ループ演算と非可換微分幾何

東京大学数理科学研究科　谷口 東曜
Toyo Taniguchi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

本稿は, 拙論文 [Tan24] およびそれに基づいた, RIMS 共同研究集会「変換群論とその進展」での発表の要約である. 有向曲面に対して定まる Turaev 余括弧積と, その代数的な解明に現れる発散写像, さらにそれを理解する枠組みとして非可換微分幾何における接続の理論との関連について説明する.

1　Turaev 余括弧積

Σ を連結な有向曲面とし, 境界は空でなくてもよいものとする. $\pi = \pi_1(\Sigma)$ をその基本群とし, 体 $\mathbb{K}$ 上の群環 $\mathbb{K}\pi$ を考える. この cyclic quotient $|\mathbb{K}\pi| := \mathbb{K}\pi/[\mathbb{K}\pi, \mathbb{K}\pi]$ は線型空間として π の共役類の生成する空間に同型であり, したがって曲面 Σ 上の自由ループのホモトピー類のなす空間とみなせる. ここで, $|\mathbb{K}\pi|$ 上の位相的に定まる演算として Turaev 余括弧積というものがあり, ここでの主な研究対象である.

定義 1. 1 を定値ループとする. $\mathbb{K}$-線型写像 $\delta\colon |\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}| \to |\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}|^{\otimes 2}$ を次のように定める. まず, はめ込まれた閉曲線 $\alpha\colon [0,1]/\{0,1\} \to \Sigma$ であって, 一般の位置にある (つまり交差は横断的二重点である) ものに対し,

$$\delta(\alpha) = \sum_{\substack{t_1 \neq t_2 \in [0,1] \\ \alpha(t_1)=\alpha(t_2)}} \mathrm{sign}(\alpha; t_1, t_2)\, \alpha|_{[t_1,t_2]} \otimes \alpha|_{[t_2,t_1]}\,,$$

とする. ここで $\mathrm{sign}(\alpha; t_1, t_2)$ は曲面の向きから定まる局所交点数 ($+1$ または -1) である.

これが well-defined であることは Turaev による.

定理 2 (Theorem 8.3, [Tur91])**.** 上の δ は代表元の取り方によらず, また $|\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}|$ 上の Lie 余代数の構造を定める.

定値ループ $\mathbf{1}$ で割っているところは, framing を用いることで回避できることが Alekseev–河澄–久野–Naef により示された [AKKN23]. 以降しばらく Σ はコンパクトであり, 境界は空でないものとする.

定義-定理 3 (Proposition 2.6, [AKKN23]). fr を Σ 上のベクトル場とし, 各点で 0 でないものとする. このとき, $\delta^{\mathsf{fr}}\colon |\mathbb{K}\pi| \to |\mathbb{K}\pi|^{\otimes 2}$ を, 上の公式において代表元 α を fr について回転数が 0 となるものを用いて定める. このとき, δ^{fr} は $|\mathbb{K}\pi|$ 上の Lie 余代数の構造を定める.

Turaev 余括弧積が位相的に定まっていることより, これには写像類群が δ^{fr} を (framing の項を除き) 保つように作用している. そこで, 写像類群の研究のために δ^{fr} を代数的に分かりやすく書き表すことが問題になるが, それも [AKKN23] において解明され, そこに現れるのが発散写像 (divergence map) である.

2 発散写像

Turaev 余括弧積と発散写像の関係を述べるために準備をする. テンソル積は指定のない限り $\mathbb{K}$ 上で取ることとし, 全ての写像は $\mathbb{K}$-線型とする.

定義 4. A を $\mathbb{K}$-代数とする.

- $|A| = A/[A, A]$ とおき, これを A の trace space という.
- $A \otimes A$ には左右から A が掛け算で作用する. すなわち, $a \cdot (x \otimes y) \cdot b = ax \otimes yb$ とする.
- A 上の derivation とは, $f\colon A \to A$ であって Leibniz 則
$$f(ab) = f(a)b + af(b)$$
を満たすものである. これの全体を $\mathrm{Der}(A)$ とおく. このとき $f\colon |A| \to |A|$ が自然に定まる.
- A 上の double derivation とは, $\theta\colon A \to A \otimes A$ であって Leibniz 則
$$\theta(ab) = \theta(a) \cdot b + a \cdot \theta(b)$$
を満たすものである. これには上で定義した作用を用いる.

さて, 仮定より Σ は適当な整数 g, n を用いて種数 g, 境界成分が n 個の有向曲面 $\Sigma_{g,n}$ と同相である. すると, $N = 2g + n$ とおいて π は抽象的には有限生成自由群 F_N に同型であるから, 境界上に基点 $*$ をとり, π の単純閉曲線による自由生成系 $\mathcal{C} = (\gamma_i)_{1 \le i \le N}$ を,
$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) \cdots (\gamma_{2g-1}\gamma_{2g}\gamma_{2g-1}^{-1}\gamma_{2g}^{-1})\gamma_{2g+1} \cdots \gamma_{2g+n}$$
が基点のある境界の定める基本群の元になるようにとる. この生成系により同一視 $\mathbb{K}\pi \cong \mathbb{K}F_N$ があるので, 以降これを固定する. そこで, $1 \le i \le N$ について $\mathbb{K}F_N$ 上の double derivation ∂_i を
$$\partial_i(\gamma_j) = \begin{cases} 1 \otimes 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$
で定める.

定義 5. 生成系 $\mathcal{C}$ に付随する発散写像 $\mathrm{Div}^{\mathcal{C}}\colon \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi) \to |\mathbb{K}\pi|^{\otimes 2}$ を,
$$\mathrm{Div}^{\mathcal{C}}(f) = \sum_{1 \le i \le N} |\partial_i(f(\gamma_i)) - 1 \otimes f(\gamma_i)\gamma_i^{-1}|$$

で定める.

これは, たしかにベクトル場の発散と似た形をしている. 写像類群の文脈, とくに Johnson の理論において, これは森田トレース ([Mor93]) ならびに榎本–佐藤トレース ([ES14]) と呼ばれる写像と深く関係することが分かっており, [AKKN23] の Section 9 においてそのことが議論されている.

ここでさらに, 別の位相的な演算を用意する.

定義-定理 6 (Equation (9), [AKKN23])**.** $\sigma\colon |\mathbb{K}\pi| \to \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi)$ を次のように定める. 閉曲線 $\alpha, \beta\colon S^1 \to \Sigma$ は一般の位置にあるものとし, β は $*$ に基点をもつ閉曲線とする. このとき

$$\sigma(\alpha)(\beta) = \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \mathrm{sign}(\alpha,\beta;p)\,\alpha *_p \beta$$

とする. ここで $\alpha *_p \beta$ とは道の合成 $* \xrightarrow{\beta} p \xrightarrow{\alpha} p \xrightarrow{\beta} *$ により得られる基点付き閉曲線である. するとこれは代表元の取り方によらない.

別の演算が出てきて難しくなったように思えるが, 実は, これは κ という Poisson 括弧積の double version から誘導されるものとして定義されている. κ は Leibniz 則を満たすので, 代数的には難しくない写像である. これらを用いると, 初めに定義した Turaev 余括弧積は次のように書けてしまう.

定理 7 (Theorem 5.16, [AKKN23])**.** Σ 上の framing fr を, 各 γ_i の回転数が 0 となるようにとる. このとき $\delta^{\mathsf{fr}} = \mathrm{Div}^{\mathcal{C}} \circ \sigma$ が成り立つ.

ここで 2 つ疑問が生じる. 1 つは, 発散写像にある補正項 $1 \otimes f(\gamma_i)\gamma_i^{-1}$ はどのように自然に出てくるか, ということである. もう 1 つは, ベクトル場の発散のようなものが出てくるのだから, 背後になにか微分幾何のようなものが潜んでいるのではないか, ということである. 実際, 非可換微分幾何の枠組みが有用であったので, これを今から説明する.

3 非可換幾何における接続の理論

しばらく一般論に戻る. B を別の $\mathbb{K}$-代数とし, M を左 B-加群とする.

注 8. 通常の微分幾何では, ある多様体上のベクトル束 $E \to X$ に対して

$$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ B = C^\infty(X),\ M = \Gamma(E \to X)$$

と対応することを想定している. このとき M は B 上有限生成射影的であり, この性質は後に重要になる. また B 上の derivation とはベクトル場のことである.

まずは微分幾何の標準的な道具を導入する. 非可換微分幾何の一般論については, Ginzburg の講義録 [Gin05] を参照されたい.

定義 9.

- $B^e = B \otimes B^{\mathrm{op}}$ とおく. これを用いて左 B^e-加群と両側 B-加群を同一視する.

- 微分 1-形式の空間 $\Omega^1 B$ は, 両側 B-加群として記号 $db\,(b \in B)$ で生成され, 関係式

$$d(\lambda b + \lambda' b') = \lambda db + \lambda' db', \quad d(bb') = db\, b' + bdb'$$

  を各 $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $b, b' \in B$ について課すものとする.
- 一般の微分 p-形式の空間 $\Omega^p B$ は, p 個の B 上のテンソル積 $\Omega^1 B \otimes_B \cdots \otimes_B \Omega^1 B$ で定める. すると全空間 $\Omega^\bullet B$ 上には外微分 d が定まり, これにより次数付き微分代数になる.
- $f \in \mathrm{Der}(B)$ による内部積 $i_f \colon \Omega^\bullet B \to \Omega^\bullet B$ を, 次数 (-1) の derivation であって, 1-形式の上では $i_f(db) = f(b)$ により定める. また Lie 微分は Cartan の公式 $L_f = d \circ i_f + i_f \circ d$ で定める.
- M 上の接続とは, $\nabla \colon M \to \Omega^1 B \otimes_B M$ であって, Leibniz 則

$$\nabla(bm) = db \otimes m + d\nabla(m)$$

  を各 $b \in B$, $m \in M$ について満たすものとする.

ここでさらに M は B 上有限生成射影的であるとする. $M^* = \mathrm{Hom}_B(M, B)$ とおくとこれは右 B-加群であり, このとき $\mathrm{End}_B(M) \cong M^* \otimes_B M$ が成り立つ. そこで

$$\mathrm{ev} \colon M^* \otimes_B M \to |B| : \mu \otimes m \mapsto |\mu(m)|$$

と合成して $\mathrm{Tr} \colon \mathrm{End}_B(M) \to |B|$ を得る. これが非可換環上の自己準同型のトレースである.

次の構成が拙論文 [Tan24] の肝になるものである. まずはできる限り一般の場合に定義する.

定義 10. M 上の接続 ∇ と Lie 代数 D, さらに 2 つの Lie 代数の準同型

$$\varphi \colon D \to \mathrm{Der}(B),\ \rho \colon D \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$$

が与えられていて, 整合性条件

$$\rho(f)(bm) = \varphi(f)(b)m + b\rho(f)(m)$$

を各 $f \in \mathrm{Der}(B)$, $b \in B$, $m \in M$ について満たすものとする. このとき, これらに付随する発散写像とは

$$\mathrm{Div}^{(\varphi,\rho,\nabla)} \colon D \to |B| :\ f \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(f) - (i_{\varphi(f)} \otimes \mathrm{id}_M) \circ \nabla)$$

のこととする. ここでトレースの中身は整合性条件により B-線型になることに注意する.

注 11. この定義のもとで, 通常のベクトル場の発散は次のようにして得られる. すなわち, 向き付け可能な多様体 X 上の体積形式 μ が与えられたとき,

$$\begin{gathered}
M = \Gamma(\wedge^{\mathrm{top}} T^* X),\ \nabla(\mu) = 0,\ D = \mathrm{Der}(C^\infty(X)), \\
\varphi = \mathrm{id} \colon \mathrm{Der}(C^\infty(X)) \to \mathrm{Der}(C^\infty(X)), \\
\rho = L \colon \mathrm{Der}(C^\infty(X)) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Gamma(\wedge^{\mathrm{top}} T^* X)) :\ \xi \mapsto L_\xi
\end{gathered}$$

と定めればよい. よって上の定義はたしかに一般化となっている.

さて，これらを用いてコンパクトな境界付き有向曲面の場合を考える．まず，

$$A = \mathbb{K}\pi,\ B = A^e,\ M = \Omega^1 A$$

とする．このとき $M \cong \Omega^1 \mathbb{K}F_N$ は 1-形式の族 $(d\gamma_i\, \gamma_i^{-1})_{1 \leq i \leq N}$ で B 上自由生成されることがわかるので特に有限生成射影的である．そこで M 上の接続を $\nabla_{\mathcal{C}}(d\gamma_i\, \gamma_i^{-1}) = 0$ で定める．また $D = \mathrm{Der}(A)$ として，

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(B) :\quad & f \mapsto f \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes f, \\ \rho\colon\ \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\Omega^1 A) :\ & f \mapsto L_f \end{aligned}$$

と定める．するとこれらは整合性条件を満たし，得られた発散写像を

$$\mathrm{Div}^{\nabla_{\mathcal{C}}}\colon\ \mathrm{Der}(A) \to |A^e| \cong |A|^{\otimes 2}$$

と表す．これを実際に計算してみよう．まず

$$\begin{aligned} (L_f - (i_{\varphi(f)} \otimes \mathrm{id}_M) \circ \nabla)(d\gamma_i\, \gamma_i^{-1}) &= L_f(d\gamma_i\, \gamma_i^{-1}) - 0 \\ &= df(\gamma_i)\gamma_i^{-1} + d\gamma_i\, f(\gamma_i^{-1}) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} \partial_j'(f(\gamma_i)) d\gamma_j\, \partial''(f(\gamma_i))\gamma_i^{-1} - d\gamma_i\, \gamma_i^{-1} f(\gamma_i)\gamma_i^{-1} \end{aligned}$$

となる．ここで $\partial_j(a) = \partial_j'(a) \otimes \partial_j''(a)$ とおいた．これの $d\gamma_i\, \gamma_i^{-1}$ の係数を求め，i について和を取ったものがトレースであるから，結局

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}^{\nabla_{\mathcal{C}}}(f) &= \sum_i |\partial_i'(f(\gamma_i)) \otimes \gamma_i \partial''(f(\gamma_i))\gamma_i^{-1} - 1 \otimes f(\gamma_i)\gamma_i^{-1}| \\ &= \sum_i |\partial_i'(f(\gamma_i)) \otimes \partial_i''(f(\gamma_i)) - 1 \otimes f(\gamma_i)\gamma_i^{-1}| \\ &= \mathrm{Div}^{\mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ．これで初めに定義した発散写像が再構成された．

一般の operad 上の自由代数においては，発散写像の理論の先行研究が Powell により行われている [Pow21]．そこでは，組み合わせ的に定義された発散写像が Lie 代数の 1-コサイクル条件を満たすことが示されている．この発散写像は，上で述べた構成に自由代数上の標準的な接続を適用すれば復元できることがわかる．

4　閉曲面の場合

最後に Σ が閉曲面の場合を考える．まず σ に対応する写像については，同じ構成で得られることが Vaintrob により示されている [Vai07]．ただし，境界付きの場合とは異なり，その値を outer derivation の空間に射影することで well-defined となる．Hochschild コホモロジーを用いると，これは

$$\sigma\colon |\mathbb{K}\pi| \to \mathrm{HH}^1(\mathbb{K}\pi)$$

となることに他ならない．次に発散写像を考えるのだが，今の場合 $\Omega^1\mathbb{K}\pi$ は $(\mathbb{K}\pi)^e$ 上射影的でないため，上の構成はそのままでは適用できない．これは $\mathbb{K}\pi$ の ($\mathbb{K}$-代数としての) コホモロジー次元が 2 であることに由来する．そこで，$\Omega^1\mathbb{K}\pi$ の射影分解を考えることにする．まず曲面の胞体分割を用いることで，$(\mathbb{K}\pi)^e$-加群の完全列

$$0 \to P_2 \to P_1 \to \Omega^1\mathbb{K}\pi \to 0$$

を得る．ここで，各 P_i は Σ の特異ホモロジー群を用いて $P_i = (\mathbb{K}\pi)^e \otimes H_i(\Sigma; \mathbb{K})$ と取ることができる．さらに，各 P_i の上の接続 ∇_i を次のように定める．Σ の種数が g であるとすると，自然な全射

$$q\colon \mathbb{K}\pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \mathbb{K}\pi_1(\Sigma)$$

が，$\Sigma_{g,1}$ の境界に円板を貼ることで得られるから，$\Sigma_{g,1}$ の場合の接続 $\nabla_{\mathcal{C}}$ の q による押し出し $\nabla_1 = q_*\nabla_{\mathcal{C}}$ により

$$P_1 \cong \mathbb{K}\pi_1(\Sigma) \otimes_{\mathbb{K}\pi_1(\Sigma_{g,1})} \Omega^1\mathbb{K}\pi_1(\Sigma_{g,1})$$

上の接続を得る．ここで今は関数環の上で様々な対象を考えていると思えるから，普段行う引き戻しとは見かけが逆になることに注意されたい．また P_2 上の接続は，Σ の基本類 $[\Sigma]$ を用いて $\nabla_2(1 \otimes [\Sigma]) = 0$ と定める．さらに，$f \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi)$ に対して Lie 微分 $L_f\colon \Omega^1\mathbb{K}\pi \to \Omega^1\mathbb{K}\pi$ の射影分解へのリフト $\tilde{L}_{f,i}\colon P_i \to P_i$ の存在が示せるから，これらを用いて発散写像を

$$\mathrm{Div}^{\nabla_\bullet}\colon \mathrm{HH}^1(\mathbb{K}\pi) \to |\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}|^{\otimes 2}\colon\ f \mapsto \sum_{1\le i\le 2} (-1)^{i-1}\,\mathrm{Tr}(\tilde{L}_{f,i} - (i_\varphi(f) \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_i)$$

と定める．ここで値は定値ループ $\mathbf{1}$ で割っていることに注意すると，これはリフトの取り方や outer derivation の代表元の取り方によらないことが示せる．すると拙論文 [Tan24] の主定理を得る．

定理 12. 次の合成は閉曲面上の Turaev 余括弧積 δ に等しい．

$$|\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}| \xrightarrow{\sigma} \mathrm{HH}^1(\mathbb{K}\pi) \xrightarrow{\mathrm{Div}^{\nabla_\bullet}} |\mathbb{K}\pi/\mathbb{K}\mathbf{1}|^{\otimes 2}$$

証明は，定理 7 の写像が全射 q を通じて上定理の写像をもたらすことを確かめる．

一般に，コホモロジー次元が有限であるような有限生成代数について，同様の構成で発散写像を定義することができる．この構成は拙論文の鍵となるアイデアであり，射影的でないことに起因する組み合わせ的な難所を，接続を用いて言い換えた点において有用である．

最後に，今後の展望について述べる．Alekseev–Naef–Pulmann–Ševera の論文 [ANPŠ24] では，Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積を合わせた Lie 双代数は，ある超 Lie 群 $Q(N)$ を用いた曲面の主 $Q(N)$ 束のモジュライ空間の上の本当の微分幾何 (より詳しく Batalin-Vilkovisky 作用素) に写されることが分かっている．上で議論した接続と発散写像の理論も，やはりこの描像を通じてモジュライ空間上の本当の接続と発散写像に写されることが期待される．

謝辞. 本稿の執筆にあたって，研究集会を企画してくださいました田村先生には深く感謝申し上げます．また，この研究発表は京都大学内の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所からの支援を受けています．

参考文献

[AKKN23] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera. 2023. arXiv:1804.09566v3.

[ANPŠ24] Anton Alekseev, Florian Naef, Ján Pulmann, and Pavol Ševera. Batalin-Vilkovisky structures on moduli spaces of flat connections. *Advances in Mathematics*, 443:109580, 2024. arXiv:2210.08944, doi:10.1016/j.aim.2024.109580.

[ES14] Naoya Enomoto and Takao Satoh. New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 14:627–669, 2014. arXiv:1012.2175.

[Gin05] Victor Ginzburg. Lectures on noncommutative geometry. 2005. arXiv:math/0506603.

[Mor93] Shigeyuki Morita. Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 70(3), 1993. doi:10.1215/s0012-7094-93-07017-2.

[Pow21] Geoffrey Powell. On derivations of free algebras over operads and the generalized divergence. 2021. arXiv:2105.09123.

[Tan24] Toyo Taniguchi. Non-commutative divergence and the Turaev cobracket. 2024. arXiv:2403.16566.

[Tur91] Vladimir G. Turaev. Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 24(6):635–704, 1991. doi:10.24033/asens.1639.

[Vai07] Dmitry Vaintrob. A relationship between Hochschild cohomology and the Goldman bracket for compact oriented two-dimensional manifolds. 2007. URL: https://web.mit.edu/rsi/www/pdfs/papers/2006/2006-mitkav.pdf.