Borsuk-Ulam finite groups from the point of view of elements

Toshio Sumi
Faculty of Arts and Science, Kyushu University

1　はじめに

Wasserman [5] は G-表現空間の間の isovariant G-写像 $f\colon V \to W$ に関して，不等式

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G \tag{1.1}$$

を満たすコンパクトリー群 G を Borsuk-Ulam 群 (略して BUG) と呼び，その考察を行った．ここで，$f\colon V \to W$ が isovariant G-写像であるとは，f は G-写像であり，任意の $v \in V$ に対し，v における isotropy subgroup $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ と $f(v) \in W$ における isotropy subgroup $G_{f(v)} = \{g \in G \mid g \cdot f(v) = f(v)\}$ が等しい性質を持つときにいう．彼は BUG に関する基本的な性質を示し，特にコンパクト可換群，有限可解群，および有限群の元の位数に関する条件 prime condition を満たす有限群はすべて BUG であることを示した．この不等式 (1.1) は自然で任意のコンパクトリー群で成り立つことが期待される．

基本的な性質から有限群が BUG かどうかは有限単純群が BUG かどうかを調べればよいことがわかる．長崎-牛瀧 [2] は，Möbius 関数を用いて，q 個の元からなる有限体 F_q の元を成分に持つ 2 次の射影特殊線形群 $\mathrm{PSL}(2, F_q)$ が BUG であることを示した．$\mathrm{RCycl}(G)$ により G の巡回群の共役類の完全代表系を表すこととする．著者 [3] は，表現空間間の G-写像 $f\colon V \to W$ に対し，G の部分群の集合 $\mathcal{S}(G)$ からの関数

$$g_f(H) = (\dim W - \dim W^H) - (\dim V - \dim V^H)$$

を考え，彼らの手法から $g_f(G)$ は，$g_f(C)$ (C は G の巡回群) たちの線形結合

$$g_f(G) = \sum_{C \in \mathrm{RCycl}(G)} \beta_G(C) g_f(C)$$

で表される ($\beta_G(C) \in \mathbb{Q}$) ことに着目し，長崎-牛瀧が導入した Möbius 条件を拡張し，次の条件を検討した．

巡回群の共役類に関する条件

$C^G \leq D^G$ ならば $\gamma(C) \leq \gamma(D)$ を満たす任意の関数 $\gamma\colon \mathrm{RCycl}_1(G) \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ に対して，

$$\sum_{C \in \mathrm{RCycl}_1(G)} \beta_G(C)\gamma(C) \geq 0$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{RCycl}_1(G)$ は非自明な G の巡回群の共役類の完全代表系を表す[a]．

[a] γ は g_f を念頭に置いているため，$\gamma(\{1\}) = 0$ と思っているだけである．

この条件を満たす有限群を cyclic-condition 群 (CCG) と呼んだ．CCG ならば BUG なので，まずは CCG である有限群を見つけることから始め，n 次交代群 A_n ($n \leq 21$), n 次対称群 S_n ($n \leq 22$), すべての散在単純群およびその自己同型群は CCG であることをソフトウェア gap [1] を用いて示した．一方，A_{22} は CCG ではないことも示した [3]．さらに翌年著者 [4] は cyclic-condtion 群の条件を弱めた以下の条件 subgroup-condition 群 (SCG) を導入し，考察を行った．

部分群に関する条件

$\gamma\colon \mathrm{RCycl}_1(G) \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が，$K_1 \triangleleft K_2 < G$ で K_2/K_1 が BUG であるような組 (K_1, K_2) に関して，$\gamma(K_2) \geq \gamma(K_1)$ を満たすとき，$\gamma(G)$ は，$\gamma(K_2) - \gamma(K_1)$ の非負有理係数の和として表される．

CCG を SCG は含み，SCG ならば BUG であることも容易にわかる．SCG となる交代群 A_n を計算機で探し，$22 \leq n \leq 27$ に対し，A_n は SCG であることが確かめられた．F_q を成分に持つ 3 次射影特殊線形群 $\mathrm{PSL}(3, q)$ や射影特殊ユニタリ群 $\mathrm{PSU}(3, q)$ は SCG であることも示した．A_{27} の巡回部分群のペアだけでも非常に多く存在するため，SCG であることを確かめる際，部分群をすべて考えるのは得策ではなく，どのような，$K_1 \triangleleft K_2 < G$ を利用するのが良いのかが問題として残った．その際，表現空間の部分群による固定点集合の次元と関連するため，どのようなクラスに制限して考察するべきかが不明であった．

今回は，新たな BUG となる十分条件を与える．以前は γ は表現空間の固定点の次元に係わっていたが，今回はそれを避けている点が特記すべき点である．その十分条件を考察するとソフトウェア gap により次が確かめられた．

Theorem 1 n 次交代群 A_n ($n \leq 31$) は BUG である[1]．

[1] 講演時は A_{28} がうまくいっていなかったが，それは一次従属性が悪さをしていた．

2 今回の手法

以降，群 G は有限群に限定する．このとき，G の部分群 H と G-表現空間 V に対し，V の H による固定点集合 V^H は

$$\dim V^H = \sum_{h\in H} \frac{\chi_V(h)}{|H|}$$

で求められる．ここで，$\chi_V(h)$ は V の h での指標である．そこで，線形に拡張し，$\mathbb{Q}$ 上の表現環の元 X に対し，

$$\dim X^H = \sum_{h\in H} \frac{\chi_X(h)}{|H|} \in \mathbb{Q}$$

と定める．X を G-表現空間の差とする．先行研究にて，我々は次の 2 条件

条件 (P0)

群 G の部分群 $P, H < G$ で，P が H の正規部分群であるようなペア (P, H) に対して，

$$\dim X^P \geq \dim X^H$$

を満たす場合，

$$\dim X \geq \dim X^G$$

が従う．

および

条件 (P1)

$$\dim X - \dim X^G = \sum_{\substack{(P,H)\\ P\triangleleft H<G}} a_{P,H}(\dim X^P - \dim X^H)$$

を満たす非負有理数 $a_{P,H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ $(P \triangleleft H < G)$ が存在する．

を考察した．(P1) が (P0) を導くのは自明である．

有限群 G に対し，G より位数の小さい G の任意の部分商群 K は BUG としよう．isovariant G-写像 $f\colon V \to W$ に対し，$X = W - V$ が (P1) の仮定を満たす．よって，(P1) が成立するならば，

$$\dim X - \dim X^G \geq 0$$

がいえ，したがって，有限群 G は BUG であることがわかる．つまり，任意の有限群 G および $\dim X^P \geq \dim X^H$ $(P \triangleleft H \leq G)$ を満たす任意の G-表現空間の差 X に対して，(P1) が成り立つことが示せれば，すべての有限群は BUG であることがわかることになる．

$\mathbb{Q}G$ にて，$\mathbb{Q}$ 上の群環を表すことにする．つまり，

$$\mathbb{Q}G = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Q}\}$$

とする．ここでは，積構造は考えないこととする．$\mathbb{Q}[G]$ は，G-既約表現空間全体を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であり，$\mathbb{Q}G$ は G の元全体を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間である．

$\mathcal{S}_G$ を G の部分集合全体の集合とする．集合 $S \in \mathcal{S}_G$ に対し，$|S|$ で S の元の個数を表す．写像 $\psi_G \colon \mathcal{S}_G \to \mathbb{Q}G$ を

$$\psi_G(S) = \sum_{s \in S} \frac{1}{|S|} \cdot s$$

によって定め，$X \in \mathbb{Q}[G]$ に対し，線形写像 $\chi_X \colon \mathbb{Q}G \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_{\mathrm{X}}\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right) = \sum_{g \in G} a_g \chi_{\mathrm{X}}(g)$$

にて定める．すると，容易に，G の部分群 H に対し，

$$\chi_{\mathrm{X}} \circ \psi_G(H) = \dim X^H$$

が成り立つことがわかる．

$\mathcal{D}$ を $P \triangleleft H < G$ を満たすか，もしくは，H は巡回群であるような G の部分群 P, H のペア (P, H) の集合とする．そこで，以下の条件を考えよう：

条件 (P2)

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}} b_{P,H}(\psi_G(P) - \psi_G(H)).$$

を満たす非負有理数 $b_{P,H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ $((P, H) \in \mathcal{D})$ が存在する．

写像 χ_{X} を適用することにより，(P2) は (P1) を導く．G が巡回群であれば，G は条件 (P2) を満たすが，$\mathcal{D}$ は少なくとも１つ (P, G) の形のペアを含まなければならないため，巡回群でも成り立つように $\mathcal{D}$ に H $(\leq G)$ が巡回群であるような G の部分群のペア (P, H) を含めている．

(P2) を満たすかどうかを計算機を用いて検証したい場合，データ量の関係でより簡略化を考える必要がある．そこで、G の元全体を共役類全体へと変形する．$\mathcal{C}_G$ を G の元の共役類全体からなる集合とし，$\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ を $\mathcal{C}_G$ の元全体を基底にもつ線形空間とする：

$$\mathbb{Q}\mathcal{C}_G = \{\sum_{g^G \in \mathcal{C}_G} c_{g^G} \cdot g^G \mid c_{g^G} \in \mathbb{Q}\}.$$

全射準同型 $\pi\colon \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ を

$$\pi\left(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\right) = \sum_{g^G \in \mathcal{C}_G} \left(\sum_{\substack{x\in G\\ g^G = x^G}} a_x\right) \cdot g^G$$

にて定める．$\mathcal{S}_G$ から $\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ への写像 $\rho_G = \pi \circ \psi_G$ を考えると，次は可換図式になる:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "\rho_G"] \arrow[d, "\psi_G"'] & \mathbb{Q}\mathcal{C}_G \arrow[d, "\text{bij.}"] \\
\mathbb{Q}G \arrow[ur, "\pi"] & Z\mathbb{Q}G \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

そこで，以下の条件を考える：

条件 (P3)

$$\rho_G(\{1\}) - \rho_G(G) = \sum_{(P,H)\in\mathcal{D}'} c_{P,H}(\rho_G(P) - \rho_G(H)). \tag{2.1}$$

を満たす非負有理数 $c_{P,H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が $(P,H) \in \mathcal{D}'$ に対し存在する．

Proposition 1 $\mathcal{D}$ に対する (P2) はある $\mathcal{D}'$ に対する (P3) と同値となり，逆もなりたつ．

$\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ の元 f の g^G の係数を $coe(f; g^G)$ で表すことにする．ψ_G の定義より，

$$\sum_{g^G} coe(\rho_G(P) - \rho_G(H); g^G) = 0$$

が成り立つので，等式 (2.1) を満たす $c_{P,H}$ を見つける際，非自明な元 g に対し，g^G の両辺の係数のみを考えればよい．

Remark 1 G の元 g に対し，

$$coe(\rho_G(G) - \rho_G(\{1\}); g^G) = \begin{cases} \frac{1}{|Z_G(\langle g\rangle)|} > 0, & g \neq 1, \\ \frac{1}{|G|} - 1 < 0, & g = 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

3　巡回群ペアに関する非負線形結合として表される有限群

この節では,

$$\mathrm{Cyc}^2(G) := \{(P,H) \mid P < H \leq G, H \text{ は巡回群}\}$$

に関して，(P2) が成り立つ有限群の例を挙げる．また，

$$\mathrm{Cyc}^1(G) := \{(\{1\}, H) \mid H \le G,\ H \text{ は 巡回群 }\}$$

とおく．

Proposition 2 射影特殊線形群 $\mathrm{PSL}(2,q)$ は $\mathcal{D}' = \mathrm{Cyc}^1(G)$ に対して (P3) を満たす．

Proof p を $\mathbb{F}_q$ の標数とする．つまり，q は素数 p のべきである．q が 2 べきか奇素数べきかで場合分けを行う．

まず，q を 2 べきとしよう．$p=2$ である．$\mathrm{PSL}(2,q)$ の巡回部分群 C_-, C_0, C_+ をそれぞれ，位数 $q-1$, 2, $q+1$ の元とすると，次がわかる．

(1) $\mathcal{C}_G = \{g^G \mid g \in C_- \setminus \{1\}\} \sqcup \{g^G \mid g \in C_0 \setminus \{1\}\} \sqcup \{g^G \mid g \in C_+ \setminus \{1\}\} \sqcup \{1\}$,

(2) $|N_G(C_-)| = 2|C_-|$, $|N_G(C_0)| = q$, $|N_G(C_+)| = 2|C_+|$,

(3) C_- (resp. C_+) の非自明な部分群 K に対し，

$$N_G(K) = N_G(C_-) \text{ (resp. } N_G(K) = N_G(C_+))$$

である．

よって，次の等式を得る．

$$\begin{aligned}\rho_G(G) - \rho_G(\{1\}) = \frac{1}{2}(\rho_G(C_-) - \rho_G(\{1\})) + \frac{1}{2}(\rho_G(C_+) - \rho_G(\{1\})) \\ + \frac{2}{q(p-1)}(\rho_G(C_0) - \rho_G(\{1\})).\end{aligned} \tag{3.1}$$

次に，q を奇素数べきとしよう．$\mathrm{PSL}(2,q)$ の巡回部分群 C_-, C_0, C_+ をそれぞれ位数 $(q-1)/2$, p, $(q+1)/2$ の元とするとき上記 (1)–(3) を満たすため，等式 (3.1) を得る．

したがって，$\mathrm{PSL}(2,q)$ は $\mathcal{D}' = \{(\{1\}, C_-), (\{1\}, C_0), (\{1\}, C_+)\} \subset \mathrm{Cyc}^1(G)$ に関し (P3) を満たす． ∎

$\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^1(G)$ に対して (P2) を満たす有限群は非常に特殊と考えられるが，次も成り立つ．

Proposition 3 有限可換群 G は $\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^1(G)$ に対して (P2) を満たす．

Wasserman は有限群 G が BUG であるための十分条件として，prime condition を与えた．G が prime condition を満たすとは，G の各元 g に対し，その位数 $|g|$ を割る素数の逆数の和が 1 以下であるときにいう．G が prime condition を満たすことは，G が CCG であるための十分条件であった．同様の結果が (P2) に対しても言える．

Proposition 4 G が *prime condition* を満たせば，G は $\mathrm{Cyc}^2(G)$ に関し (P2) を満たす．

この命題は次の定理から従う．$coe(x,g)$ は $x \in \mathbb{Q}G$ における g の係数を表すものとしよう：

$$x = \sum_{g \in G} coe(x,g) \cdot g.$$

Theorem 2 $x \in \mathbb{Q}G$ は以下の *4* 条件

(1) $g \in G \setminus \{1\}$ に対し $coe(x,g) \geq 0$ である．

(2) g の位数 $|g|$ が *prime condition* を満たしていなければ，$coe(x,g) = 0$ である．

(3) g_1, g_2 がともにある巡回群の生成元であれば, 等式 $coe(x,g_1) = coe(x,g_2)$ が成り立つ.

(4) $\sum_{g \in G} coe(x,g) = 0$ を満たす.

を満たしているとしよう．このとき，x は $\psi_G(H) - \psi_G(P)$, $(P,H) \in \mathrm{Cyc}^2(G)$ の非負有理数係数の線形結合として表される.

Proof g_0 を $coe(x,g) > 0$ を満たす（つまり，$coe(x,g)$ がゼロでない）元 $g \in G$ の中で極大元とする．相異なる素数 p_j と自然数 $e_j \geq 1$ を用いて，$|g_0| = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ としよう．$|g_0|$ は prime condition を満たすので，$\sum_{r=1}^{k} p_j^{-1} \leq 1$ である．$2 \leq j \leq k$ に対し，$\lambda_j = p_j^{-1}$ とおき，$j = 1$ のときは，$\lambda_1 = 1 - \sum_{j=2}^{k} p_j^{-1} \geq p_1^{-1}$ とおく．$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ に注意しよう．

$\mathbb{Q}G$ の元

$$y_0 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j coe(x,g_0)|g_0|(\psi(\langle g_0 \rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j} \rangle))$$

を考え,

$$x_1 = x - y_0$$

とおく．このとき，x の代わりに x_1 に対して，(1)–(4) を満たし，さらに,

- h が $\langle g_0 \rangle$ の生成元ならば，$coe(x_1,h) = 0$ を満たす.
- 任意の $g \in G$ に対して $coe(x_1,g) \geq coe(x,g)$ が成り立つ.

を満たすことを示す.

$h \in G \setminus \{1\}$ とする．$h \notin \langle g_0 \rangle$ であれば，$coe(x_1,h) = coe(x,h)$ が成り立つ．h が $\langle g_0 \rangle$ の生成元であれば，(3) により，

$$\begin{aligned} coe(x_1,h) &= coe(x,h) - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j coe(x,g_0)|g_0| coe(\psi(\langle g_0 \rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j} \rangle), h) \\ &= coe(x,g_0) - coe(x,g_0) \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．h が $\langle g_0^{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\rangle$ $(k \geq 1)$ の生成元であるとき，

$$\begin{aligned}
coe(x_1,h) &= coe(x,h) - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j coe(x,g_0)|g_0|coe(\psi(\langle g_0\rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j}\rangle),h) \\
&= coe(x,h) - coe(x,g_0) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j coe(x,g_0)|g_0|coe(\psi(\langle g_0^{p_j}\rangle),h) \\
&= coe(x,h) - coe(x,g_0) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s} coe(x,g_0)|g_0|coe(\psi(\langle g_0^{p_{i_s}}\rangle),h) \\
&= coe(x,h) - coe(x,g_0) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s} p_{i_s} coe(x,g_0).
\end{aligned}$$

が成り立つ．もし，$i_1,\ldots,i_k > 1$ ならば，

$$coe(x_1,h) = coe(x,h) + (k-1)coe(x,g_0) \geq coe(x,h)$$

であり，$i_1 = 1$ であれば，$1 - \sum_{j=2}^{k} p_j^{-1} \geq p_1^{-1}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
coe(x_1,h) &= coe(x,h) + \left(1 - \sum_{j=2}^{k} p_j^{-1}\right) coe(x,g_0)p_1 + (k-2)coe(x,g_0) \\
&= coe(x,h) + \left(\left(1 - \sum_{j=2}^{k} p_j^{-1}\right) p_1 + k - 2\right) coe(x,g_0) \geq coe(x,h).
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\sum_{g\in G} coe(\psi_G(\langle a\rangle),g) = 1$ $(a \in G)$ より $\sum_{g\in G} coe(y_0,g) = 0$ だから (4) が成り立つ．

よって，x_1 は (1)–(4) を満たし、h が $\langle g_0\rangle$ の生成元ならば，$coe(x_1,h) = 0$ である．さらに、$\langle g_0\rangle$ の真部分群の非自明な元 h に関し、$coe(x_1,h) > 0$ となることもあるが、真部分群の非自明な元 h の位数 $|h|$ は prime condition を満たす。よって繰り返し続けることにより、x は $y_0 + y_1 + \cdots$ と表される。 ∎

群の位数が大きな群を対象にすると，prime condtion はすぐに破綻する。例えば，G が位数が 30 の倍数の元を持てば，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} > 1$$

より，G は prime condtion を満たさない．しかしながら，Theorem 2 の条件 (2) は多少弱めることができることが期待でき，prime condition を満たす元のみになったときまでうまく変形すればよいことから，$\sum p_j^{-1}$ を考慮するほうが良いのかもしれない．

4 群の拡大

この節では，群の拡大 $1 \to K \to G \to F \to 1$ について考察しよう．

Wasserman は K, F が BUG であれば G も BUG であることを示した．これは容易で，G-表現空間間の isovariant G-写像 $f\colon V \to W$ に対し，X を G-表現空間の差 $W - V$ とすると，X^K は F-表現空間の差とみなせるため，$\dim X^K \geq \dim(X^K)^F = \dim X^G$ であり，X を K-表現空間の差とみなすと，$\dim X \geq \dim X^K$ が成り立つため，$\dim X \geq \dim X^G$ が従う．

現状，F が巡回群でないとき，K, F が条件 (P1) を満たすならば（うまく $\mathcal{D}$ を取ることにより）G も (P1) を満たすことはわかる（Theorem 3 参照のこと）が，F が巡回群の場合はうまくいかない．条件 (P1) において，Wasserman と同様な方法が適用できるようにするためには，(P, H) として $H = G$, $P \neq \{1\}$ も許すのが良いのかもしれない[2]．同じく，条件 (P2) において，$\mathcal{D}$ に巡回群の場合のみ $H = G$ を許したが，一般に巡回群でない G については $P \triangleleft H \leq G$ で，$H = G$ のときは $P \neq \{1\}$ を課すのが良いのかもしれない．この変更の下，K, F が，条件 (P2) を満たせば，G も条件 (P2) を満たすことがすぐにわかる．しかしながら，今まで計算した経験上，G が巡回群でなければ $P \triangleleft H < G$ でうまくいっているので，変更は不必要であろうと思われる[3]．

以前の結果と同様に，一般には $\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^2(G)$ では不十分であることがわかる．

Remark 2 n 次交代群 A_n $(5 \leq n \leq 21)$, 22 次対称群 S_{22} $\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^2(-)$ に関し (P2) を満たすが， 一方で，A_{22}, A_{23}, S_{23} は $\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^2(-)$ に関し (P2) を満たさない．

5 条件 (P2) を満たす有限群

前節にて，$\mathcal{D} = \mathrm{Cyc}^2(G)$ では，(P2) は群拡大にて閉じないことを示した．各有限非可解群 G に対し，$\mathcal{D}$ として $P \triangleleft H < G$ を満たす (P, H) 全体のなす集合 $\mathcal{D}_G$ を考えると，若干の条件の下で (P2) は群拡大に関して閉じることを示すことができる．

Theorem 3 F は巡回群でないと仮定する．$\tau\colon G \to F$ を全射準同型とするとき，もし F と $\ker\tau$ がそれぞれ $\mathcal{D}_F$, $\mathcal{D}_{\ker\tau}$ に関して (P2) を満たすならば， G も $\mathcal{D}_G$ に関して (P2) を満たす．

Proof $K = \ker\tau$ とおく．仮定として，

$$\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K) = \sum_{(P,H)\in\mathcal{D}_K} a_{P,H}(\psi_K(P) - \psi_K(H)) \tag{5.1}$$

$$\psi_F(\{1\}) - \psi_F(F) = \sum_{(P,H)\in\mathcal{D}_F} b_{P,H}(\psi_F(P) - \psi_F(H)). \tag{5.2}$$

[2]とはいえ，G が素数位数を持てば，G は巡回群で単純群なので，$(P, H) = (\{1\}, G)$ しかとりようがない... 非可換単純群のとき $(P, H) = (\{1\}, G)$ を許してしまうと何の条件も与えないので避けたい．

[3]部分群問題 (Question 2) と同様の難しさを含んでいる可能性がある．

としよう．包含写像 $i\colon K \to G$ に対し，

$$i_*(\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K)) = \psi_G(\{1\}) - \psi_G(K)$$

が成り立ち，よって，等式 (5.1) より

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(K) = \sum_{(P,H)\in\mathcal{D}_K} a_{P,H}(\psi_G(P) - \psi_G(H))$$

を得る．等式

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = (\psi_G(\{1\}) - \psi_G(K)) + (\psi_G(K) - \psi_G(G))$$

より，(5.2) を用いて，$\psi_G(K) - \psi_G(G)$ が非負有理数係数の線形結合で表されることを示せばよい．

等式 (5.2) に τ^{-1} を適用して，

$$\psi_G(K) - \psi_G(G) = \sum_{(P,H)\in\mathcal{D}_F} b_{P,H}\left(\psi_G(\tau^{-1}(P)) - \psi_G(\tau^{-1}(H))\right)$$

が導かれる．$(P,H) \in \mathcal{D}_F$ に対し，F が巡回群でないため $H \neq F$ であり，よって，$\tau^{-1}(H) \neq G$ だから，$\mathcal{D} = \mathcal{D}_K \cup \{(\tau^{-1}(P), \tau^{-1}(H)) \mid (P,H) \in \mathcal{D}_F\}$ に関して (P2) を満たす．$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_G$ は明らかである． ∎

G の元 g の共役類 g^G を G の部分集合 $\{a^{-1}ga \mid a \in G\}$ と同一視する．$a, b \in G$ が性質 $a^G \cap \mathrm{gen}(\langle b\rangle) \neq \varnothing$ を満たしているとする．このとき，任意の部分群のペア (P,H) に対し，

$$coe(\psi_G(P) - \psi(H), a) = coe(\psi_G(P) - \psi(H), b)$$

が成り立つ．

$$G = \bigcup_{g^G \in \mathcal{C}_G} g^G$$

により，G の分割を与えている．代わりに，G の巡回部分群の共役類 C^G に対し、

$$\mathrm{gen}(C)^G = \{g^{-1}ag \mid a \in \mathrm{gen}(C), g \in G\} \subset G$$

にて G を分割する．ただし， $\mathrm{gen}(\{1\}) = \{1\}$ とする．

(P2) の解の存在を確認するには，単体法を用いた．単体法では，行フルランクであるほうが良いため，$\mathcal{C}_G$ を G の巡回群 C の共役類 C^G から定まる集合 $\{gen(C)^G \mid C^G\}$ へ取り替えて計算する[4]．すると，

$$\mathrm{Sol}^2(G) = \{(P,H) \mid P \triangleleft H < G,\ H \text{ は可解群 }\}$$

の一部分を用いて計算機で以下が確かめられた．

Theorem 4 n 次交代群 A_n $(22 \leq n \leq 31)$ は $\mathrm{Sol}^2(G)$ に関し (P3) を満たす．

[4]別に行フルランクでなくても単体法は実行できるが，行フルランクにしておくと特殊な状況を避けることができる．

6　結びとして

BUG の性質として既知なもののいくつかについては，(P2) についても同様なことが成り立つことを見ることができた．ただし，すべてではなく，その 1 つとして，BUG の性質として，BUG G の商群は BUG となるが，(P2) についても同様なことがいえるのだろうか？

Question 1 (P2) を満たす有限群 G の商群は (P2) を満たすか?

有限群 G において，(P, H) に関する和で表せたとしたとき，H の商群への像が全体と一致する (P, H) をどうやって回避するのかが問題となる．任意の有限群 G において $\mathcal{D} = \mathrm{Sol}^2(G)$ に関し (P2) が成り立つことが期待される．

BUG G の部分群は BUG かどうか未知であるが，(P2) についてはどうであろうか？

Question 2 (P2) を満たす有限群 G の部分群は (P2) を満たすか?

Questions 1, 2 は，うまい $\mathcal{D}$ に対して有限非可解群 G については少なくとも成り立つ．より一般に以下が成立する．

Proposition 5 有限非可解群 G に対し $\mathcal{D} = \mathrm{Sol}^2(G)$ に関し (P2) が成り立つと仮定する．このとき，G の非可解部分商群 F は $\mathcal{D} = \mathrm{Sol}^2(F)$ に関し (P2) を満たす．

Proof

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = \sum_{(P,H)\in \mathrm{Sol}^2(G)} b_{P,H}(\psi_G(P) - \psi_G(H))$$

が成り立っているとする．K を G の非可解部分群とするとき，制限写像 $\mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}K$ によって

$$\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K) = \sum_{(P\cap K, H\cap K)\in \mathrm{Sol}^2(K)} b_{P,H}(\psi_K(P\cap K) - \psi_K(H\cap K))$$

が成り立つ．次に，K' を K の非可解商群とし，$\pi\colon K \to K'$ を自然な全射準同型とする．可解群 H に対し，$\pi(H\cap K)$ は可解群であるため，

$$\psi_{K'}(\{1\}) - \psi_{K'}(K') = \sum_{(\pi(P\cap K), \pi(H\cap K))\in \mathrm{Sol}^2(K')} b_{P,H}\left(\psi_{K'}(\pi(P\cap K)) - \psi_{K'}(\pi(H\cap K))\right)$$

がなりたつ．　∎

Acknowledgement

本研究は JSPS 科研費 23K03116 の助成を受けたものです．

References

[1] GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2. `https://www.gap-system.org`.

[2] Nagasaki, I., and Ushitaki, F. New examples of the Borsuk-Ulam groups. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B39**. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, pp. 109–119.

[3] Sumi, T. A sufficient condition for a finite group to be a Borsuk-Ulam group. RIMS Kôkyûroku. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2018, pp. 148–161.

[4] Sumi, T. Alternating groups and Borsuk-Ulam groups. In *The theory of transformation groups and its applications*, RIMS Kôkyûroku, 2135. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2019, pp. 126–140.

[5] Wasserman, A. G. Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem. *Topology Appl. 38* (1991), 155–161.

819-0395 福岡市西区元岡７５５
九州大学　基幹教育院
E-mail address: `sumi@artsci.kyushu-u.ac.jp`

九州大学・基幹教育院　角 俊雄