On non-cooperative n-person games with set payoffs
（n 人非協力集合値ゲームについて）

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
弘前大学　大学院　理工学研究科
Graduate school of Science and Technology, Hirosaki University

荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke) *　木村　寛（KIMURA, Yutaka）†
金　正道（KON, Masamichi）‡

1　はじめに

ゲーム理論は Neumann-Morgenstern [17] および Nash [15, 16] によって創始されて以来、経済学, 経営学やオペレーションズ・リサーチなどの意思決定の分野で重要な役割を果たしてきた。ゲーム理論を現実の問題に適用しようとするとき、利得の値を正確に知ることが困難である状況によく直面する。しかし、利得の正確な値を知ることは困難かもしれないが、利得の値を近似的にまたはある程度の不確実性を伴って知ることはできる。そのような状況のいくつかのモデル化が提案されている。

Harsanyi [6] は、利得が確率変数によって与えられるゲームとして、Bayesian ゲームを定義した。Aghassi and Bertsimas [1] は、利得は不確実でありプレイヤーはその分布情報をもたない場合の行列ゲームとしてロバストゲームを考え、数理計画におけるロバスト最適化法を基にその性質を調べた。Verma and Kumar [18] およびその参考文献では、は区間利得をもつ行列ゲームが考えられ、線形計画アプローチを基にその行列ゲームを解くいくつかの方法が提案されている。Maeda [14] において、線形計画アプローチでは均衡戦略の概念が明確に定義されていないことが指摘され、集合利得をもつ双行列ゲームに対して 4 種類の Nash 均衡戦略の概念が定義された。本論文では、Maeda [14] のモデルを採用し、それを集合利得をもつ n 人非協力ゲームに拡張する。

* (*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)
† (*E-mail:* **yutaka@akita-pu.ac.jp**)
‡ (*E-mail:* **masakon@hirosaki-u.ac.jp**)

本論文では、集合値利得をもつ n 人非協力ゲームを考える。ここで、各プレイヤーの利得は ℓ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^\ell$ における空でないコンパクト集合によって与えられる。まず、$\mathbb{R}^\ell$ の空でない部分集合すべての集合上のいくつかのタイプの集合順序関係を定義する。次に、これらの順序を用いてそのゲームの Nash 均衡戦略の概念を 4 種類定義し、それらをスカラー利得をもつ n 人非協力ゲームの Nash 均衡戦略によって特徴づける。そのスカラー利得をもつ n 人非協力ゲームは、集合利得をスカラー化関数を用いてスカラー化することによって導かれる。

そのために、本論文は以下のように構成される。第 2 節では、集合順序関係に関するいくつかの定義や記号を準備する。第 3 節では、集合のスカラー化関数を 4 種類定義し、それらの性質を調べる。第 4 節では、集合利得をもつ n 人非協力ゲームを定式化し、そのゲームの Nash 均衡戦略の概念を 4 種類定義し、それらをスカラー利得をもつ n 人非協力ゲームの Nash 均衡戦略によって特徴づける。最後に、第 5 節において結論と今後の課題について述べる。

2　集合順序関係

本節では、集合順序関係に関するいくつかの定義や記号を準備する。$\mathbb{R}^\ell$ を ℓ 次元ユークリッド空間とし、$\mathbb{R}^\ell_+$ を $\mathbb{R}^\ell$ の非負象限とする。集合 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ に対して、$\mathrm{cl}(A)$ は A の閉包を表し、$\mathrm{int}(A)$ は A の内部を表す。$\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ を $\mathbb{R}^\ell$ の空でない部分集合すべての集合とし、$\mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ を $\mathbb{R}^\ell$ の空でないコンパクト部分集合すべての集合とする。$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\}$$

と定義する。

定義 2.1. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して、以下の集合順序関係を定義する。

$$A \preceq_L B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathbb{R}^\ell_+$$

$$A \preceq_U B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B - \mathbb{R}^\ell_+$$

$$A \preceq B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} A \preceq_L B, A \preceq_U B$$

$$A \prec_L B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(A) + \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$$

$$A \prec_U B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B) - \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$$

$$A \prec B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} A \prec_L B, A \prec_U B$$

$$A \precneqq B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} A \prec_L B, A \preceq_U B \text{ or } A \preceq_L B, A \prec_U B$$

定義 1 において

$$A \precneqq B \Leftrightarrow A \preceq B, A \neq B$$

であることに注意する。二項関係 $\preceq_L$, $\preceq_U$ および $\preceq$ は反射的かつ推移的になるが、反対称的ではない。実際、一般には、$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して

$$A \preceq_L B, B \preceq_L A \Leftrightarrow A + \mathbb{R}^\ell_+ = B + \mathbb{R}^\ell_+$$
$$A \preceq_U B, B \preceq_U A \Leftrightarrow A - \mathbb{R}^\ell_+ = B - \mathbb{R}^\ell_+$$

となる。よって、$\preceq_L$, $\preceq_U$ および $\preceq$ は $\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ 上の擬順序になる。一方、二項関係 $\prec_L$, $\prec_U$, $\prec$ は推移的になる。$\precneqq$ は、すべての閉集合の集合上の二項関係とすると推移的になるが、$\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ 上の二項関係とすると推移的にならない。

集合順序関係 $\preceq$ および $\prec$ は Young [19] によって導入され、黒岩-田中環-Ha [11] において、$\preceq_L, \preceq_U, \prec_L$ および $\prec_U$ が集合最適化問題に対して用いられた。さらに、前田 [14] によって集合利得をもつ双行列ゲームに対して用いられた。これらの集合順序間の関係や他の順序に関しては、Jahn-Ha [9] を参照のこと。

定義 2.2 ([14])**.** $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ とし、$A \in \mathcal{A}$ とする。

(i) A が集合順序 $\preceq$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$A' \in \mathcal{A}, A \preceq A' \Rightarrow A' \preceq A$$

となるときをいう。

(ii) A が集合順序 $\precneqq$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$\nexists \overline{A} \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \precneqq \overline{A}$$

であるときをいう。

(iii) A が集合順序 $\prec$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$\nexists \overline{A} \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \prec \overline{A}$$

であるときをいう。

定義 2.3 ([3])**.** K を実ベクトル空間 X の凸集合とする。集合値写像 $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ が K 上で凹 [L-凹, U-凹] であるとは、それぞれの $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in K$, $\lambda \in [0, 1]$ に対して、以下が成り立つときである。

$$\lambda F(\boldsymbol{x_1}) + (1-\lambda) F(\boldsymbol{x_2}) \preceq [\preceq_L, \preceq_U] F(\lambda \boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2})$$

定義 2.4 ([8])**.** X, Y を距離空間とする。集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が

(i) x_0 で閉 (Hogan の意味での上半連続) であるとは、任意の列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x_0$ でかつ $\{y_n\}$ が $y_n \in F(x_n)$ であるとき、$y_n \to y_0$ となる $y_0 \in Y$ があるときは $y_0 \in F(x_0)$ が成り立つときに言う。

(ii) x_0 で開 (Hogan の意味での上半連続) であるとは、任意の列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x_0$ かつ $y_0 \in F(x_0)$ であるとき、$y_n \in F(x_n)$ かつ $y_n \to y_0$ となるような列 $\{y_n\}$ が存在するときに言う。

集合値写像 F が X 上で連続であるとは、F がそれぞれの $x \in X$ で上半連続かつ下半連続であるときに言う。

3 集合のスカラー化

まずは、ベクトル最適化問題における Pareto 最適解を特徴づけるのに有用な Gerstewitz 関数（双対形）を紹介する。

補題 3.1 ([4])**.** $\boldsymbol{k^0} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$ とする。そのとき、

$$\psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}} : Y \to [-\infty, \infty), \qquad \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(\boldsymbol{y}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \boldsymbol{y} \in \{t\boldsymbol{k^0}\} + \mathbb{R}^\ell_+\}$$

は *well-defined* である。さらに、$\psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}$ は連続であり、正斉次性、優加法性が成り立つ。また、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で以下が成り立つ。

$$\{\boldsymbol{y} \in Y | \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(\boldsymbol{y}) \geq \lambda\} = \{\lambda\boldsymbol{k^0}\} + \mathbb{R}^\ell_+, \qquad \{\boldsymbol{y} \in Y | \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(\boldsymbol{y}) > \lambda\} = \{\lambda\boldsymbol{k^0}\} + \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+).$$

$\psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}$ は、狭義 $\mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$-増加関数 ($b - a \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+) \Rightarrow \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(a) < \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(b)$) である。

本節では、$\mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ 上の実数値関数を 4 種類定義し、それらの性質を調べる。

定義 3.2. $\psi : \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell) \to \mathbb{R}$ をスカラー化関数とする。

(i) ψ が L-単調増加であるとは

$$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell), A \preceq_L B \Rightarrow \psi(A) \leq \psi(B)$$

となるときをいう。

(ii) ψ が U-単調増加であるとは

$$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell), A \preceq_U B \Rightarrow \psi(A) \leq \psi(B)$$

となるときをいう。

(iii) ψ が L-狭義単調増加であるとは

$$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell), A \prec_L B \Rightarrow \psi(A) < \psi(B)$$

となるときをいう。

(iv) ψ が U-狭義単調増加であるとは

$$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell), A \prec_U B \Rightarrow \psi(A) < \psi(B)$$

となるときをいう。

次に定義するスカラー化関数は、Gerstewitz 関数の拡張である（[2, 4, 7, 13]）。$\boldsymbol{k}_0 \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$ とする。$k = L, U$ に対して、スカラー化関数 $\phi^k(\cdot;\boldsymbol{k}_0) : \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell) \to \mathbb{R}$ を各 $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して

$$\phi^k(A;\boldsymbol{k}_0) = \sup\{t \in \mathbb{R} : \{t\boldsymbol{k}_0\} \preceq_k A\}$$

と定義する。

補題 3.3 ([14]). $\boldsymbol{k}_0 \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $\phi^L(\cdot;\boldsymbol{k}_0) : \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell) \to \mathbb{R}$ は L-単調増加かつ L-狭義単調増加になる。

(ii) $\phi^U(\cdot;\boldsymbol{k}_0) : \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell) \to \mathbb{R}$ は U-単調増加かつ U-狭義単調増加になる。

木村-田中謙輔-田中環 [12] の系 1 は、集合値写像の半連続性があるスカラー化関数（周辺関数）へ遺伝することを述べたものである。[12] の系 1 において、f を Gerstewitz の非線形スカラー化関数 [4] の双対形とすると、以下が分かる。

補題 3.4 ([3]). X を線形位相空間、$\boldsymbol{k^0} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$ とする。$F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ が X 上で連続であるとする。すると、下記の *2* つの集合の非線形スカラー化関数は連続である。

$$\phi^L(F(x);\boldsymbol{k^0}) = \inf_{y \in F(x)} \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(y)$$

$$\phi^U(F(x);\boldsymbol{k^0}) = \sup_{y \in F(x)} \psi_{\mathbb{R}^\ell_+,\boldsymbol{k^0}}(y)$$

4　集合利得をもつ n 人非協力ゲームとその均衡戦略

本節では、集合利得をもつ n 人非協力ゲームを定式化し、そのゲームの Nash 均衡戦略の概念を 4 種類定義し、それらをスカラー利得をもつ n 人非協力ゲームの Nash 均衡戦略によって特徴づける。まず

$$N = \{1, 2, \cdots, n\}$$

をプレイヤーの集合とする。次に、各 $i \in N$ に対して

$$S_i = \{1, 2, \cdots, m_i\}$$

をプレイヤー i のすべての純戦略の集合とし

$$X_i = \left\{ (x^{(i)}_1, x^{(i)}_2, \cdots, x^{(i)}_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}_+ : \sum_{k=1}^{m_i} x^{(i)}_k = 1 \right\}$$

をプレイヤー i のすべての混合戦略の集合とする。

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

とする。また、各 $i \in N$ に対して、$u_i : S \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ をプレイヤー i の利得関数（集合値写像）とよび

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S$$

に対して

$$u_i(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$$

は、各プレイヤー $j \in N$ が純戦略 $k_j \in S_j$ をとったときのプレイヤー i の利得を表す。さらに、各 $i \in N$ に対して、$f_i : X \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ を各 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \in X$ に対して

$$f_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S} x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \cdots x_{k_n}^{(n)} u_i(k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

と定義し、f_i をプレイヤー i の期待利得関数（集合値写像）とよぶ。ここで

$$\boldsymbol{x}_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_{m_j}^{(j)}), \quad j \in N$$

である。各プレイヤー $i \in N$ は、集合順序関係 $\preceq$ に関して $f_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を最大にしたい（なるべく大きくしたい）ということを仮定する。

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

とする。このとき

$$\Gamma = (N, X, \boldsymbol{f})$$

を**集合利得をもつ n 人非協力ゲーム (n-person non-cooperative game with set payoffs)** とよぶ。各 $i \in N$ に対して

$$\mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i}) = \{f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) : \boldsymbol{x}_i \in X_i\}, \quad \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$$

とする。ここで

$$X_{-i} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

であり、$\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ は

$$\boldsymbol{x}_{-i} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \in X_{-i}$$

であり

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \in X$$

である。各 $i \in N$ および各 $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ に対して

$$\mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\preceq}, \quad \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\precneqq}, \quad \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\prec}$$

をそれぞれ集合順序関係 $\preceq, \precneqq$ および $\prec$ に関する $\mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})$ のすべての極大元の集合とする。定義より、各 $i \in N$ および各 $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ に対して

$$\mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\preceq} \subset \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\precneqq} \subset \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i})^{\prec}$$

となることが示される ([3] の Proposition 3.1 を参照のこと)。

定義 4.1 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム Γ の **Nash 均衡戦略 (Nash equilibrium strategy)** であるとは、任意の $i \in N$ に対して

$$f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*) \preceq f_i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*), \quad \forall \boldsymbol{x}_i \in X_i$$

となるときをいう。ここで

$$\boldsymbol{x}_{-i}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*)$$

である。このとき

$$(f_1(\boldsymbol{x}^*), f_2(\boldsymbol{x}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}^*)) = (f_1(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_{-1}^*), f_2(\boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_{-2}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}_n^*, \boldsymbol{x}_{-n}^*))$$

をゲーム Γ の**値 (value)** とよぶ。

定義 4.2 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム Γ の**極大 Nash 均衡戦略 (maximal Nash equilibrium strategy)** であるとは

$$\begin{aligned}(f_1(\boldsymbol{x}^*), f_2(\boldsymbol{x}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}^*)) &= (f_1(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_{-1}^*), f_2(\boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_{-2}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}_n^*, \boldsymbol{x}_{-n}^*)) \\ &\in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*)^{\preceq} = \mathcal{F}_1(\boldsymbol{x}_{-1}^*)^{\preceq} \times \mathcal{F}_2(\boldsymbol{x}_{-2}^*)^{\preceq} \times \cdots \times \mathcal{F}_n(\boldsymbol{x}_{-n}^*)^{\preceq}\end{aligned}$$

のときをいう。

定義 4.3 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム Γ の**パレート Nash 均衡戦略 (Pareto Nash equilibrium strategy)** であるとは

$$\begin{aligned}(f_1(\boldsymbol{x}^*), f_2(\boldsymbol{x}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}^*)) &= (f_1(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_{-1}^*), f_2(\boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_{-2}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}_n^*, \boldsymbol{x}_{-n}^*)) \\ &\in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*)^{\precneqq} = \mathcal{F}_1(\boldsymbol{x}_{-1}^*)^{\precneqq} \times \mathcal{F}_2(\boldsymbol{x}_{-2}^*)^{\precneqq} \times \cdots \times \mathcal{F}_n(\boldsymbol{x}_{-n}^*)^{\precneqq}\end{aligned}$$

のときをいう。

定義 4.4 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム Γ の**弱パレート Nash 均衡戦略 (weak Pareto Nash equilibrium strategy)** であるとは

$$\begin{aligned}(f_1(\boldsymbol{x}^*), f_2(\boldsymbol{x}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}^*)) &= (f_1(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_{-1}^*), f_2(\boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}_{-2}^*), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}_n^*, \boldsymbol{x}_{-n}^*)) \\ &\in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*)^{\prec} = \mathcal{F}_1(\boldsymbol{x}_{-1}^*)^{\prec} \times \mathcal{F}_2(\boldsymbol{x}_{-2}^*)^{\prec} \times \cdots \times \mathcal{F}_n(\boldsymbol{x}_{-n}^*)^{\prec}\end{aligned}$$

のときをいう。

$\psi^k : \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell) \to \mathbb{R}, k = L, U$ をスカラー化関数とし

$$\lambda_i^k \in \mathbb{R}_+, \quad k = L, U,\ i \in N$$
$$\lambda_i^L + \lambda_i^U = 1, \quad i \in N$$

とする。このとき、各 $i \in N$ に対して、$g_i : X \to \mathbb{R}$ を各 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \in X$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}; \psi^L, \psi^U, \lambda_i^L, \lambda_i^U) = \lambda_i^L \psi^L(f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i})) + \lambda_i^U \psi^U(f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}))$$

と定義する。また

$$\boldsymbol{g} = (g_1(\cdot, \cdot; \psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U), g_2(\cdot, \cdot; \psi^L, \psi^U, \lambda_2^L, \lambda_2^U), \cdots, g_n(\cdot, \cdot; \psi^L, \psi^U, \lambda_n^L, \lambda_n^U))$$

とする。このとき、ゲーム Γ に対して、スカラー利得をもつ n 人非協力ゲーム

$$\Gamma(\psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U, \cdots, \lambda_n^L, \lambda_n^U) = (N, X, \boldsymbol{g})$$

を考える。

定義 4.5 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム $\Gamma(\psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U, \cdots, \lambda_n^L, \lambda_n^U)$ の **Nash 均衡戦略 (Nash equilibrium strategy)** であるとは、任意の $i \in N$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*; \psi^L, \psi^U, \lambda_i^L, \lambda_i^U) \le g_i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*; \psi^L, \psi^U, \lambda_i^L, \lambda_i^U), \quad \forall \boldsymbol{x}_i \in X_i$$

であるときをいう。

定義 4.6 ([3])**.** $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \in X$ がゲーム $\Gamma(\psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U, \cdots, \lambda_n^L, \lambda_n^U)$ の**狭義 Nash 均衡戦略 (strict Nash equilibrium strategy)** であるとは、任意の $i \in N$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*; \psi^L, \psi^U, \lambda_i^L, \lambda_i^U) < g_i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*; \psi^L, \psi^U, \lambda_i^L, \lambda_i^U), \quad \forall \boldsymbol{x}_i \in X_i, \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_i^*$$

であるときをいう。

定理 4.7 ([3], Theorem 4.1[14] の拡張)**.** ψ^L は L-狭義単調増加であり、ψ^U は U-狭義単調増加であるとする。$\boldsymbol{x}^* \in X$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}^*$ がゲーム $\Gamma(\psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U, \cdots, \lambda_n^L, \lambda_n^U)$ の *Nash* 均衡戦略ならば、$\boldsymbol{x}^*$ はゲーム Γ の弱パレート *Nash* 均衡戦略になる。

定理 4.8 ([3], Theorem 4.2[14] の拡張)**.** $\boldsymbol{x}^* \in X$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) ψ^L は L-単調増加かつ L-狭義単調増加であり、ψ^U は U-単調増加かつ U-狭義単調増加であるとする。また

$$\lambda_i^k \in \mathrm{int}(\mathbb{R}_+), \quad k = L, U,\ i \in N$$

であるとする。このとき、$\boldsymbol{x}^*$ がゲーム $\Gamma(\psi^L, \psi^U, \lambda_1^L, \lambda_1^U, \cdots, \lambda_n^L, \lambda_n^U)$ の *Nash* 均衡戦略ならば、$\boldsymbol{x}^*$ はゲーム Γ のパレート *Nash* 均衡戦略になる。

(ii) ψ^L は L-単調増加であり、ψ^U は U-単調増加であるとする。このとき、$\boldsymbol{x}^*$ がゲーム $\Gamma(\psi^L,\psi^U,\lambda_1^L,\lambda_1^U,\cdots,\lambda_n^L,\lambda_n^U)$ の狭義 *Nash* 均衡戦略ならば、$\boldsymbol{x}^*$ はゲーム Γ の極大 *Nash* 均衡戦略になる。

集合利得をもつ $\boldsymbol{n}$ 人非協力ゲーム $\Gamma=(N,X,\boldsymbol{f})$ について、3 節で導入した手法でスカラー化する。スカラー化したゲーム $\Gamma(\psi^L,\psi^U,\lambda_1^L,\lambda_1^U,\cdots,\lambda_n^L,\lambda_n^U)$ に角谷の不動点定理 [10] を適用して、定理 4.8 (i) を利用することで得られたのが次である。

定理 4.9 (荒谷-木村-金 [3])**.** $\boldsymbol{k^0}\in\mathrm{int}(\mathbb{R}_+^\ell)$ とする。集合値写像 $F_i:X\to\mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ はそれぞれの $i\in N$ に対して X 上で連続かつ凹写像とする。このとき、集合利得をもつ $\boldsymbol{n}$ 人非協力ゲーム $\Gamma=(N,X,F)$ には、少なくとも一つの *Pareto Nash* 均衡戦略が存在する。

上記の定理を証明する際、集合値写像の連続性について、補題 3.4 が重要な役割を果たしている。

5 結論と今後の課題

本論文では、集合利得をもつ n 人非協力ゲームを扱った。そのようなゲームに対して、集合順序関係を基に Nash 均衡戦略, 極大 Nash 均衡戦略, パレート Nash 均衡戦略および弱パレート Nash 均衡戦略を定義し、これらをスカラー利得をもつ n 人非協力ゲームの Nash 均衡戦略によって特徴づけた。そのとき、スカラー利得をもつ n 人非協力ゲームは、集合利得をスカラー化関数を用いてスカラー化することによって導いた。

本論文では集合順序 $\preceq,\precneqq$ および $\prec$ を用いて Nash 均衡戦略, 極大 Nash 均衡戦略, パレート Nash 均衡戦略および弱パレート Nash 均衡戦略を定義した。しかし、他のタイプの集合順序、例えば $\preceq_k, k=L,U$ などを用いて Nash 均衡戦略, 極大 Nash 均衡戦略, パレート Nash 均衡戦略および弱パレート Nash 均衡戦略の概念を定義することも容易にでき、集合利得をもつゲームに対する本論文の結果と同様な結果が得られる。

[3] の Remark 4.1 で触れられているが、[3] の査読者から有益なコメントを頂いた。「通常のゲームの混合戦略集合上の利得関数の連続性は純粋戦略の数が有限なら保証されるが、そのアナロジーとして、 定理 4.9 の f_i が連続であるという仮定を X の有限性から導出することはできないのか?」これは、今後の重要な研究課題の一つである。

2024 年には [3] の成果を複数の場所で発表したのだが、そこで先生方から多くの有益なご助言を頂いた。2024 年秋の OR 学会では、東京都立大の渡辺隆裕先生から、極大 Nash 均衡戦略の存在する十分条件について質問された。上記を示すためには、集合値写像により強い仮定が必要なのかも知れない。

また、本研究集会では、九州大学の川崎英文先生から「角谷の不動点定理は集合値写像に関する定理なのだから、スカラー化手法を使わずに集合値ゲームにおける Nash 均衡の存在性が言えるのではないか？」という指摘を受けた。筆者の 1 人である荒谷は、これまで集合のスカラー化手法の研究に従事していた。前田先生の先行研究 [14] でもスカラー化手法を用いているため、川崎先生の発想は全くの盲点であった。これも、筆者にとっては興味深い研究課題の一つである。

適切な集合値写像を直接定義することで考えてみたのが以下である。

補題 5.1. *Let $F_i : X \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^\ell)$ be concave on X for each $i \in N$. We define $B_{X_i} : X_{-i} \to 2^{X_i}$*

$$B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}}) := \{\hat{\boldsymbol{x}}_i \in X_i \,|F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq F_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \quad \forall \boldsymbol{x}_i \in X_i\}.$$

Then $B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$ is convex-valued for each $i \in N$.

Proof. We take arbitrary $\hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{y}}_i \in B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$ and $\lambda \in [0,1]$. Then we have

$$F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq F_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \quad \text{and} \quad F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq F_i(\hat{\boldsymbol{y}}_i, \boldsymbol{x}_{-i})$$

for all $\boldsymbol{x}_i \in X_i$. Then we have

$$\lambda F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq \lambda F_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$
$$(1-\lambda) F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq (1-\lambda) F_i(\hat{\boldsymbol{y}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

By taking the sum of the above inequalities and F_i being convex for each $i \in N$, we obtain

$$F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \lambda F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\lambda) F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq \lambda F_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\lambda) F_i(\hat{\boldsymbol{y}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

Since F_i is concave on X for each $i \in N$, we have

$$F_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq \lambda F_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\lambda) F_i(\hat{\boldsymbol{y}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \preceq F_i(\lambda \hat{\boldsymbol{x}}_i + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{y}}_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

which indicates that $\lambda \hat{\boldsymbol{x}}_i + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{y}}_i \in B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$. □

$B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$ が凸であることは示せた。$B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$ が compact で上半連続であることを示せれば、角谷の不動点定理 [10] から $B_{X_i}(\boldsymbol{x_{-i}})$ の不動点がゲーム Γ の極大 Nash 均衡戦略となる。

参考文献

[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, Mathematical Programming 107 (2006) 231–273.

[2] Y. Araya, Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization, Nonlinear Analysis 75 (2012) 3821–3835.

[3] Y. Araya, Y. Kimura, M. Kon, On non-cooperative n-person games with set payoffs Journal of the Operations Research Society of Japan 67 (2024) 65–83.

[4] C. Gerth and P. Weidner, Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization, Journal of Optimization Theory and Applications 67 (1990) 297–320.

[5] グレーヴァ香子, 非協力ゲーム理論, 知泉書館, 2011.

[6] J. Harsanyi, Games with incomplete information played by Bayesian players. Parts I, II, III, Management Science 14 (1967-68) 159–182, 320–334, 486–502.

[7] H. Hernández and L. Rodríguez-Marín, Nonconvex scalarization in set optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications 325 (2007) 1–18.

[8] W. W. Hogan: Point-to-set maps in mathematical programming, SIAM Review, 15 (1973), 591–603.

[9] J Jahn and T. X. D. Ha, New order relations in set optimization, Journal of Optimization Theory and Applications 148 (2011) 209–236.

[10] S. Kakutani: A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal, 8 (1941), 457–459.

[11] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, On cone convexity of set-valued maps, Nonlinear Analysis 30 (1997) 1487–1496.

[12] Y. Kimura, K. Tanaka, T. Tanaka: On semicontinuity of set-valued maps and marginal functions. *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Niigata, 1998)*, (World Scientific Publishers, River Edge, NJ, 1999), 181–188.

[13] T. Maeda, On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.153, 2012, pp.263–279.

[14] T. Maeda, On Characterization of Nash Equilibrium Strategy in Bi-Matrix Games with Set Payoffs, in *Set Optimization and Applications – The State of the Art* (A. H. Hamel et al. Eds.) (Springer-Verlag Berline Heidelberg, 2015), pp.313–331.

[15] J. Nash, Equilibrium points in n-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36 (1950) 48–49.

[16] J. Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics. Second Series 54 (1951) 286–295.

[17] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1944.

[18] T. Verma and A. Kumar, Fuzzy Solution Concepts for Non-cooperative Games: Interval, Fuzzy and Intuitionistic Fuzzy Payoffs, Springer, Cham, 2020.

[19] R. C. Young, The algebra of many-valued quantities, Mathematische Annalen 104 (1931) 260–290.