ハムサンドイッチ定理の拡張：等分割以外の可能性
An extension of the ham-sandwich theorem: possibilities beyond equal division

川崎英文，九州大学大学院数理学研究院 *

Hidefumi Kawasaki †

Faculty of Mathematics, Kyushu University

Abstract

ハムサンドイッチ定理は Borsuk の対心定理の応用として有名である．正のルベーグ測度をもつ $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対し，それらの測度を同時に 2 等分する超平面が存在することをハムサンドイッチ定理は主張する．

筆者は昨年来，Borsuk の対心定理の最適化理論への応用を図ってきた（[2, 3, 4, 5]）．本稿では，[4] の手法をハムサンドイッチ問題に適用し，同時分割で分割比が 1/2 以外のものが存在することを示す．

1 序

Borsuk の対心定理 [1] は代数トポロジーの重要な定理であり，n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への任意の連続写像 φ に対して，$\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(-\boldsymbol{u})$ を満たす点 $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在することを主張する．Borsuk の対心定理と同値な定理がいくつかあり，組合せ版の Tucker の補題や，集合被覆版の LSB 定理などがよく知られている（Matoušek [7]）．また，応用としては，ハムサンドイッチ定理，ネックレス定理，Lovász [6] による Kneser 予想の解決等が有名であるが，本稿ではハムサンドイッチ定理に焦点を当てる．

μ を $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度とし，$A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ を正の測度をもつ集合とする．ハムサンドイッチ定理は A_i $(i = 1, \ldots, n)$ の測度を同時に 2 等分する超平面が存在することを主張する．

ハムサンドイッチ定理の証明では閉半空間 (1) を用いる．S^n の元 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ に対し，その最初の n 次元ベクトルを $u = (u_1, \ldots, u_n)$ で表し，$\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1})$ と書くことにする．$\langle u, x \rangle$ を内積 $u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$ として，各 $\boldsymbol{u} \in S^n$ に対して

$$H_{\boldsymbol{u}}^{+} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq u_{n+1}\}, \quad H_{\boldsymbol{u}}^{-} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq u_{n+1}\}. \tag{1}$$

とおくと，$H_{-\boldsymbol{u}}^{+} = H_{\boldsymbol{u}}^{-}$ が成立する．$u \neq \boldsymbol{0}$ の場合は $H_{\boldsymbol{u}}^{+}$ も $H_{\boldsymbol{u}}^{-}$ も非空であり，$u = \boldsymbol{0}$ の場合は $H_{\boldsymbol{u}}^{+}, H_{\boldsymbol{u}}^{-}$ の一方は $\mathbb{R}^n$ で，他方は空集合になる．

---

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

†本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている．

そこで，$\varphi_i(\boldsymbol{u}) := \mu(A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}})$ をとると，$\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ は S^n から $\mathbb{R}^n$ への連続写像になる．よって，Borsuk の対心定理により，$\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(-\boldsymbol{u})$ を満たす $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在する．このことから，$H^+_{-\boldsymbol{u}} = H^-_{\boldsymbol{u}}$ に注意すると，

$$\mu(A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}}) = \mu(A_i \cap H^-_{\boldsymbol{u}}) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

が得られる．以上がハムサンドイッチ定理の証明である．

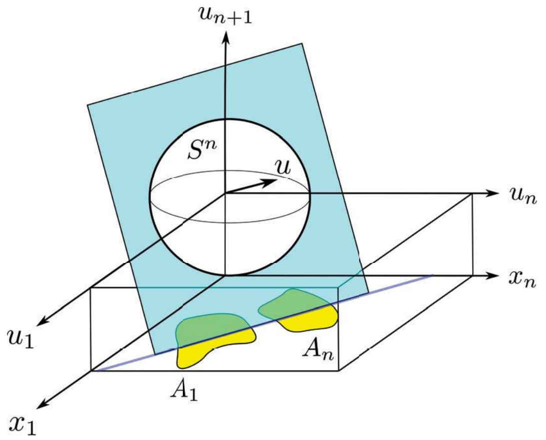

図 1: ハムサンドイッチ定理と Borsuk の対心定理の関係

本稿では，[4] の手法を用いて，φ とは別の連続写像を導入することにより，ハムサンドイッチ定理の部分的な拡張を与える．

2　ハムサンドイッチ定理の拡張

$A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ を正のルベーグ測度をもつ集合，$f_i(x, u)$ を $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times D^n$ 上の実数値連続関数で，$f_i(x, -u) = f_i(x, u)$ を満たすと仮定する．例えば，定数関数はこの仮定を満たす．γ_i を任意の実定数として，$\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ に対して，

$$\nu_i(\boldsymbol{u}) := \int_{A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}}} f_i(x, u) dx - \gamma_i u_{n+1}$$

として，連続写像 $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$ を定義する．このとき，Borsuk の対心定理から次の定理が導かれる．

定理 1　(a) 任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，次の等式を満たす $\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在する．

$$\int_{A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}}} f_i(x, u) dx - \int_{A_i \cap H^-_{\boldsymbol{u}}} f_i(x, u) dx = 2\gamma_i u_{n+1} \ (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

(b) $\displaystyle\int_{A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}}} f_i(x, u) dx = \int_{A_i \cap H^-_{\boldsymbol{u}}} f_i(x, u) dx \ (i = 1, \ldots, n)$ を満たす $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在する．

(c)

$$\int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{v}}^+} f_i(x,v)dx = \int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{v}}^-} f_i(x,v)dx \ (i=1,\dots,n) \tag{4}$$

を満たす $\boldsymbol{v}=(v,0)\in S^n$ が存在しなければ，任意の $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ に対し，

$$\int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x,u)dx - \int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x,u)dx \ (i=1,\dots,n) \tag{5}$$

の比が $\gamma_1 : \ \dots \ : \gamma_n$ になる $\boldsymbol{u}\in S^n$ で，$u_{n+1}>0$ なるものが存在する．

証明. Borsuk の対心定理により，$\nu(\boldsymbol{u})=\nu(-\boldsymbol{u})$ を満たす $\boldsymbol{u}\in S^n$ が存在する．よって，

$$\begin{aligned}\int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x,u)dx-\gamma_i u_{n+1} &= \int_{A_i\cap H_{-\boldsymbol{u}}^+} f_i(x,-u)dx+\gamma_i u_{n+1}\\ &= \int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x,u)dx+\gamma_i u_{n+1}.\end{aligned}$$

これは等式 (3) に他ならない．(b) は (a) で $\gamma_i=0$ をとればよい．(c) の仮定により $u_{n+1}\neq 0$ なので，(a) から求める比率が得られる．$u_{n+1}<0$ のときは，$-\boldsymbol{u}$ を改めて $\boldsymbol{u}$ とすればよい．∎

定理 1 で $f_i(x,u)=1/\mu(A_i)$ をとると，次の定理 2 が得られる．ただし，

$$\rho_i(\boldsymbol{u}) := \frac{\mu(A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^+)}{\mu(A_i)}.$$

(b) がハムサンドイッチ定理であり，(a) と (c) がその拡張に当たる．

定理 2 (a) 任意の $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ に対し，次の等式を満たす $\boldsymbol{u}=(u,u_{n+1})\in S^n$ が存在する．

$$\rho_i(\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}=\gamma_i u_{n+1}. \tag{6}$$

特に，どの γ_i も $-1/2$ と異なるときは，$-1<u_{n+1}<1$ が成立する．

(b) $A_1,\dots,A_n$ の測度を同時に 2 等分する超平面が存在する．

(c) $A_1,\dots,A_n$ の測度を同時に 2 等分する原点を通る超平面が存在しなければ，$-1/2$ と異なる任意の $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ に対し，

$$\rho_1(\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}\ :\cdots:\rho_n(\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}=\gamma_1\ :\cdots:\ \gamma_n \tag{7}$$

を満たす $\boldsymbol{u}\in S^n$ で，$0<u_{n+1}<1$ なるものが存在する．特に，$\gamma_1=\cdots=\gamma_n=c$ $(0<c\le 1/2)$ をとると，

$$\frac{1}{2}<\rho_1(\boldsymbol{u})=\cdots=\rho_n(\boldsymbol{u})<\frac{1}{2}+c\ (\le 1) \tag{8}$$

を満たす $\boldsymbol{u}\in S^n$ で，$0<u_{n+1}<1$ なるものが存在する．

証明． $\rho_i(\boldsymbol{u})$ を ρ_i と書くことにすると，(3) の左辺は $\rho_i - (1-\rho_i) = 2\rho_i - 1$ となり，(6) が得られる．もし $u_{n+1} = 1$ ならば，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = \emptyset$ なので $\rho_i = 0$ となり，(6) から $\gamma_i = -1/2$．もし $u_{n+1} = -1$ ならば，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = A_i$ なので $\rho_i = 1$ となり，(6) から $\gamma_i = -1/2$ となる．どちらも仮定に矛盾である．故に $-1 < u_{n+1} < 1$.

(b) は $\gamma_i = 0$ をとり，(a) を適用すればよい．(c) (6) で $u_{n+1} = 0$ ならば，$H_{\boldsymbol{u}}$ は $\mathbb{R}^n$ の原点を通る超平面であり，$\rho_1 = \cdots = \rho_n = 1/2$ なので，$A_1, \ldots, A_n$ を同時に 2 等分することになり，(c) の仮定に矛盾である．よって，$u_{n+1} \neq 0$ となり，(6) から求める比率が得られる．また，u_{n+1} が負の場合は，$-\boldsymbol{u}$ を改めて $\boldsymbol{u}$ とすればよい．特に，$\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = c$ $(0 < c \leq 1/2)$ をとれば，$0 < u_{n+1} < 1$ から (8) が得られる． ∎

注意 1 全ての γ_i を同じ値 $0 < c \leq 1/2$ としたとき，(6) から，

$$\rho_i(\boldsymbol{u}) = c\, u_{n+1} + \frac{1}{2}$$

となる．$0 < u_{n+1} < 1$ は存在のみが保証されていて，その値は不明なので，分割比 $\rho_i(\boldsymbol{u})$ の値も不明である．これが本稿のタイトルに「等分割以外の可能性」と記した理由である．

注意 2 [2, 3, 4, 5] は出版年順に参考文献に挙げたが，[3, 5] が最初に得られた結果で，[2] でそれを改良した．さらに [4] で [3, 5] と別のアプローチをとり，本稿では [4] の手法を利用した．

参　考 文 献

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, **20** (1933), 177–190.

[2] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to parametric optimization, *Linear and Nonlinear Analysis*, **9**, No. 3 (2023) 245-252.

[3] 川崎英文，Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用，数理解析研究所講究録 2274「木村寛，青山耕治，非線形解析学と凸解析学の研究」．(2024) 1 月，146–152.

[4] H. Kawasaki, An antipodal theorem for parametric optimization problems, *Bulletin of informatics and cybernetics*, **56**, No. 4 (2024) 1-8. `https://doi.org/10.5109/7178785`

[5] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to nonlinear programming, to appear in *J. of the Operations Research Society of Japan*, **68**, No. 1, (2025).

[6] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theorey, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.

[7] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, Berlin Heidelberg, (2008).