On a projection theorem on Delzant polytopes via toric geometry

日本女子大学理学部
藤田玄
Hajime Fujita
Faculty of Natural Science,
Japan Women's University

1 概要

本稿は 2024 年度 RIMS 共同研究「変換群論とその進展」における筆者の講演内容に基づいたものである.

昨年度の RIMS 共同研究「変換群の幾何とトポロジー」において, 筆者は Delzant 多面体の内部に定まる双対平坦構造および付随するダイバージェンスに対する Pythagoras の定理のトーリック幾何を用いた境界への拡張について講演した ([3, 4]). 本稿では, その続編としてダイバージェンスに対する射影定理の境界への拡張について議論する.

双対平坦構造あるいは Hesse 構造は, Riemann 多様体のアファイン接続とその計量に関する双対接続であってそれらの曲率も捩れも消えているものである. 情報幾何学や数理統計における重要な対象である指数型分布族などは自然な双対平坦構造をもつことが知られており, 統計的推測や機械学習などの数理的側面に幾何学的な理解を提供してきた. 双対平坦構造における計量は (局所的には)Hesse 計量, つまり滑らかな関数の Hessian で記述される. 逆に, アファイン空間の領域上の滑らかな狭義凸関数の Hessian と自明平坦接続により双対平坦構造が定義でき, その凸関数はポテンシャル関数と呼ばれる. 双対平坦構造に付随して, (Bregman) ダイバージェンスという 2 変数関数が定義される. ダイバージェンスは Riemann 計量に付随する距離関数の 2 乗の一般化であり, その Pythagoras の定理は最尤推定の理論などで有用となる. ダイバージェンスに対する射影定理は Pythagoras の定理と並ぶ基本的な性質であり, 最尤推定の解を与える em/EM アルゴリズムの理論で重要となる.

謝辞. 講演の機会を与えて下さった世話人の津山高専の田村俊輔さんに感謝申し上げます.

本研究は科研費 (課題番号 18K03288) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 53B12, 53D20, 53C55
キーワード : dually flat structure, Bregman divergence, Delzant polytope, toric Kähler manifold, projection theorem

2 凸多面体上の双対平坦構造と Bregman ダイバージェンス

本節では, Euclid 空間内の凸多面体上の双対平坦構造およびダイバージェンスについて説明する. さらに Pythagoras の定理および射影定理の主張を述べる.

$\mathbb{R}^n$ 上の連立線形不等式

$$l^{(i)}(\cdot) = \langle \nu^{(i)}, \cdot \rangle + \lambda^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

により定義される凸多面体 P を考える. ただし, N は P の $n-1$ 次元面の数であり, $\nu^{(i)} \in (\mathbb{R}^n)^*$ は面の内向き法ベクトル, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ と $\mathbb{R}^n$ の自然なペアリング, $\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}$ とする. また, P の内点全体の集合 P° は空でないとする. P° 上のなめらかな関数 $\varphi_P : P^\circ \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_P(\xi) := \sum_{i=1}^{N} l^{(i)}(\xi) \log l^{(i)}(\xi) \quad (\xi \in P^\circ)$$

により定義し, **Guillemin ポテンシャル** [*1]という. φ_P は P° 上の滑らかな凸関数であることから次がわかる.

補題 2.1. φ_P の Hessian $\mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}})$ は P° 上の Riemann 計量を定める. その計量と $\mathbb{R}^n$ の標準平坦接続の制限の組により P° 上の双対平坦構造が定まる.

P の各定義方程式 $l^{(i)}$ には正の定数倍による不定性があり, それにより φ_P にも 1 次関数による不定性が生じるが, Hessian ではその不定性は消えることに注意する. ここで, 双対平坦構造/多様体とは平坦 Riemannn 多様体のある種の一般化である次のものであった.

定義 2.2. 組 (X, h, ∇, ∇^*) が**双対平坦多様体である**とは, X は滑らかな多様体, h はその Riemann 計量, ∇ は接束 TX の接続, ∇^* は計量 h に関する双対接続で, ∇ と ∇^* の曲率および捩れが 0 となるもののことである. また, (h, ∇) あるいは (h, ∇^*) を X 上の**双対平坦構造**という.

以下, 凸多面体の Guillemin ポテンシャルから定まる双対平坦多様体のみ考えることにする. ただし, ∇^* を標準平坦接続, ∇ を計量 $\mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}})$ に関するその双対接続とする.

定義 2.3. 凸多面体 P とその Guillemin ポテンシャル φ_P に対して, その **(Bregman) ダイバージェンス** $D_P : P^\circ \times P^\circ \to \mathbb{R}$ が

$$D_P(\xi, \xi') := \langle \xi - \xi', (\mathrm{grad}\varphi_P)(\xi') \rangle - (\varphi_P(\xi') - \varphi_P(\xi))$$

により定義される. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積である. φ_P の Legendre 変換 ψ_P を

[*1] 本来は P が Delzant 多面体であるときにこう呼ばれるが, ここでは一般の P に対してもこう呼ぶことにする. また, オリジナルの定義では $\frac{1}{2}$ 倍がついているがここでは省略する.

用いて

$$D_P(\xi,\xi') = \varphi_P(\xi) + \psi_P(\xi') - \langle \xi, \xi' \rangle$$

と定義することもできる.

次の 2 つは応用上も重要となるダイバージェンスに関する基本定理である.

定理 2.4 (Pythagoras の定理, [2]). 定義 2.3 の設定において, $\xi, \xi', \xi'' \in P^\circ$ に対して, ξ と ξ' をつなぐ ∇-測地線と ξ' と ξ'' をつなぐ ∇^*-測地線が存在してそれらが ξ' において直交するとき,

$$D_P(\xi,\xi'') = D_P(\xi,\xi') + D_P(\xi',\xi'')$$

が成立する.

定理 2.5 (射影定理, [2]). 定義 2.3 の設定において, S を P° の部分多様体とする. $\xi \in P^\circ$ を固定し, 関数 $f_\xi : S \to \mathbb{R}$ を

$$f_\xi(\xi') := D_P(\xi,\xi') \quad (\xi' \in S)$$

により定義する. $\xi' \in S$ と ξ をつなぐ ∇-測地線が存在するとき, その測地線が ξ' において S と直交することと ξ' が f_ξ の臨界点を与えることとは同値である.

注意 2.6. Pythagoras の定理と射影定理は一般の双対平坦多様体とそのダイバージェンスに対して成立する.

3 凸多面体上の双対平坦構造とダイバージェンスの境界への拡張

凸多面体 P とその Guillemin ポテンシャル φ_P から決まる双対平坦構造はアプリオリには内部 P° で定義されている. しかし, φ_P は P の境界にも連続的に拡張できることがその定義式からわかる. F を P の k 次元面 $(0 \le k \le n)$ の一つとする. 簡単のため F は $n-k$ 個の方程式

$$l^{(1)}(\xi) = \cdots = l^{(n-k)}(\xi) = 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

で定義されており, F の相対内部 F° は

$$l^{(n-k+1)}(\xi) > 0, \ldots, l^{(n)}(\xi) > 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

となる点であるとする. 関数 $\varphi_F : F^\circ \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_F(\eta) := \sum_{i=n-k+1}^{n} l^{(i)}(\eta) \log l^i(\eta) \quad (\eta \in F^\circ)$$

により定義する.

補題 3.1. $\varphi_F : F^\circ \to \mathbb{R}$ は F° 上の滑らかな凸関数である. 特にその Hessian $\mathrm{Hess}(\varphi_F)$ により F° 上に双対平坦構造が定義できる.

こうして定義された双対平坦構造に関して D_P と同様にして F° 上のダイバージェンス

$$D_F : F^\circ \times F^\circ \to \mathbb{R}$$

が定義できる. D_P と D_F の間には次の連続性が成り立つ.

命題 3.2. 任意の $\eta, \eta' \in F^\circ$ に対して

$$\lim_{P^\circ \ni \xi' \to \eta'} \lim_{P^\circ \ni \xi \to \eta} D_P(\xi, \xi') = D_F(\eta, \eta')$$

が成り立つ.

注意 3.3. (1) [3] および [4] においては, P が Delzant 多面体のときのみ命題 3.2 を述べたが, 実際は一般の凸多面体で成立する.
(2) 順序を逆にして先に極限 $\lim_{P^\circ \ni \xi \to \eta} D_P(\xi, \xi')$ を考えると, これは一般には収束しない. 特に, D_P は 2 変数関数としては境界までは拡張できない.

この連続性により次のようにして境界点と内部の点の間のダイバージェンスが定義できる.

定義 3.4. 上の設定において, $D'_F : F^\circ \times P^\circ \to \mathbb{R}$ が

$$D'_F(\eta, \xi') := \lim_{P^\circ \ni \xi \to \eta} D_P(\xi, \xi') \quad (\eta \in F^\circ, \xi' \in P^\circ)$$

により定義できる.

この D'_F を用いて, 境界点も含めた形でダイバージェンスの 2 つの基本定理が拡張できないか問うことは自然であろう. この問に対して, P が Delzant 多面体であるときにトーリック幾何の性質を用いた Pythagoras の定理の拡張が [3] および [4] での主結果であった. もう一つの基本定理である射影定理についての議論が本稿の中心内容である. 次節では ([4] と重複する内容であるが)Delzant 多面体と付随するトーリック Kähler 多様体の必要事項についてまとめておく.

4 Delzant 多面体, トーリック Kähler 多様体と Guillemin-Abreu 理論

本稿ではトーリック多様体はトーリックシンプレクティック多様体をさす. つまり, $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω)[*2]がトーリック多様体であるとは, (M, ω) に n 次元コンパクトトーラス T の効果的な Hamiltonian トーラス作用があることである. 正確には (M, ω) と T 作用と運動量写像の組をトーリック多様体という. このとき, 運動量写像による M の像 P は Delzant 多面体となる. つまり, P は単純 (各頂点には n 本の辺がある), 有理的 (各頂点の辺の方向ベクトルは $\mathbb{Q}$-ベクトルでとれる), 非特異 (各頂点に集ま

[*2] 明示的には述べないが基本的には M のコンパクト性を仮定する.

る方向ベクトルは $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$) の基底でとれる), である. 逆に, ある種のシンプレクティック商の手続きである Delzant 構成により, 与えられた Delzant 多面体を運動量写像の像にもつトーリック多様体が構成できる. こうしてトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体の間に 1 対 1 対応 [*3]が得られる.

シンプレクティック商による構成をみると, Delzant 多面体 P に対するトーリック多様体 M にはトーラス不変な Kähler 構造が入ることがわかる. Guillemin, Abreu によるその Riemann 計量の記述を [1] に基づいて述べる. P を n 次元の Delzant 多面体, $\mu : M \to P$ を Delzant 構成により対応するシンプレクティック多様体とその運動量写像とする. P の内部 P° の任意の点 ξ の逆像 $\mu^{-1}(\xi)$ はトーラス作用による自由軌道になり, 逆像 $M^\circ := \mu^{-1}(P^\circ)$ は自由軌道の和集合に一致する. P° の凸性から M° には主 T-束としての自明化が存在する. P の Guillemin ポテンシャル φ_P を考える.

定理 4.1 ([1][5])**.** 主 T-束の自明化 $M^\circ \cong P^\circ \times T$ を適切にとると, この分解のもとで Delzant 構成により定義される M 上の Kähler 構造の Riemann 計量は

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}})^{-1} \end{pmatrix}$$

と表示できる.

さらに, M 上の任意のトーラス不変 Kähler 構造の Riemann 計量について, シンプレクティックポテンシャルとよばれる関数 $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ が存在し, その Hessian で Riemann 計量が記述および分類されることが [1] において示されている. P 上のシンプレクティックポテンシャル φ により P° 上の双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla)$, さらに付随するダイバージェンス $D_{P,\varphi} = D : P^\circ \times P^\circ \to \mathbb{R}$ も定まる.

5 境界点も含めた射影定理に向けて

P を n 次元 Delzant 多面体, $\mu : M \to P$ をコンパクトトーラス T による Hamilton 作用をもつトーリック多様体とその運動量写像とする. P° を P の内部, $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ をシンプレクティックポテンシャルとすると, P° 上の双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla)$ とその Bregman ダイバージェンス D_P が, また Guillemin-Abreu 理論により, M には Kähler 計量が定まるのであった. 次に, F を P の k 次元面とすると, トーリック幾何の一般論より次がわかる.

- 逆像 $M_F := \mu^{-1}(F)$ は M の複素 k 次元の Kähler 部分多様体となる.
- F の法ベクトルたちが生成する T の部分トーラス $T_F^\perp$ は M_F を固定する部分トーラスに一致し, その商トーラス $T_F := T/T_F^\perp$ の作用は M_F に $2k$ 次元のトーリック多様体の構造を与える .

[*3] 正確には (弱) 同変同型類と平行移動 (あるいは整アファイン変換) による同値類を考える.

- その運動量写像を $\mu_F : M_F \to P_F$ とすると, P_F と F には誘導準同型写像 $\mathrm{Lie}(T)^* \leftarrow \mathrm{Lie}\left(T/T_F^{\perp}\right)^*$ が定める自然な同一視がある.
- P のシンプレクティックポテンシャル φ の F への制限は P_F のシンプレクティックポテンシャル φ_F を与える.
- M_F の Kähler 構造は Guillemin-Abreu 理論により φ_F から定まるものに一致する.

こうして, P_F° 上の双対平坦構造およびダイバージェンスが定まる. それは同一視 $P_F \cong F$ のもとで, 第 3 節で構成したものに本質的に一致する. 以上の準備のもとで, 境界におけるある種の射影定理を述べる.

定理 5.1. S を F° の部分多様体とし, $\xi \in P^\circ$ を固定し関数 $f_\xi : S \to \mathbb{R}$ を

$$f_\xi(\eta) := D'_F(\eta, \xi) = \lim_{\xi' \to \eta} D_P(\xi', \xi) \quad (\eta \in S)$$

により定義する. $\eta \in S$ に対して ∇-測地線 $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to P^\circ$ が存在して次をみたすと仮定する.

1. $\gamma_\xi(0) = \xi \in P^\circ$.
2. $\lim_{t\to\infty} \gamma_\xi(t) = \eta \in S$.
3. γ_ξ の $\mu : M^\circ \to P^\circ$ に関する水平持ち上げ $\tilde{\gamma}_\xi$ に対して極限 $\tilde{v}_\infty := \lim_{t\to\infty} t\dot{\tilde{\gamma}}_\xi(t)$ が $\tilde{\eta} := \lim_{t\to\infty} \tilde{\gamma}_\xi(t) \in M_F$ における M の接ベクトルとして存在する.

このとき, $\eta \in S$ が f_ξ の臨界点であることと, 任意の $v \in T_\eta S$ に対してその水平持ち上げ $\tilde{v} \in T_{\tilde{\eta}} M_F$ と $\tilde{v}_\infty$ が直交することは同値である.

定理 5.1 の結論と仮定についていくつか注意を述べる.

通常の射影定理の結論には部分多様体と測地線の直交性が条件として現れるが, Riemann 計量 $\mathrm{Hess}(\varphi)$ は P までは拡張できないため, 部分多様体 S が境界に含まれている場合その直交性を述べることができない. そこで定理 5.1 では M_F が M に等長的に埋め込まれていることを用いて $F \subset P$ を $M_F \subset M$ に持ち上げるという定式化をとっている.

仮定の条件 3. は現状では証明に必要なためおいた技巧的なもので本質的ではないと思われる. 一方, 次節で述べる例をみるとこの条件は常に満たされている可能性もある. さらに, (少なくとも Guillemin ポテンシャル φ_P を用いた設定では)$\tilde{v}_\infty$ と $\tilde{v}$ の直交性も自動的に満たされ, したがって特に測地線の終点が常に f_ξ の臨界点になっているという可能性もある. 例えば [6, 7] では, ミラー対称性の SYZ 構成との関係で $\mathrm{Lie}(T)$ のある種のアファイン部分空間が定めるトーリック多様体あるいは Delzant 多面体の部分多様体のコンパクト化を考察しており, その計算を見ると少なくとも $M = \mathbb{C}P^n$ の場合に上述のような直交関係が非常に一般的に成り立っていることが示唆される. なお, ∇-測地線は 1 次元アファイン部分空間に対応する. 以上の点は今後検証および改善の余地がある.

6 例：直角二等辺三角形と $\mathbb{C}P^2$

定理 5.1 が成立している具体例を述べて本稿を終える．

2 次元 Delzant 多面体 P として $\xi_1\xi_2$ 平面において

$$\xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq 0,\ 1-\xi_1-\xi_2 \geq 0$$

で定義される直角二等辺三角形を考える．この P は 3 点集合上の確率密度関数族 (混合型分布族) をパラメトライズする双対平坦多様体を定める．P にはトーリック多様体 $M = \mathbb{C}P^2$ が対応し, Guillemin ポテンシャル

$$\varphi_P(\xi) = \xi_1 \log \xi_1 + \xi_2 \log \xi_2 + (1-\xi_1-\xi_2)\log(1-\xi_1-\xi_2)$$

から定まる Kähler 計量は Fubini-Study 計量である．このとき,

$$\mathrm{Hess}(\varphi_P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{1-\xi_1-\xi_2} \\ \frac{1}{1-\xi_1-\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{pmatrix},$$

となり, ダイバージェンス $D_P : P^\circ \times P^\circ \to \mathbb{R}$ は $\xi = (\xi_1, \xi_2), \xi' = (\xi_1', \xi_2')$ に対して

$$D_P(\xi, \xi') = \xi_1 \log \frac{\xi_1}{\xi_1'} + \xi_2 \log \frac{\xi_2}{\xi_2'} + (1-\xi_1-\xi_2) \log \frac{1-\xi_1-\xi_2}{1-\xi_1'-\xi_2'}$$

となる．P の面 F として $\xi_1+\xi_2 = 1$ で定義されるものをとる．F の逆像 $M_F = \mu^{-1}(F)$ は $\mathbb{C}P^2$ の斉次座標 $[z_1 : z_2 : z_3]$ において $z_3 = 0$ で定義され, Fubini-Study 計量を入れた $\mathbb{C}P^1$ と Kähler 多様体として同型である．$\xi = (a,b) \in P^\circ$ に対して $f_\xi : F^\circ \to \mathbb{R}$ は

$$f_\xi(\eta) = D_F'(\eta, \xi) = \eta \log \frac{\eta}{a} + (1-\eta)\log\frac{1-\eta}{b} \quad (\eta = (\eta, 1-\eta) \in F^\circ)$$

となり, $df_\xi = 0$ を解くと臨界点が $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right) \in F^\circ$ となることがわかる．

次に, $\xi = (a,b) \in P^\circ$ から初速度 $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ で延びる $(\nabla^{\mathrm{flat}})^*$-測地線 γ_ξ を求めると

$$\gamma_\xi(t) = \left(\frac{ae^{tv_1}}{1-a-b+ae^{tv_1}+be^{tv_2}}, \frac{be^{tv_2}}{1-a-b+ae^{tv_1}+be^{tv_2}} \right)$$

となることがわかる．この測地線は $v_1 = v_2 > 0$ のときのみ F° の点 $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$ に収束する．この収束先は f_ξ の臨界点に他ならない．この測地線を切断 $s : P \to M,\ s(\xi_1, \xi_2) = [\sqrt{\xi_1} : \sqrt{\xi_2} : \sqrt{1-\xi_1-\xi_2}]$ を用いて持ち上げると

$$\tilde{\gamma}_\xi(t) = [\sqrt{a}e^{\frac{tv_1}{2}} : \sqrt{b}e^{\frac{tv_1}{2}} : \sqrt{1-a-b}] = [\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{1-a-b}e^{-\frac{tv_1}{2}}]$$

となり, 定理 5.1 の仮定の条件 3. について $\tilde{\eta} = [\sqrt{a} : \sqrt{b} : 0]$, $\tilde{v}_\infty = 0$ となることがわかる．

以上により, この例において $v_1 = v_2 > 0$ のときは定理 5.1 の仮定がすべて満たされていることと結論が成り立っていることが確認できた．なお, $v_1 \neq v_2$ のときは γ_ξ は三角形の他の辺や頂点に収束し同様の結論が成立する．

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 2003, pp. 1-24.

[2] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016).

[3] H. Fujita, *The generalized Pythagorean theorem on the compactifications of certain dually flat spaces via toric geometry*, Inf. Geom., Vol.7, 33-58, (2024).

[4] 藤田玄, Torification of dually flat manifolds and its application, RIMS 講究録, No.2276 (2023), 45-52.

[5] V. Guillemin, *Kähler structures on toric varieties*, J. Differential Geom.40(1994), no.2, 285-309.

[6] K. Yamaguchi, *Submanifolds with boundary and corners in Delzant polytopes associated to affine subspaces*, arXiv:2402.16884.

[7] K. Yamaguchi, *Torus-equivariantly embedded toric manifolds associated to affine subspaces*, arXiv:2306.15312.