), (\Sigma_g; \beta, \gamma), (\Sigma_g; \gamma, \alpha)$ が各々 $\#^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき，組 $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ をトライセクション図式と呼ぶ． $\#^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式とは，図1の図式と曲面の微分同相及びハンドルスライドにより一致する図式である．

Σ_g の自己微分同相写像， α, β, γ の巡回置換及び曲線族 α, β, γ 各々に対するハンドルスライドにより移り合うとき，2つのトライセクション図式 $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma), (\Sigma_g; \alpha', \beta', \gamma')$ は同値であるという．

トライセクション図式の例を述べる．図2はそれぞれ $\mathbb{CP}^2$ と $S^2 \times S^2$ のトライセクション図式の例である．同じ曲線族に含まれる曲線は同じ色で表わしている．本稿では赤色の

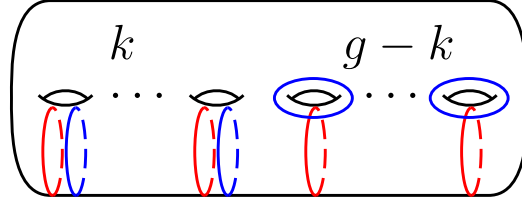


図 1: $\#^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の標準的な Heegaard 図式.

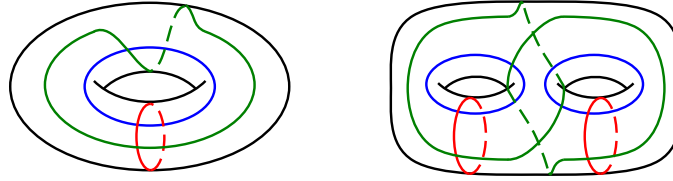


図 2: (左): $\mathbb{CP}^2$ の種数 1 のトライセクション図式. (右): $S^2 \times S^2$ の種数 2 のトライセクション図式.

曲線達からなる曲線族を α として, 青色, 緑色の曲線達からなる曲線族をそれぞれ β, γ とする. モーメント写像による図 2 のトライセクション図式の構成が [6] に記されている.

4 次元多様体 X に (g, k) -トライセクション $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ が与えられると, 各 X_i の境界 $\partial X_i = \#^k(S^1 \times S^2)$ に対して, 種数 g の Heegaard 分解が 1 つずつ定まる. これら 3 つの Heegaard 分解が定める Heegaard 図式を中心曲面 $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \simeq \Sigma_g$ の上に描いたものを $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ とすると, $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ は X のトライセクション図式である.

逆に, トライセクション図式 $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ を 1 つ与えると, $\Sigma_g \times D^2$ に対し, α, β, γ に沿って 4 次元の 2-ハンドルを貼り付け (フレーミングは曲面フレーミングにより与える), その後境界が 3 つの $\#^k(S^1 \times S^2)$ となるように 3-ハンドルを貼る. 得られた 3 つの $\#^k(S^1 \times S^2)$ をそれぞれ 3 つの $\#^k(S^1 \times D^3)$ により埋めることで, 4 次元多様体が微分同相の違いを除いてただ 1 つ定まる.

4 次元多様体のハンドル分解の接着の様子を S^3 内の枠付き絡み目として表示したものを Kirby 図式と言う. Kirby 図式についての詳細については, [7] を参照して頂きたい. トライセクション図式による閉 4 次元多様体の構成から, Kirby 図式を得る事が出来る. 本稿で紹介する定理の証明はトライセクション図式から得られる Kirby 図式を調べることで行われる. トライセクション図式から得られる Kirby 図式について, 本稿では説明を省略するが, [3] の 2 章に記述があるので参照して頂きたい.

2.2 Kirby-Thompson 不変量

Kirby-Thompson は曲線族を頂点とするある複体を経由して, トライセクション図式の“複雑度”とも言える量を取り出すことで, 閉 4 次元多様体の不変量を導入した. 本章では Kirby-Thompson 不変量の定義を述べる. 幾つかの記号を準備する. Σ_g 上の 2 つの単純閉曲線を c, c' とする. 本稿では, c と c' がイソトピックであるとき cPc' , c と c' が曲面のイソトピーで捩動して横断的に 1 度だけ交わるようにできるとき cDc' と表す. また c と c' がイソトピックでなく, かつ曲面のイソトピーで捩動して非交和とできるとき $c\emptyset c'$ と書く.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g)$ を Σ_g 上の、互いに交わらない単純閉曲線からなる族とする. $\Sigma_g \setminus (\cup_i \alpha_i)$ が $2g$ 個の穴の空いた球面と同相であるとき、 α をカットシステムという. 種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上のカットシステムを頂点とする 1 次元の複体を次のように定義する.

定義 2.4. Σ_g 上のすべてのカットシステムの各イソトピー類を頂点集合 Γ として、 $c = (c_1, c_2, \dots, c_g), c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_g)$ を任意の頂点とする. c, c' は次のいずれかが成り立つときに辺によって結ばれると定義する:

(0) 適切に曲線の番号を並べ替えることで、 $c_i \mathcal{P} c'_i (i = 1, 2, \dots, g-1)$ かつ $c_g \mathcal{O} c'_g$ である.

(1) 適切に曲線の番号を並べ替えることで、 $c_i \mathcal{P} c'_i (i = 1, 2, \dots, g-1)$ かつ $c_g \mathcal{D} c'_g$ である.

頂点集合 Γ に対し、辺集合を条件 (0) 及び (1) によって定義した 1 次元の複体を、 Σ_g のカット複体とよび、 C_g と表す. また、条件 (0) によって定められる辺をタイプ 0 の辺、条件 (1) によって定められる辺をタイプ 1 の辺と呼ぶ.

カット複体は Hatcher-Thurston によって導入され、連結かつ単連結であることが知られている [8]. $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ を閉 4 次元多様体 X のトライセクション図式として、 Γ_α を、 C_g における α のタイプ 0 の辺による連結成分とする. Γ_α はカットシステム α とタイプ 0 で繋がれるすべてのカットシステム及び、それらを繋ぐタイプ 0 の辺すべてからなる C_g の部分複体である. 部分複体 Γ_β 及び Γ_γ も同様に定める.

注意 2.5. 2 つの頂点 c, c' がタイプ 0 の辺で繋がれているとする. このとき、 c と c' は互いに有限回のハンドルスライドにより移り合う. 即ち、 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \Gamma_\gamma$ に含まれる頂点は、各々 α, β, γ とハンドルスライドで移り合うすべてのカットシステムである.

定義 2.6. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g)$ を 2 つのカットシステムとする. 組 (α, β) が次の 2 つの条件を満たすとき、 (α, β) は良い位置であると呼ぶ:

- 各 $i \in \{1, 2, \dots, g\}$ に対して、 $\alpha_i \mathcal{P} \beta_i$ または $\alpha_i \mathcal{D} \beta_i$ のいずれか一方のみが成り立つ.
- $i \neq j$ ならば α_i と β_j は交わらない.

$(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ をトライセクション図式とすると、 $(\Sigma_g; \alpha, \beta), (\Sigma_g; \beta, \gamma), (\Sigma_g; \gamma, \alpha)$ は $\#^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 図式であった. Waldhausen の定理より、 $\#^k(S^1 \times S^2)$ の任意の Heegaard 分解はイソトピーの違いを除いて一意であることが知られている. 即ち、 $\#^k(S^1 \times S^2)$ の任意の Heegaard 図式はイソトピーにより、良い位置であると仮定することができる.

定義 2.7. X を閉 4 次元多様体、 $\mathcal{T} = (\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ をトライセクション図式とする. カット複体 C_g 内の閉路 λ で、次を満たすものをループと呼ぶ:

- λ は $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \Gamma_\gamma$ と交わる.
- ある頂点 $\alpha_\beta, \alpha_\gamma \in \Gamma_\alpha \cap \lambda, \beta_\gamma, \beta_\alpha \in \Gamma_\beta \cap \lambda, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in \Gamma_\gamma \cap \lambda$ が存在して、 $(\alpha_\beta, \beta_\alpha), (\beta_\gamma, \gamma_\beta), (\gamma_\alpha, \alpha_\gamma)$ は良い位置である.
- $\Gamma_\alpha \cap \lambda, \Gamma_\beta \cap \lambda, \Gamma_\gamma \cap \lambda$ は、それぞれ $(\alpha_\beta, \beta_\alpha), (\beta_\gamma, \gamma_\beta), (\gamma_\alpha, \alpha_\gamma)$ を繋ぐ λ の部分路である.

$l_{X, \mathcal{T}}$ を C_g 内のすべてのループの長さの最小値とする. 長さが $l_{X, \mathcal{T}}$ であるループを最小ループと呼ぶ. ここで、 $(\alpha_\beta, \beta_\alpha), (\beta_\gamma, \gamma_\beta), (\gamma_\alpha, \alpha_\gamma)$ は各々 $g-k$ 本のタイプ 1 の辺で繋がれていることに注意する. λ を最小ループとして、 $l_\alpha(\lambda)$ を $\Gamma_\alpha \cap \lambda$ 内のタイプ 0 の辺の本数とする. $l_\beta(\lambda), l_\gamma(\lambda)$ も同様に定める.

このとき,

$$L_{X,\mathcal{T}} = l_\alpha(\lambda) + l_\beta(\lambda) + l_\gamma(\lambda) = l_{X,\mathcal{T}} - 3g + 3k$$

をトライセクション $\mathcal{T}$ の長さと呼ぶ. 更に 4 次元多様体 X の許容するすべてのトライセクション上を走らせたときの最小値を L_X と書き, 4 次元多様体 X の Kirby-Thompson 不変量と呼ぶ. Kirby-Thompson 不変量は 4 次元多様体の微分同相類に対する不変量である.

4 次元多様体の Kirby-Thompson 不変量の計算例を紹介する.

例 2.8. 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の $(1,0)$ -トライセクション図式は図 2(左) である. 赤い単純閉曲線を α , 青い単純閉曲線を β , 緑の単純閉曲線を γ とすると, 組 $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)$ はすべて良い位置にある. よって, $L_{\mathbb{CP}^2} = 0$ である.

具体的にトライセクション図式を構成することで, $S^4, \overline{\mathbb{CP}^2}, S^1 \times S^3, S^2 \times S^2$ の値も 0 である. $S^4, \mathbb{CP}^2, \overline{\mathbb{CP}^2}, S^1 \times S^3, S^2 \times S^2$ らは, トライセクション図式を構成すると, 3 つ組の内各 2 つ組が既に良い位置であったため, 自明な値をとることがすぐに分かる. 一般にはトライセクション図式が構成されていても, 不変量の値を計算することは容易ではない.

3 証明の概略

本章では定理 1.4, 1.5 の証明の概略について説明する. 詳細については [3] を参照して頂きたい. 証明には次の補題を用いる. この補題は 1 本のタイプ 0 の辺で結ばれている 2 つの頂点 (カットシステム) のホモロジー類について, その差を計算するものである.

補題 3.1. Σ_g を向き付けられた種数 g の閉曲面, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g), \alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_g)$ を Σ_g 上の向き付けられた 2 つのカットシステムとして, α と α' はカット複体 C_g 上 1 本のタイプ 0 の辺で繋がれているとする. 即ち, $\alpha_i \mathcal{P} \alpha'_i (i \in \{1, 2, \dots, g-1\}), \alpha_g \mathcal{O} \alpha'_g$ であると仮定する. このとき, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{g-1} \in \{-1, 0, 1\}$ と $\epsilon_g \in \{-1, 1\}$ が存在して,

$$[\alpha'_g] = \sum_{i=1}^g \epsilon_i [\alpha_i] \in H_1(\Sigma)$$

が成り立つ.

トライセクション図式が与えられると, 多様体の基本群やホモロジー群はその図式から計算することが出来る. 補題 3.1 により, Kirby-Thompson 不変量との間の関係を調べることが出来る.

3.1 定理 1.4 の証明の概略

定理 1.4 を再掲する.

定理 3.2 ([3]). 閉 4 次元多様体 X は $S^1 \times S^3$ を連結和成分に持たず, $\pi_1(X) \neq 1$ かつ $\pi_1(X) \neq \mathbb{Z}$ であるとする. このとき, $L_X \geq 6$ である.

(定理 1.4 の証明のスケッチ)

定理 1.4 は $L_X \leq 5$ のとき, 基本群が自明群または無限巡回群 $\mathbb{Z}$ に同型となることを示せばよい. $L_X \leq 5$ とすると, 最小ループ λ について, $l_\alpha(\lambda), l_\beta(\lambda), l_\gamma(\lambda)$ のうち少なくとも 1 つは 1 以下である. $l_\alpha(\lambda) \leq 1$ とする.

(1) Case : $l_\alpha(\lambda) = 0$

トライセクション図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ から得られる X の Kirby 図式を調べると、簡単な議論により X が $S^1 \times S^3$ を連結和成分に持つか、1 ハンドルを持たないハンドル分解を持つことが分かる。前者は $S^1 \times S^3$ を連結和成分に持たないという仮定に矛盾し、後者のケースは基本群が自明である。

(2) Case : $l_\alpha(\lambda) = 1$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g), \alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_g)$ を $\Gamma_\alpha \cap \lambda$ 上の 2 頂点で、ただ 1 つのタイプ 0 の辺で結ばれているとする。添え字は $\alpha_i \mathcal{P} \alpha'_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, g-1\}$), $\alpha_g \oslash \alpha'_g$ を満たすと仮定する。 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g)$ を各々 $\Gamma_\beta \cap \lambda, \Gamma_\gamma \cap \lambda$ の頂点で、 $(\alpha, \beta), (\alpha', \gamma)$ がそれぞれ良い位置にあるものとする。このとき、各 $i \in \{1, 2, \dots, g\}$ に対して、トライセクション図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ から得られる Kirby 図式を調べることで、 X の 1-ハンドルは高々 1 つであることが分かる。加えて、1-ハンドルが存在した場合、

- その 1-ハンドルに対応する α 内の曲線は α_g であることと、
- $\beta_g \mathcal{P} \alpha_g \oslash \alpha'_g \mathcal{P} \gamma_g$ のケースのみを考えればよい

ということが分かる。トライセクション図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ を用いて $\pi_1(X)$ の表示を与えると、 $\pi_1(X)$ は高々 1 元生成であり、生成元が存在すればそれは α_g であることが分かる。後は α_g と γ_i らの代数的交点数を調べればよい。補題 3.1 より、

$$\langle \alpha_g, \gamma_i \rangle = \sum_{j=1}^g \epsilon_j \langle \alpha', \gamma_i \rangle = \epsilon_i$$

を得る。ここで、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{g-1} \in \{-1, 0, 1\}, \epsilon_g \in \{-1, 1\}$ である。よって、 $\pi_1(X)$ が自明な群か無限巡回群 $\mathbb{Z}$ に同型であることがしたが、証明が完了する。

3.2 定理 1.5 の証明の概略

最後に、定理 1.5 の証明のスケッチを紹介する。定理 1.5 を再掲する。

定理 3.3 ([3]). 閉 4 次元多様体 X の 1 次ホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ が有限群のとき、ある正の定数 $C > 0$ が存在して、 $L_X \geq C \sqrt{\log |H_1(X)|}$ である。

(定理 1.5 の証明のスケッチ)

$l_\alpha(\lambda) = m, |H_1(X; \mathbb{Z})| = p < \infty$ とする。 m と p の間の不等式を、1 次ホモロジーの係数行列を用いて与える。

$(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ を X のトライセクション図式として、 λ を最小ループとする。また、 (α, β) が良い位置であると仮定する。 $\Gamma_\alpha \cap \lambda$ の $m+1$ 個の頂点を、 $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)} = \alpha$ とする。ここで $h \in \{1, 2, \dots, m\}$ について、 $\alpha^{(h-1)}$ と $\alpha^{(h)}$ はただ 1 つのタイプ 0 の辺で結ばれるとする。

$(\alpha^{(0)}, \gamma)$ を良い位置であると仮定する。 $\alpha^{(h)}$ と γ の各曲線 $\alpha_i^{(h)}, \gamma_j$ の代数的交点数 $\langle \alpha_i^{(h)}, \gamma_j \rangle$ を並べた $g \times g$ 行列を

$$I^{(h)} = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1^{(h)}, \gamma_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha_i^{(h)}, \gamma_g \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_g^{(h)}, \gamma_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha_g^{(h)}, \gamma_g \rangle \end{pmatrix}$$

とする。補題 3.1 より h が 1 つ増加するごとに、 $I^{(h)}$ が列の基本変形により変化する。この $g \times g$ 行列の初期状態 $I^{(0)}$ は、 $(\alpha^{(0)}, \gamma)$ が良い位置であることから、

$$I^{(0)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．ここで， E はサイズが $(g-k) \times (g-k)$ の単位行列で，その他はすべて零行列である． $H_1(X; \mathbb{Z})$ が曲面 Σ のホモロジー群とトライセクション図式から計算出来るため， $I^{(h)}$ は $H_1(X; \mathbb{Z})$ の係数行列を部分行列に持つことがすぐに分かる．ここで，係数行列のある $k \times k$ 部分行列 U_0 が存在して， $p < |\det U_0|$ である．その後，Hadamard の不等式を用いて， $\det U_0$ を U_0 のノルムの積により上から評価する． U_0 のノルムは， $I^{(h)}$ が列の基本変形により変化することから， m に関するべき乗で上から評価することが出来るので，対数をとることで m を p を用いて下から評価することができる．

4 謝辞

研究集会「変換群論とその進展」にて発表の機会を下さりました世話人の田村氏に，また講演を聞いて下さった参加者の方々に深く感謝を申し上げます．ありがとうございました．

References

- [1] R. Aranda, P. Pongtanapaisan, S. Taylor and A. Zheng, *Bounding for the Kirby-Thomson invariant of spun knots*, Alg. & Geom. Topol. **24** :6 (2024) 3363–3399.
- [2] R. Aranda, P. Pongtanapaisan, and A. Zheng, *Bounding for Kirby-Thomson invariant of knotted surfaces*, Geom. Dedicata **217**, 99(2023)
- [3] N. Asano, H. Naoe and M. Ogawa, *Some lower bounds for the Kirby-Thompson invariant*, to appear in Math. Res. Lett.
- [4] R. Blair, M. Campisi, S. Taylor and M. Tomova, *Kirby-Thompson distance for trisection of knotted surfaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) **105**(2022), no. 2, 765–793.
- [5] N. Castro, G. Islambouli, M. Miller and M. Tomova, *The relative $\mathcal{L}$ invariant of a compact 4-manifold*, Pacific J. Math. **315**(2021), no. 2, 305–346.
- [6] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting of 4-manifolds*, Geom. Topol. **20**(2016), no. 6, 3097–3132.
- [7] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Studies in Math., **20**(1999), AMS., Providence, RI.
- [8] A. Hatcher and W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology, **19**(1980), 221–237.
- [9] R. Kirby and A. Thompson, *A new invariant of 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115**(2018), no. 43, 10857–10860.
- [10] J. Meier, *Trisections and spun four-manifolds*, Math. Res. Lett. **25**(2018), no. 5, 1497–1524.
- [11] M. Ogawa, *Trisections with Kirby-Thompson length 2*, Geom. Dedicata **216**, 64(2022).

津山工業高等専門学校
岡山県津山市沼 624-1
E-mail address: asano-n@tsuyama-ct.ac.jp