Circle action と 3-orbifold 群

福田瑞季 (MathAM-OIL・東北大学)
(石川昌治氏 (慶應義塾大) との共同研究)

1　導入

多様体を 1 つ固定したとき，その上にどのような circle action が許容されるかという問題は重要なテーマの一つである．例えば，ホモトピー $2n+1$-球面上の pseudo-free circle action は，$n=1$ のときは高々 2 個の exceptional orbit をもち [25]，$n \geq 3$ のときは任意の自然数 k に対して k 個の exceptional orbit をもつものが存在する [17, 23]． $n=2$ のときは Montgomery と Yang によって exceptional orbit は高々 3 個であるという予想がなされていて，未解決である [14, Conjecture 30]．一方で $2n$ 次元球面はオイラー数が 0 ではないため，$2n$ 次元球面上の circle action は固定点を必ずもつ．4 次元球面上の circle action については Montgomery と Yang, Fintushel, Pao の結果により分類が完了している [16, 7, 19]．

閉 3 次元多様体において circle action を許容するものは Seifert manifold と呼ばれ，多様体の幾何構造の一つを特徴づけている重要な性質である [13, 24]．結び目補空間で circle action を許容する結び目はトーラス結び目であり，特にトーラス結び目は circle action で (集合として) 不変な集合である [2]．この性質を 2 次元の結び目に拡張したもの，つまり 4 次元球面に滑らかに埋め込まれた 2 次元球面であって，circle action で不変なもの，を branched twist spin という．この branched twist spin は 1 次元結び目 K と互いに素な自然数の組 (m,n) $(m>n)$ もしくは $(0,1)$ によって１つ構成することができるので $K^{m,n}$ と表す (詳細な定義は §3.1 を参照)．

1 次元結び目 K_1 と K_2 が同値であるとは，S^3 上の微分同相写像 $f: S^3 \to S^3$ で $f(K_1)=K_2$ となるものが存在するときをいう．同様に，2 次元結び目 F_1 と F_2 が同値であるとは，S^4 上の微分同相写像 $f: S^4 \to S^4$ で $f(F_1)=F_2$ となるものが存在するときをいう．

これまでの研究で，$m_1 \neq m_2$ のとき $K_1^{m_1,n}$ と $K_2^{m_2,n}$ は同値でないこと [9]，m が 3 以上の奇数であれば $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ が同値でないことがわかっている [8]．本稿では (m,n) を固定したときの branched twist spin の同値性に対して次の 2 つが成り立つことを説明する．

定理 1.1 ([10])**.** m を 3 以上の自然数とし，K_1 と K_2 を素な 1 次元結び目で，トーラス結び目ではないとする．このとき，$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であることと K_1 と K_2 が同値であることは必要十分である．

定理 1.2 ([10])**.** K_1 と K_2 を素なサテライト結び目，もしくは Conway reducible とする．このとき，$K_1^{2,1}$ と $K_2^{2,1}$ が同値であることと K_1 と K_2 が同値であることは必要十分である．

ここで，1次元結び目が *Conway reducible* であるとは，その補空間内に本質的な4つ穴開き球面が存在するときをいう．

注意として，$m = 0$ のとき，$K^{0,1}$ は Artin の spun knot である [1]．Spun knot の結び目群は K の結び目群と同型なので，結び目補空間予想の解決により全ての素な1次元結び目の spun knot に対して定理 1.1 の主張は成立する [11]．また，$m = 1$ のとき，$K^{1,1}$ は Zeeman の 1-twist spun knot であり，K によらず自明な2次元結び目になる [28]．したがって定理 1.1 と定理 1.2 を合わせると，K が素なサテライト結び目の場合は $K^{m,n}$ の分類は完全に解決したことになる．トーラス結び目と合成結び目に関しては Hillman の preprint を参照されたい [12]．

2 Circle action

多様体 M 上の circle action に対し，orbit は固定部分群によって次の 3 つに分けられる．

- free orbit (固定部分群が自明),
- exceptional orbit (固定部分群が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $(m \geq 2)$),
- fixed point (固定部分群が S^1).

特に 固定部分群が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の exceptional orbit を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-タイプといい m をその位数という．

4 次元球面上の circle action を説明するために，最初に奇数次元の球面について具体例を 2 つ紹介する．

2.1 奇数次元球面上の circle action

$2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Sigma_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$ を $\mathbb{C}^n$ 内の単位球面とみなし，$S^1 = \{(e^{\sqrt{-1}\theta}) \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ が作用するものとする．

例 2.1. ($\mathbb{C}^*$-action の S^{2n-1} への制限)

次で定義される circle action $S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, \ldots, z_n) = (e^{\sqrt{-1}\theta} z_1, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta} z_n).$$

この circle action は固定点を持たず，全ての orbit は free である．これは斉次座標 $[z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^{n-1}$ の定義で用いられる $\mathbb{C}^*$-action を S^{2n-1} に制限した action の orbit に対応している．よって，この action による orbit space は $\mathbb{C}P^{n-1}$ である．

例 2.2. (weighted $\mathbb{C}^*$-action の S^{2n-1} への制限)

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は n 個の自然数で，$\gcd(a_1, \ldots, a_n) = 1$ を満たすとする．次で定義される circle action $S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, \ldots, z_n) = (e^{\sqrt{-1}a_1\theta} z_1, \ldots, e^{\sqrt{-1}a_n\theta} z_n).$$

特に $a_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ のときは例 2.1 の circle action である．全ての a_i が 1 より大きいとき，$\{z_i = 0\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ の点を通る orbit は exceptional となり，$\{z_1 \cdots z_n \neq 0\}$ では free となる．次の Figure 1 は $n = 2$，$a_1 = 7$，$a_2 = 30$ としたときの total space

(左) と orbit space (右) を表している．このとき，例 2.1 同様に，orbit space は 位相的には $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ と同相になるが、exceptional orbit の像に対応する 2 点が特別な点として現れる．注意として，$z_1 = 0$ での exceptional orbit の位数は $a_2 = 30$，$z_2 = 0$ での exceptional orbit の位数は $a_1 = 7$ である．

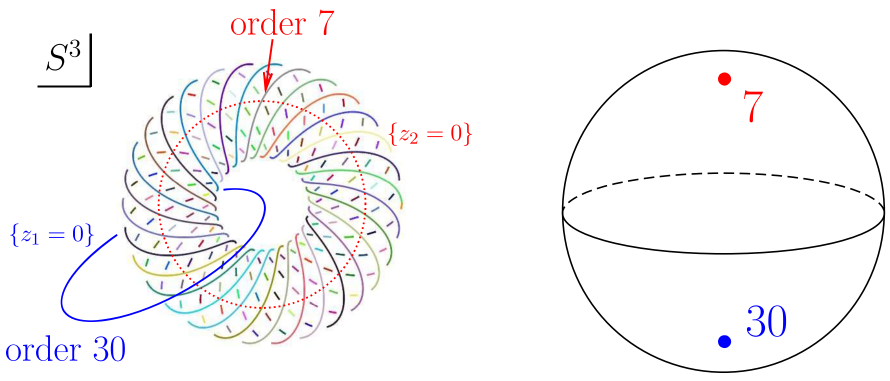

Figure 1: Weight $(7, 30)$ の circle action

2.2 4 次元球面上の circle action

4 次元球面上の circle action は Montgomery と Yang，Fintushel，Pao によって分類が与えられている．Montgomery と Yang，Fintushel は ホモトピー 4-球面上の circle action の分類を行い，Pao によってそのようなホモトピー 4-球面は実際に 4 次元球面と微分同相であることが示された．次の定理はその結果をまとめたものである．

定理 2.3. (Montgomery-Yang [16], Fintushel [7], Pao [19]) m, n を互いに素な 2 以上の自然数とする．4 次元球面上の circle action は次の 4 つのタイプに分類される．

$$(1)\ \{D^3\},\ \ (2)\ \{S^3\},\ \ (3)\{S^3, m\},\ \ (4)\ \{(S^3, K), m, n\}.$$

定理 2.3 に現れる D^3, S^3 は orbit space を表し，m, n は exceptional orbit の位数を表す．また，K は exceptional orbit と fixed point を合わせた集合の action による像である．(1) から (4) のタイプに対応する circle action を具体的に紹介する．

(1) $\{D^3\}$.
S^4 を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} = \{((x_1, x_2, x_3), z) \mid x_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ 内の単位球面とする．このとき，次の circle action $S^1 \times S^4 \to S^4$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x_1, x_2, x_3), z) = ((x_1, x_2, x_3), e^{\sqrt{-1}\theta} z).$$

この action では，$\{z = 0\}$，すなわち $\{((x_1, x_2, x_3), 0) \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1\} \cong S^2$ を通る orbit は fixed point であり，$\{z \neq 0\}$，すなわち $\{((x_1, x_2, x_3), z) \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1 - |z|^2, |z| \in (0, 1]\}$ を通る orbit は free である (例 2.1)．定義から circle action の影響は z のみであり，$|z|$ は不変である．したがって，free orbit の action による像は $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1 - |\mathrm{Re} z|^2, \mathrm{Re} z \in (0, 1]\}$ であり，これは open 3-ball と同相である．境界が fixed point set の像と一致することから，orbit space は D^3 となる．

(2) $\{S^3\}$.
S^4 を $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^2=\{(x,(z_1,z_2))\mid x\in\mathbb{R}, z_i\in\mathbb{C}\}$ 内の単位球面とする．このとき，次の circle action $S^1\times S^4\to S^4$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x,(z_1,z_2))=(x,(e^{\sqrt{-1}\theta}z_1,e^{\sqrt{-1}\theta}z_2)).$$

この action では，$\{z_1=0,z_2=0\}$，すなわち $\{x=\pm1\}$ の 2 点は fixed point となる．$S^4\cap\{x=t\mid t\in(-1,1)\}$ は 3 次元球面であり，その上の circle action は $\mathbb{C}^*$-action を S^3 に制限したものである．よって，例 2.1 でみたように，$\{x\neq\pm1\}$ の点を通る orbit は free である．

(3) $\{S^3,m\}$.
(2) と同じ座標系で次の circle action $S^1\times S^4\to S^4$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x,(z_1,z_2))=(x,(e^{\sqrt{-1}m\theta}z_1,e^{\sqrt{-1}\theta}z_2)).$$

この action では，(2) と同様に $\{x=\pm1\}$ の 2 点は fixed point となる．$S^4\cap\{x=t\mid t\in(-1,1)\}$ は 3 次元球面であり，その上の circle action は weighted $\mathbb{C}^*$-action を S^3 に制限したものである．よって 例 2.2 でみたように，$\{z_1\neq0,z_2=0\}$ の点を通る orbit は，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-タイプの exceptional orbit であり，$\{x\neq\pm1,z_2\neq0\}$ を通る orbit は free である (Figure 2)．各 t に対して weighted $\mathbb{C}^*$-action を S^3 に制限したものになっていることに注意すると，orbit space は S^2 から 2 つの固定点のそれぞれに corn を取ったもの，つまり S^3 である．特に exceptional orbit の像は S^3 内で固定点をつなぐ open arc である．

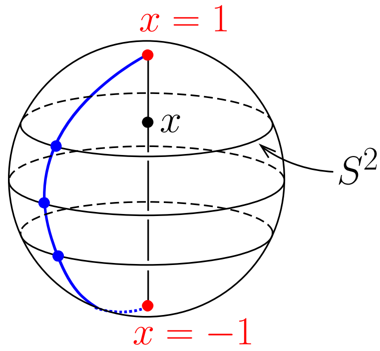

Figure 2: $\{S^3,m\}$ に対応する action の orbit space

(4) $\{(S^3,O),m,n\}$, O : 自明な 1 次元結び目．
(2) と同じ座標系で次の circle action $S^1\times S^4\to S^4$ を考える．

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x,(z_1,z_2))=(x,(e^{\sqrt{-1}m\theta}z_1,e^{\sqrt{-1}n\theta}z_2)).$$

この action では，(3) と同様に，$\{x=\pm1\}$ の 2 点は fixed point であり，$S^4\cap\{x=t\mid t\in(-1,1)\}$ は 3 次元球面，その上の circle action は weighted $\mathbb{C}^*$-action を S^3 に制限したものである．$\{z_1\neq0,z_2=0\}$ の点を通る orbit は，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-タイプ

の exceptional orbit であり，$\{z_1 = 0, z_2 \neq 0\}$ の点を通る orbit は，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-タイプの exceptional orbit である．また，$\{x \neq \pm 1, z_1 z_2 \neq 0\}$ の点を通る orbit は free である．(3) と同様に orbit space は S^3 であり，exceptional orbit の像は固定点をつなぐ 2 つの disjoint な open arc である．特に S^3 が S^2 から 2 つの固定点への corn として得られていることに注意すると，固定点と exceptional orbit 全体の像の和集合 O は自明な結び目である．

(4) では 自明な結び目 O に対する circle action の構成を説明したが，Fintushel は任意の 1 次元結び目 K が circle action の固定点とそれを結ぶ exceptional orbit の像の和集合となる (Figure 3) ホモトピー 4-球面上の circle action を構成した [7]．その後 Pao によってそのホモトピー 4 球面は S^4 と微分同相であることが示されている [19].

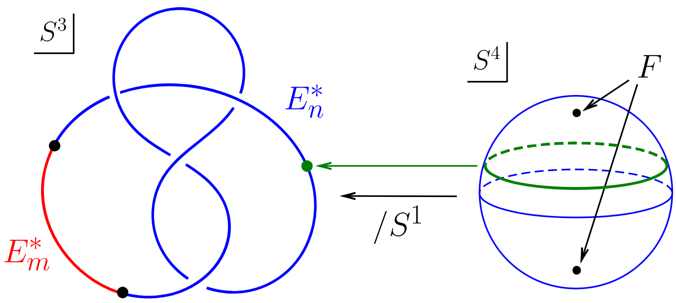

Figure 3: $\{(S^3, K), m, n\}$ に対応する action

3 Branched twist spin と orbifold

この章では定理 2.3 の (4) を用いて branched twist spin を定義し，その性質を述べた後に orbifold との関係について述べる．

3.1 Branched twist spin

定理 2.3 の (4) に対応する circle action を 1 つ固定する．今，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-タイプと $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-タイプの exceptional orbit が存在するので，$E_m, E_n \subset S^4$ をそれぞれ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-タイプ，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-タイプ の exceptional orbit 全体の集合とする．また，固定点集合 を F とする．これらの circle action による像をそれぞれ E_m^*, E_n^*, F^* と書く．定義から $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ である．E_n は E_n^* の action による逆像なので，annulus と同相である．$E_n^* \cup F^*$ は連結なので，$E_n \cup F$ は 2 次元球面と同相であり，実際微分同相になる．

定義 3.1. $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ を 1 次元結び目とする．このとき，$E_n \cup F$ を (m, n)-branched twist spin といい，$K^{m,n}$ と書く．また，$K^{0,1}$ を spun knot として定義する．

注意として，$K^{0,1}$ に対応する circle action は $\{D^3\}$ である．また，$K^{m,1}$ は twist spun knot で，対応する circle action は $\{S^3\}$ $(m = 1)$ または $\{S^3, m\}$ $(m > 1)$ である．

次の Pao の定理によって branched twist spin はファイバー結び目であることが知られている．

定理 3.2 ([19]). m, n を互いに素な自然数とする．このとき局所自明なファイブレーション

$$f : S^4 \setminus \mathrm{IntNbd}(K^{m,n}) \to S^1$$

が存在する．このファイブレーションのファイバーは S^3 の K に沿った m 重分岐被覆から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体で，モノドロミーは分岐被覆の基本領域を n ずらす周期的なものである．

3.2 結び目群 と orbifold 群

Branched twist spin の結び目群と orbifold 群との関係を説明するために，orbifold に関する用語をいくつか述べる．詳細な orbifold の説明に関しては、例えば [3, 4, 5] などを参照されたい．

n-orbifold とは，連結で可分な距離空間であって，局所的には $\mathbb{R}^n$ を有限群で割った商空間と同相になるものをいう．特に 3-orbifold で，ramification locus が単純閉曲線の和集合となっているものを *cyclic type* という [3, 6]．Cyclic type の 3-orbifold が *sufficiently large* であるとは，向きづけ可能で圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な 2-suborbfold が存在するときをいう．

3-orbifold $\mathcal{O}$ の Deck 変換群を $\pi_1^{orb}\mathcal{O}$ と書く．L を S^3 内の 1 次元絡み目とし，m を 2 以上の自然数とする．Cyclic type の 3-orbifold のうち，underlying space が S^3，ramification locus が L，その位数が m であるものを $\mathcal{O}(L, m)$ と書く．このとき，$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L, m))$ は L の絡み目群の表示 $\langle x_1, \ldots, x_u \mid r_1, \ldots, r_v \rangle$ を用いて

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L, m)) \cong \langle x_1, \ldots, x_u \mid r_1, \ldots, r_v, \mu_1^m, \ldots, \mu_{|L|}^m \rangle$$

と表示できる．ここで，$|L|$ は L の成分数であり，μ_i は L の i 番目の成分のメリディアンである．

$M_m(L)$ を S^3 の L に沿った m 重分岐被覆とすると，被覆写像 $M_m(K) \to \mathcal{O}(K, m)$ は，単射準同型 $\pi_1(M_m(K)) \to \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ を誘導する (cf. [4, Proposition 2.5])．

次に紹介する竹内氏の定理は sufficiently large である orbifold の剛性を示すものである．

定理 3.3 ([26] Theorem 8.1). L_1 と L_2 を S^3 内の素な絡み目で，ある 2 以上の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L_i, r)$ は sufficiently large であると仮定する．このとき，L_1 と L_2 が同値であることと，ある 2 以上の自然数 m に対して $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_2, m))$ が同型であることは必要十分である．

注意として，ある 2 以上の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L, r)$ が sufficiently large であるとき，任意の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L, r)$ が sufficiently large である．

Cyclic type の 3-orbifold の幾何構造の決定は Boileau と Porti によって完全に解決している [3]．この事実と向きづけ可能な Euclidean と spherical orbifold の分類と合わせて次の帰結を得る．

定理 3.4 ([3] Corollary 5). コンパクトで向きづけ可能で既約な 3 次元多様体を M とし，その中の双曲絡み目を L とする．3 以上の m に対して，M の L に沿った m 重分岐被覆は，$m = 3$ かつ $M = S^3$ かつ L が 8 の字結び目の場合を除き，双曲構造をもつ．

Branched twist spin の補空間 $S^4 \setminus K^{m,n}$ は $K^{m,n}$ の構成から E_m と free orbit 全体の集合の和集合である．Free orbit の集合は $S^3 \setminus K$ の action による逆像なので，$(S^3 \setminus K) \times S^1$ であり，$\{*\} \times S^1$ は free orbit である．よって，$K^{m,n}$ の結び目群 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong (\pi_1(S^3 \setminus K) \times \langle h \rangle)/\langle \mu^m h^\beta \rangle \tag{3.1}$$

である．ここで，μ は K のメリディアンであり，h は free orbit である．また，β は $n\beta \equiv 1 \pmod m$ となる整数である．今，K の Wirtinger 表示を $\langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l \rangle$ とすると，$x_1 = \mu$ と仮定でき，(3.1) は

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong \langle x_1, \ldots, x_l, h \mid r_1, \ldots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle \tag{3.2}$$

と表示できる．結び目群は次の性質を満たす．

補題 3.5. m を 2 以上の自然数とし，K を非自明な結び目でトーラス結び目ではないとする．また，$M_m(K)$ は aspherical であると仮定する．このとき，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心は (3.2) の h が生成する無限巡回群 $\langle h \rangle$ であり，

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})/\langle h \rangle \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$$

は $K^{m,n}$ の不変量である．K が自明な 1 次元結び目のとき，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は $\mathbb{Z}$ と同型であり，その中心と一致する．

証明 . K が自明な 1 次元結び目とすると，任意の m, n に対して $K^{m,n}$ のファイバーは $M_m(K)$ から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体であり，3 次元球体となる．よって $K^{m,n}$ は自明な結び目であり，特に $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は $\mathbb{Z}$ である．

以下 K は非自明でトーラス結び目でないと仮定する．また $M_m(K)$ は aspherical であると仮定する．このとき $\pi_1^{orb}(K, m)$ の中心は自明になることが示せる．

式 (3.2) から，h は $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の元であることは明らかである．$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心が $\langle h \rangle$ であることを示す．今，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の非自明な元 y で，$x_1, \ldots, x_l$ の積で書けるが，$x_1^m, \ldots, x_l^m$ の積では書けないものが存在すると仮定する．このとき，$y x_i y^{-1} x_i^{-1} = 1$ $(i = 1, \ldots, l)$ なので，h も中心の元であることを考慮すると，$y x_i y^{-1} x_i^{-1}$ から 1 に変形する Tietze 変換の列で，h を含まないものが存在する．$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ 内の変換の列は $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の Tietze 変換とワードに $x_1^m, \ldots, x_l^m$ を差し込む操作で得られるので，$y x_i y^{-1} x_i^{-1}$ は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ で自明になる．したがって y は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の中心の元であって，$x_1^m, \ldots, x_l^m$ の積で書けないので非自明である．これは $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の中心が自明になることに矛盾する．以上により $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の非自明な元が存在すれば，それは $x_1^m, \ldots, x_l^m$ の積でかけるが，関係子 $x_1^m h^\beta$ によってその元は h で書ける．よって，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心は $\langle h \rangle$ であり，$h = 1$ を (3.2) に代入すると $\langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l, x_1^m \rangle$ となり，主張は示せた．

□

4　定理 1.1 と定理 1.2 の証明の概略

これまでに紹介した $K^{m,n}$ に関する性質と $M_m(K)$ や $\mathcal{O}(K, m)$ に関する事実を用いて定理 1.1 と定理 1.2 の証明の概略を説明する．

証明 (定理 1.1). 仮定から K_1 と K_2 はトーラス結び目ではないので，双曲結び目かサテライト結び目のいずれかである．K_1 と K_2 の結び目のクラスに分けて証明を行う．

(1) K_1: 自明な結び目，K_2: 非自明な結び目.
$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，それぞれのファイバーは $M_m(K_1)$ と $M_m(K_2)$ から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体であり，基本群 $\pi_1(M_m(K_1))$ と $\pi_1(M_m(K_2))$ は同型になる．$M_m(K_1)$ は S^3 なので，$\pi_1(M_m(K_2))$ は自明な群である．したがって，Poincaré conjecture の解決によって $M_m(K_2)$ も S^3 になる [20, 21, 22]．しかし Smith conjecture の解決によって $M_m(K_2)$ は S^3 になり得ない [18]．したがって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない．

(2) K_1: 双曲結び目，K_2: 双曲結び目.
$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，(1) と同様に $\pi_1(M_m(K_1))$ と $\pi_1(M_m(K_2))$ も同型となる．定理 3.4 によって，Mostow の剛性定理から $m=3$ かつ 8 の字結び目を除いて K_1 と K_2 は同値になる．

今，$m=3$ とし，K_1 を 8 の字結び目，K_2 を 8 の字結び目でない双曲結び目とする．このとき，$M_m(K_1)$ は Hantzsche-Wendt 多様体 と呼ばれる多様体で，断面曲率が常に 0 となるリーマン計量をもつ [15, 27]．$M_m(K_1)$ は T^3 を被覆にもつが，$M_m(K_2)$ は双曲多様体なのでその被覆の基本群は $\pi_1(T^3)$ と同型にならない．よって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない．

(3) K_1: サテライト結び目，K_2: サテライト結び目.
サテライト結び目 K に対して，その補空間の本質的トーラスは $\mathcal{O}(K,m)\setminus K$ 内の本質的トーラスを誘導する．よって $\mathcal{O}(K_1,m)$ と $\mathcal{O}(K_2,m)$ はそれぞれ sufficiently large である．$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，補題 3.5 により $\pi_1(\mathcal{O}(K_1,m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2,m))$ は同型なので，定理 3.3 より K_1 と K_2 は同値である．

(4) K_1: 双曲結び目，K_2: サテライト結び目.
まず $m\geq 3$ または $m=3$ かつ K_1 が 8 の字結び目以外の結び目であるときを考える．$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，補題 3.5 より $\pi_1(\mathcal{O}(K_1,m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2,m))$ は同型である．さらに，K_2 はサテライト結び目なので $\mathcal{O}(K,m)\setminus K$ 内の本質的トーラスを誘導するので，$\pi_1(\mathcal{O}(K_2,m))$ は $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を部分群にもつ．一方，定理 3.4 より $\pi_1(\mathcal{O}(K_1,m))$ は 双曲構造をもつので $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を部分群にもたない．これは矛盾であり，したがって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない．

$m=3$ かつ K_1 が 8 の字結び目のとき，Hantzsche-Wendt 多様体 $M_m(K_1)$ はその基本群の部分群として $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ をもつ．よって，$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，$\pi_1(M_m(K_2))$ も $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を部分群にもつ．3 次元多様体 M で，その基本群の部分群に $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ もつとき，被覆写像 $T^3\to M$ が存在することが知られいている [15]．この被覆写像と m 重分岐被覆の写像の合成によって，$S^3\setminus K$ の本質的トーラスの逆像を考えると，T^3 を 2 つの成分に分解する本質的トーラスが存在する．これは矛盾である．ゆえに $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない． □

証明 (定理 1.2). 1 次元結び目 K が satellite または Conway reducible のとき，$\mathcal{O}(K,m)$ は sufficiently large である．よって，$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると，補題 3.5 により $\pi_1(\mathcal{O}(K_1,m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2,m))$ は同型であって，定理 3.3 より K_1 と K_2 は同値である． □

References

[1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 174–177.

[2] G. Burde and H. Zieschang, *Eine Kennzeichnung der Torusknoten*, Math. Ann. **167** (1966), 169–176.

[3] M. Boileau and J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.

[4] M. Boileau, S. Maillot and J. Porti, Three-dimensional orbifolds and their geometric structures, Panoramas et Synthèses, 15, Société Mathématique de France, Paris, 2003. viii+167 pp.

[5] M. Boileau, B. Leeb and J. Porti, *Geometrization of 3-dimensional orbifolds*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 1, 195–290.

[6] M.W. Davis and J.W. Morgan, *Finite group actions on homotopy 3-spheres*, The Smith conjecture (New York, 1979), 181–225, Pure Appl. Math., 112, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[7] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 63–70.

[8] M. Fukuda, *Gluck twists along 2-knots with periodic monodromy*, arXiv:1811.05109 [math.GT]

[9] M. Fukuda, *Representations of branched twist spins with a non-trivial center of order 2*, arXiv:2209.11583 [math.GT]

[10] M. Fukuda, M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, arXiv:2304.06276v4 [math.GT]

[11] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 2, 371–415.

[12] J.A. Hillman, *The groups of branched twist–spun knots*, arXiv:2305.00443 [math.GT]

[13] R. Jacoby, *One parameter transformation groups on the 3-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. 7(1956), 131–140.

[14] J. Kollár. *Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality?*, Pure Appl. Math. Q., **4** (2) (2008), 203236.

[15] E. Luft, and D. Sjerve, *3-manifolds with subgroups $Z \oplus Z \oplus Z$ in their fundamental groups*, Pacific J. Math. **114** (1984), no. 1, 191–205.

[16] D. Montgomery, C.T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension n–3. I, II*, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517; **5** (1960), 206–211.

[17] D. Montgomery, C.T. Yang, *Differentiable pseudo-free circle actions on homotopy seven spheres*, Proc. of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. Massachusetts, Amherst, Mass., 1971), Part I, Springer, 1972, pp. 41–101. Lecture Notes in Math., **298**.

[18] W. Morgan, H. Bass, *The Smith conjecture*, Papers presented at the symposium held at Columbia University, New York (1979)., Pure and Applied Mathematics, **112**. Academic Press, Orlando, FL (1984), xv+243 pp.

[19] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology, **17** (3) (1978), 291–296.

[20] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159.

[21] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109.

[22] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245.

[23] T. Petrie, *Equivariant quasi-equivalence, transversality, and normal cobordism*, Proc. Int. Cong. Math., Vancouver (1974), 537–541.

[24] F. Raymond, *Classification of the actions of the circle on 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **131** (1968), 51–78.

[25] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Math. **60** (1932), 147–238.

[26] Y. Takeuchi, *Waldhausen's classification theorem for finitely uniformizable 3-orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), no. 1, 151–200.

[27] J.A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney, 1967, xv+408 pp.

[28] E.C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.

Mathematics for Advanced Materials Open Innovation Laboratory, AIST, c/o AIMR,
Tohoku University,
Miyagi 980-8677
JAPAN
E-mail address: `mizuki.fukuda.d2@tohoku.ac.jp`

MathAM-OIL / 東北大学　福田瑞季