BV exactness and computation of the S^1-equivariant cohomology of free loop spaces

若月駿
名古屋大学・多元数理科学研究科

1 Introduction

本稿では，BV 完全性と自由ループ空間の同変コホモロジーの計算方法について，栗林勝彦氏，内藤貴仁氏，山口俊博氏との共同研究 [KNWY21] において得られた結果を解説する．

単連結な位相空間[1]M に対し，その上の自由ループ空間 $LM := \mathrm{Map}(S^1, M)$，すなわち 1 次元球面 S^1 から M への連続写像全体のなす空間 (にコンパクト開位相を入れたもの) を考える．ここで $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の群構造を用いることで，自由ループ空間 LM には S^1 作用 $\rho\colon S^1 \times LM \to LM$; $\rho(t,\gamma)(s) = \gamma(t+s)$ が入る．これにより同変コホモロジー $H^*_{S^1}(LM) := H^*(ES^1 \times_{S^1} LM)$ が定義される．本稿の目的は，通常の特異コホモロジー $H^*(LM)$ と $H^*_{S^1}(LM)$ の関係を**BV 完全性**という新たな概念を用いて調べ，特に $H^*_{S^1}(LM)$ の計算方法を与えることである．

以下，係数環は有理数体 $\mathbb{Q}$ (または標数 0 の体) とし，$H^*(-) := H^*(-;\mathbb{Q})$, $\otimes := \otimes_{\mathbb{Q}}$ などと略記する．

2 BV 完全性と主定理

上述の S^1 作用 $\rho\colon S^1 \times LM \to LM$ を用いて **BV 作用素**[2] $\Delta\colon H^n(LM) \to H^{n-1}(LM)$ を次の合成により定義する:

$$\begin{aligned}\Delta\colon H^n(LM) &\xrightarrow{\rho^*} H^n(S^1 \times LM) \xrightarrow[\cong]{\text{Künneth}} \big(H^1(S^1)\otimes H^{n-1}(LM)\big) \oplus \big(H^0(S^1)\otimes H^n(LM)\big)\\ &\xrightarrow{\text{proj}} H^1(S^1)\otimes H^{n-1}(LM) \cong H^{n-1}(LM)\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ．

補題 2.1. $\Delta \circ \Delta = 0\colon H^n(LM) \to H^{n-2}(LM)$

[1] 特に閉多様体や分類空間 BG などを念頭に置いているが，本稿では一般の単連結 (有限型) 空間で良い．

[2] この名前は BV 代数に由来するものであるが，本稿では (一般の空間を扱っているため) BV 代数全体は扱わず，BV 作用素 Δ のみを単独で扱う．

証明. Δ の定義より，$\Delta \circ \Delta$ は下図における合成 $p_2 \circ (\mathrm{id} \times \rho)^* \circ \rho^*$ を経由する形に書くことができる．

$$\begin{tikzcd}
H^n(LM) \arrow[rr, "\rho^*"] \arrow[d, "\rho^*"] & & H^n(S^1 \times LM) \arrow[d, "(\mathrm{id}\times\rho)^*"] \\
H^n(S^1 \times LM) \arrow[rr, "(\mu\times\mathrm{id})^*"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & & H^n(S^1 \times S^1 \times LM) \arrow[d, two heads, "p_2"] \\
H^2(S^1) \otimes H^{n-2}(LM) \arrow[rr, "\mu^*\otimes\mathrm{id}"] & & H^2(S^1 \times S^1) \otimes H^{n-2}(LM)
\end{tikzcd}$$

ここで，$\mu\colon S^1 \times S^1 \to S^1$ は S^1 の群演算である．S^1 作用の結合性 $\rho\circ(\mu\times\mathrm{id}) = \rho\circ(\mathrm{id}\times\rho)$ および Künneth の定理の自然性から図式は可換なので，$H^2(S^1) = 0$ であることから合成が 0 であることが従う． □

この補題より $\operatorname{Ker}\Delta \supset \operatorname{Im}\Delta$ なので，“コホモロジー” $\operatorname{Ker}\Delta/\operatorname{Im}\Delta$ が非自明になるか，すなわち列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H^n(LM) \xrightarrow{\Delta} H^{n-1}(LM) \xrightarrow{\Delta} \cdots \xrightarrow{\Delta} H^1(LM) \xrightarrow{\Delta} H^0(LM) \to 0$$

が完全かどうかを調べるのは自然な問いである．ただし，単位元 $1 \in H^0(LM)$ がこの “コホモロジー” において非自明な元を与えることが容易に分かるので，被約コホモロジーへの制限 $\tilde{\Delta}\colon \tilde{H}^n(LM) \to \tilde{H}^{n-1}(LM)$ を考えることにする．

定義 2.2 ([KNWY21]). $\operatorname{Ker}\tilde{\Delta} = \operatorname{Im}\tilde{\Delta}$ のとき，M を **BV 完全**という．

BV 完全性は素朴な定義であるが，次の定理から同変コホモロジーの計算に有効な概念であることが分かる．

定理 2.3 ([KNWY21]). *M が BV 完全であれば，次の同型が成り立つ:*

$$H^*_{S^1}(LM) \cong \operatorname{Ker}\tilde{\Delta} \oplus H^*(BS^1)$$

ここで，BS^1 は位相群 S^1 の分類空間であり，$H^*(BS^1)$ は 2 次の元で生成される 1 変数多項式環である．

すなわち，BV 完全な場合には $H^*_{S^1}(LM)$ の計算が $\tilde{H}^*(LM)$ とその上の作用素 $\tilde{\Delta}$ の計算に帰着されるのである．一般には $H^*_{S^1}(LM)$ を計算するためには LM への S^1 作用を空間レベルで扱う必要があるが，BV 完全な場合にはコホモロジーレベルでの作用のみを考えれば良いということである．

また，次の定理から BV 完全な空間の例が非常に豊富であることが分かる．

定理 2.4 ([KNWY21]). *M (の Sullivan モデル) が positive weight を許容するならば，M は BV 完全である．特に，M が formal であれば，M は BV 完全である．*

positive weight や formality の定義については定義 3.4 にて述べるが，例えば等質空間が positive weight を許容する空間の例となっている．

また，コンピュータを活用することで，BV 完全でないような空間の例を発見した．詳細については例 4.1 で述べる．

本稿では詳細は省略するが，[KNWY21] ではさらに BV 完全性の一般化として r-BV 完全性を導入しており，位相空間の新たな階層づけを与えている．これらは巡回ホモロジーにおける周期写像の自明性と関係していることも分かっている．

3 有理ホモトピー論

本節では，有理ホモトピー論の基礎事項，特に Sullivan モデルについて説明する．詳細については [FHT01] を参照されたい．

定義 3.1. 単連結空間 M の **(極小) Sullivan モデル**とは，以下の条件を満たす組 $(\wedge V, d)$ のことである．

- $V = \{V^n\}_{n\geq 2}$ は次数つき $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である．
- $\wedge V$ は，V が生成する自由な次数つき可換代数である．(すなわち，V^{even} が生成する多項式環と V^{odd} が生成する外積代数のテンソル積)
- $(\wedge V, d)$ は Differential Graded Algebra (DGA) をなす．(すなわち，$d\colon \wedge V \to \wedge V$ は線形写像で Leibniz 則 $d(xy) = d(x)\cdot y \pm x \cdot d(y)$ $(x, y \in V)$ を満たす)
- $d(V) \subset \wedge^{\geq 2} V$ が成り立つ．
- DGA の擬同型 $(\wedge V, d) \simeq C^*(M)$ が成り立つ．[3] (特に $H^*(\wedge V, d) \cong H^*(M)$ が成立)

ここで，$C^*(M)$ は M の特異コチェイン代数である．

$v \in V^n$ に対し，n を v の**次数**と言い，$|v| = n$ と書く．また，次数つきベクトル空間 V の (斉次元による) 基底 $v_1, \ldots, v_k$ が与えられているとき，$\wedge(v_1, \ldots, v_k) = \wedge V$ と書く．

例 3.2. 偶数次元球面 S^{2n} の Sullivan モデルは $(\wedge(x, y), d)$ と書ける．ここで，生成元の次数は $|x| = 2n$, $|y| = 4n - 1$ で与えられ，微分 d は $dx = 0$, $dy = x^2$ で定まるものである．このとき $\wedge(x, y)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底は $\{x^k, x^k y\}_{k\in\mathbb{N}}$ で与えられ，微分は Leibniz 則を用いることで以下のように計算できる．

- $d(x^k) = kx^{k-1}\cdot d(x) = 0$
- $d(x^k y) = d(x^k)\cdot y + x^k \cdot d(y) = 0 + x^k \cdot x^2 = x^{k+2}$

よって，鎖複体 $(\wedge(x, y), d)$ を図示すると下図のようになり，そのコホモロジーは $H^*(\wedge(x, y), d) \cong \mathbb{Q}\{1, x\}$ と計算できる．このことから[4]，$(\wedge(x, y), d)$ が S^{2n} の Sullivan モデルであることが分かる．

$$\begin{tikzcd}
\cancel{y} \arrow[drr, mapsto] & \cancel{xy} \arrow[drr, mapsto] & \cancel{x^2y} \arrow[drr, mapsto] & \cancel{x^3y} & \cancel{x^4y} \\
1 & x & \cancel{x^2} & \cancel{x^3} & \cancel{x^4}
\end{tikzcd}$$

単連結空間の有理ホモトピー型の情報は，その Sullivan モデルから完全に復元できることが知られている．特に，自由ループ空間 LM の Sullivan モデルは，次のようにして M の Sullivan モデルから構成することができる．

定理 3.3 ([VPS76], [BVP88])**.** $(\wedge V, d)$ を M の Sullivan モデルとする．$\overline{V}$ を，$\overline{V}^n \coloneqq V^{n+1}$ で定まる次数つきベクトル空間とし，代数 $\wedge V \otimes \wedge \overline{V}$ 上の derivation s, δ を，$s(v) \coloneqq \bar{v}$, $s(\bar{v}) \coloneqq 0$ および $\delta(v) \coloneqq d(v)$, $\delta(\bar{v}) \coloneqq -sd(v)$ により定める．ここで，$\bar{v}$ は $v \in V^{n+1}$ に対応する $\overline{V}^n$ の元である．このとき，次が成り立つ．

[3] 正確には，可換な DGA $A^*_{\mathrm{PL}}(M)$ を用いて $(\wedge V, d) \xrightarrow{\simeq} A^*_{\mathrm{PL}}(M) \simeq C^*(M)$ を要請する

[4] 正確には，ここでも $A^*_{\mathrm{PL}}(S^{2n})$ を用いて DGA の擬同型 $(\wedge V, d) \xrightarrow{\simeq} A^*_{\mathrm{PL}}(S^{2n})$ を構成する必要がある．

(1) $(\wedge V \otimes \wedge \overline{V}, \delta)$ は自由ループ空間 LM の Sullivan モデルである．

(2) $s\colon \wedge V \otimes \wedge \overline{V} \to \wedge V \otimes \wedge \overline{V}$ がコホモロジーに誘導する写像は，$\Delta\colon H^*(LM) \to H^*(LM)$ に一致する．

続いて，formality と positive weight の定義を紹介する．

定義 3.4. $(\wedge V, d)$ を M の Sullivan モデルとする．

- 擬同型 $(\wedge V, d) \simeq H^*(M)$ が成り立つとき，M を **formal** という．
- 次数つきベクトル空間の直和分解 $V = \bigoplus_{k>0} V_{(k)}$ が存在して $d(V_{(k)}) \subset (\wedge V)_{(k)}$ を満たすとき，M (の Sullivan モデル) が **positive weight を許容する**という．

M が formal であれば，$C^*(M)$ ではなく $H^*(M)$ から M の Sullivan モデルが計算できることになる．その意味で，formal な空間は「単純」な空間であると言える．また，positive weight がその一般化であることが次の定理から分かる．

定理 3.5 ([HS79])**.** M が formal であれば，M は positive weight を許容する．

以下のように，formal な空間や positive weight を許容する空間は豊富に存在する．

例 3.6.

- [DGMS75] コンパクト Kähler 多様体は formal である．
- 等質空間は 2-stage の Sullivan モデルを持つため，positive weight を許容する．しかし，一般には formal とは限らない．

4 主定理の証明と BV 完全でない例

Section 2 で与えた定理の証明の概略を述べる．

定理 *2.3* の証明. [VB85] により，$ES^1 \times_{S^1} LM$ の Sullivan モデルは $(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \overline{V}, D)$ と書ける．ここで，$|u| = 2$ であり，微分 D は定理 3.3 の s と δ を用いて $D(u) \coloneqq 0$ および $v \in V$ に対して $D(v) \coloneqq \delta(v) + us(v)$, $D(\bar{v}) \coloneqq \delta(\bar{v})$ で定まる derivation である．このとき $(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \overline{V}, D)$ は，一方の微分が δ，もう一方の微分が us であるような二重複体 (の全鎖複体) とみなすことができ，二重複体のホモロジー代数の議論により定理 2.3 は証明される． $\square$

定理 *2.4* の証明. 写像 $L, e\colon \mathrm{Der}(\wedge V) \to \mathrm{Der}(\wedge V \otimes \wedge \overline{V})$ を，$\theta \in \mathrm{Der}(\wedge V)$ および $v \in V$ に対して $L_\theta(v) \coloneqq \theta(v)$, $L_\theta(\bar{v}) \coloneqq \pm s\theta(v)$ と $e_\theta(v) \coloneqq 0$, $e_\theta(v) \coloneqq \pm\theta(v)$ により定める．このとき "Cartan の公式" $L_\theta = s \circ e_\theta \pm e_\theta \circ s$ が成立するので，$H^*(L_\theta)(\mathrm{Ker}\, H^*(s)) \subset \mathrm{Im}\, H^*(s)$ となることが分かる．特に θ として weight を掛ける写像をとると，weight が positive であることと標数が 0 であることから $H^*(L_\theta)(\mathrm{Ker}\, H^*(s)) = \mathrm{Ker}\, H^*(s)$ となる．よって $\mathrm{Ker}\, H^*(s) \subset \mathrm{Im}\, H^*(s)$，すなわち $\mathrm{Ker}\, H^*(s) = \mathrm{Im}\, H^*(s)$ となることが分かる． $\square$

続いて，BV 完全でない例について述べる．

例 4.1 ([AL00], [KNWY21]). Sullivan 代数 $(\wedge V, d) \coloneqq (\wedge(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d)$ を次で定める:

- $|x_1| = 10$, $|x_2| = 12$, $|y_1| = 41$, $|y_2| = 43$, $|y_3| = 45$, $|z| = 119$
- $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $dy_1 = x_1^3 x_2$, $dy_2 = x_1^2 x_2^2$, $dy_3 = x_1 x_2^3$, $dz = x_2(y_1 x_2 - x_1 y_2)(y_2 x_2 - x_1 y_3) + x_1^{12} + x_2^{10}$

また位相空間 M を，その Sullivan モデルが $(\wedge V, d)$ となるようなものとしてとる．M は次元 228 の Poincaré 双対性を満たし，基本類として $\omega \coloneqq x_1^{14} y_2 y_3 - x_1^{13} x_2 y_1 y_3 + x_1^{12} x_2^2 y_1 y_2$ が取れる．このとき明らかに $[\omega] \notin \operatorname{Im} \tilde{\Delta}$ だが，下記の元 α により $\tilde{\Delta}[\omega] = [s\omega] = [d\alpha] = 0$，すなわち $[\omega] \in \operatorname{Ker} \tilde{\Delta}$ となることが分かる．よってこの空間 M は BV 完全ではない．

$$
\begin{aligned}
\alpha \coloneqq &- 1380 x_1^{11} x_2^6 \bar{y_3} - 5290 x_1^{11} x_2^5 y_3 \bar{x_2} - 114 x_1^{10} y_1 y_2 \bar{y_2} + 114 x_1^{10} y_1 y_3 \bar{y_1} - 114 x_1^9 x_2 y_1 y_2 \bar{y_1} \\
&+ \frac{93}{2} x_1^2 y_2 y_3 \bar{z} + x_1^2 y_2 z \bar{y_3} - x_1^2 y_3 z \bar{y_2} + 114 x_1 x_2^7 y_2 y_3 \bar{y_3} - \frac{93}{2} x_1 x_2 y_1 y_3 \bar{z} - x_1 x_2 y_1 z \bar{y_3} \\
&- 114 x_1 x_2 y_2 z \bar{y_2} + 115 x_1 x_2 y_3 z \bar{y_1} + 113 x_1 y_1 y_3 z \bar{x_2} + 572 x_1 y_2 y_3 z \bar{x_1} + 115 x_2^9 \bar{z} \\
&- 114 x_2^8 y_1 y_3 \bar{y_3} + 114 x_2^8 y_2 y_3 \bar{y_2} + 1150 x_2^8 z \bar{x_2} + \frac{93}{2} x_2^2 y_1 y_2 \bar{z} + 115 x_2^2 y_1 z \bar{y_2} \\
&- 115 x_2^2 y_2 z \bar{y_1} - 340 x_2 y_1 y_2 z \bar{x_2} - 229 x_2 y_1 y_3 z \bar{x_1}
\end{aligned}
$$

この α は到底手計算で発見できるものではなく，筆者が作成したソフトウェア [Wak] の活用により得られた成果である．

5　ソフトウェア Kohomology について

筆者は有理ホモトピー論における具体例の計算を効率的に行うために，ソフトウェア Kohomology [Wak] を開発した．プログラミング言語 Kotlin[5] により書かれており，以下の 2 つの方法で利用できる．

- スマートフォン･PC などのブラウザからウェブサイト `https://shwaka.github.io/kohomology/calculator`[6] にアクセスする．
- Kotlin や Java のプログラムを書き，その中から Kohomology を呼び出す．

空間 M の Sullivan モデル $(\wedge V, d)$ が与えられたとき，上記のウェブサイトでは以下のものが計算できる．

- コホモロジー $H^*(\wedge V) \cong H^*(M)$
- 自由ループ空間のコホモロジー $H^*(\wedge V \otimes \wedge \overline{V}) \cong H^*(LM)$
- 自由ループ空間の同変コホモロジー $H^*(\wedge u \otimes \wedge V \otimes \wedge \overline{V}) \cong H^*_{S^1}(LM)$
- 自己ホモトピー同値のなす空間のホモトピー群 $H^*(\mathrm{Der}(\wedge V)) \cong \pi_{-*}(\mathrm{aut}_1(M))$
- イデアル $I \subset \wedge V$ に対して，コホモロジー $H^*(\wedge V/I)$ と，$(\wedge V/I, d)$ の極小 Sullivan モデル

[5] Java を現代的な視点から改善したプログラミング言語

[6] 計算はサーバーではなく，このウェブサイトを閲覧している端末で行われるため，複雑な計算をする際にはバッテリーの消費などに注意が必要である．

また，ウェブサイトではなくプログラムから Kohomology を呼び出す場合には，更に以下のような計算を行うこともできる上に，計算速度もウェブサイトより大幅に高速なものとなる．

- Sullivan モデルの間の DGA の準同型を扱う
- 全射擬同型に沿って準同型をリフトする
- $H^*(\wedge V)$ の元の和や積を計算する
- 線形写像の Im や Ker を計算する (特にこれが例 4.1 における α の発見において重要な役割を果たした)

References

[AL00] M. Arkowitz and G. Lupton. Rational obstruction theory and rational homotopy sets. **Math. Z.**, 235(3):525–539, 2000.

[BVP88] D. Burghelea and M. Vigué Poirrier. Cyclic homology of commutative algebras. I. Algebraic topology, rational homotopy, Proc. Conf., Louvain-la-Neuve/Belg. 1986, Lect. Notes Math. 1318, 51-72 (1988)., 1988.

[DGMS75] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan. Real homotopy theory of Kähler manifolds. **Invent. Math.**, 29:245–274, 1975.

[FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. **Rational homotopy theory**, volume 205 of **Graduate Texts in Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 2001.

[HS79] S. Halperin and J. Stasheff. Obstructions to homotopy equivalences. **Adv. Math.**, 32:233–279, 1979.

[KNWY21] K. Kuribayashi, T. Naito, S. Wakatsuki, and T. Yamaguchi. A reduction of the string bracket to the loop product. arXiv:2109.10536, 2021. to appear in Algebr. Geom. Topol.

[VB85] M. Vigué-Poirrier and D. Burghelea. A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces. **J. Differ. Geom.**, 22:243–253, 1985.

[VPS76] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan. The homology theory of the closed geodesic problem. **J. Differ. Geom.**, 11:633–644, 1976.

[Wak] S. Wakatsuki. kohomology. `https://shwaka.github.io/kohomology`.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Furocho, Chikusaku, Nagoya, Aichi, 464-8602
JAPAN
E-mail address: `shun.wakatsuki@nagoya-u.ac.jp`

名古屋大学・多元数理科学研究科　若月駿