Generalized Brauer tree algebra 上の両側傾複体

東京理科大学大学院・理学研究科　藤野秀司
Shuji Fujino
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

東京理科大学・理学部数学科　小境雄太
Yuta Kozakai
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

東京理科大学大学院・理学研究科　髙村 航平
Kohei Takamura
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

1　導入

有限群のモジュラー表現論におけるブロックの理論では, ブロックの不足群を固定してブロックを調べることがある. Dade は, 不足群が巡回群である場合, 指標とブラウアー指標の関係を明らかにして, ブロックを調べた [Dad66]. これを受けて, Janusz は, 巡回不足群のブロックがある Brauer tree algebra と森田同値であることにより, そのブロック上の直既約加群を全て記述した [Jan69]. 一方, Erdmann は, 不足群が二面体群, 準二面体群または一般四元数群のそれぞれのブロックは, 与えられた tame 型の bound quiver algebra のリストのどれかと森田同値であり, 特に二面体型のブロックはある symmetric special biserial algebra と森田同値であることを示した [Erd90]. 更に, symmetric special biserial algebra は Brauer graph algebra である [WW85].

このように, Brauer tree algebra や Brauer graph algebra はブロックの表現論に自然と現れる. 付随する Brauer graph が tree である Brauer graph algebra を generalized Brauer tree algebra という. この多元環のクラスは Brauer tree algebra のクラスを含むものであり, tame 型の symmetric special biserial algebra のクラスに含まれるものである. よって, 巡回不足群をもつブロックの基本多元環のクラスを一般化するものである. 一方, 標数 2 の代数閉体上の 4 次交代群の群環は, 閉路を持つ Brauer graph に付随する Brauer graph algebra である [DF76]. よって, generalized Brauer tree algebra は不足群が二面体群の基本多元環のクラスを一般化するもので

はないことに注意する.

Broué 予想に代表されるように, ブロックの理論において, 導来同値による分類は重要である. 一方, Brauer tree algebra や Brauer graph algebra といったように一般の多元環に対しても導来同値の研究が行われる. 導来同値に関しては, 次の定理が重要である.

定理 1.1 ([Ric89b]) 体 k 上の有限次元多元環 Γ と Λ が導来同値であるための必要十分条件は右 Γ 加群の**傾複体** T があり $\mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}\,\Gamma)}(T)$ と Λ が同型であることである.

上の条件をみたす T に対して, Keller と Rickard は, 両側 (Λ, Γ) 加群からなる両側傾複体 C が存在して, 片側 Γ 加群に制限すると T と同型であることを示した [Kel93; Ric91]. この C により, T から得られる Λ から Γ への導来同値は, $- \otimes^L_\Lambda C$ で与えられ, 導来同値は明示的になるが, 一般に, 傾複体に対応する両側傾複体を明示的に構成することは容易ではない.

Rickard は Brauer tree algebra から星形の Brauer tree に付随する Brauer tree algebra への傾複体を構成した [Ric89a]. これに対して, Kozakai–Kunugi は, Rickard が構成した傾複体に対応する両側傾複体を明示的に構成した [KK18]. 構成方法は, Rickard の傾複体が誘導する森田型安定同値を誘導する両側加群の極小射影分解をとり, その分解の各直和因子を適当に削ることである. 一方, Membrillo-Hernández は Rickard の傾複体を generalized Brauer tree algebra 上に一般化する傾複体を構成することで, generalized Brauer tree algebra の導来同値類を分類した [Mem97]. よって, 自然な疑問として生じるのは, Kozakai–Kunugi の構成方法を一般化し, Membrillo-Hernández の傾複体に対応する両側傾複体を明示的に構成できないか?ということである.

本稿では, [FKT24] に基づき, 構成された Membrillo-Hernández の傾複体に対応する両側傾複体の明示的な構成方法について解説する. 構成方法は, Kozakai–Kunugi と同様の手法を Membrillo-Hernández の傾複体に対して適用するといったものである. しかし, 構成したものが両側傾複体であることを証明する方法が異なる. Kozakai–Kunugi の証明では, 例外頂点が中心にある星形の Brauer tree に付随する Brauer tree algebra について, それ上の単純加群を 1 つ固定し, その syzygy を偶数回とれば, 任意の単純加群が得られるという事実に依存していたが, generalized Brauer tree algebra ではそのような事実が一般には成り立たない. そこで, Chuang–Rouquier が導入した偏屈同値 [CR17] を適用することで, 構成した複体が Membrillo-Hernández の傾複体に対応する両側傾複体であることを示した. よって, 本稿では, 導来同値をはじめとして, さまざまな多元環の同値の説明の後, 特別な導来同値である偏屈同値について述べる. その後, generalized Brauer tree algebra およびその多元環上の加群について述べて, 主結果を述べる.

2 多元環の同値

本稿では, k を代数閉体, Γ, Λ を直既約な有限次元対称 k 多元環, $D^b(\Gamma)$ を右 Γ 加群の有界導来圏であるとする. Γ と Λ が**導来同値**であるとは $D^b(\Gamma)$ と $D^b(\Lambda)$ が三角圏として同値であることをいう. 傾複体と両側傾複体の定義は次のとおりである.

定義 2.1 (片側傾複体) 有限生成射影 Γ 加群からなる有界な傾複体 T が**傾複体 (tilting complex)** であるとは, 次の条件をみたすことである.

- $\mathrm{Hom}_{D^b(\Gamma)}(T, T[n]) = 0$ が任意の非零整数 n に対して成り立つ.
- T に対して, 直和, 直和因子, mapping cone, シフトをとるという 4 つの操作を有限回繰り返すことで, Γ が得られる.

定義 2.2 (両側傾複体) C は有限生成 (Λ, Γ) 両側加群でいずれの片側加群に制限しても射影的であるものからなる複体であるとする. C が**両側傾複体 (two-sided tilting complex)** であるとは, 関手 $- \otimes_\Lambda C$ が三角同値 $D^b(\Lambda) \cong D^b(\Gamma)$ を誘導することをいう.

$\mathrm{mod}\,\Gamma$ を有限生成右 Γ 加群圏であるとする. 以降, 加群といえば断らない限り有限生成右加群を表すものとする. 両側 (Λ, Γ) 加群は, $\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_k \Gamma$ 加群と同一視されるので, 断らなければ有限生成であるものとし, 両側加群が射影的であることは, 同一視された片側加群が射影的であるということである. $\underline{\mathrm{mod}}\,\Gamma$ を有限生成右 Γ 安定加群圏であるとする. $K^b(\mathrm{proj}\,\Gamma)$ を有限生成射影 Γ 加群からなる有界ホモトピー圏であるとする. この圏は cosyzygy をシフト関手とする三角圏の構造をもつ. 次に森田同値, 安定同値, 森田型安定同値について定義を述べる.

定義 2.3

- Γ と Λ が**森田同値**であるとは, 圏同値
$$\mathrm{mod}\,\Gamma \cong \mathrm{mod}\,\Lambda.$$
が成り立つことである.
- Γ と Λ が**安定同値**であるとは三角圏の同値
$$\underline{\mathrm{mod}}\,\Gamma \cong \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$$
が成り立つことである.

定義 2.4 ([Bro94]) Γ と Λ が**森田型安定同値**であるとは, ある (Λ, Γ) 両側加群 M と (Γ, Λ) 加群 N があり, 次の条件をみたすことである.

- 両側加群 M, N は左加群, 右加群として射影的である.
- 両側 (Γ, Γ) 加群の同型 $N \otimes_\Lambda M \cong \Gamma \oplus P$ をみたす射影的両側 (Γ, Γ) 加群 P が存在する.
- 両側 (Λ, Λ) 加群の同型 $M \otimes_\Gamma N \cong \Lambda \oplus Q$ をみたす射影的両側 (Λ, Λ) 加群 Q が存在する.

このとき, M は**森田型安定同値を誘導する**という.

注意 2.5 上で述べてきた同値は次の関係にある.
森田同値 $\Longrightarrow$ 導来同値 $\Longrightarrow$ 森田型安定同値 $\Longrightarrow$ 安定同値.

次の命題が, 導来同値を森田型安定同値へ関係づける.

命題 2.6 ([Ric91]) $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が導来同値であるとすると, 次の図式が自然同値を除いて可換であるような森田型安定同値を誘導する直既約な両側加群 M が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
D^b(\Gamma) \arrow[rr, "F"] \arrow[d] & & D^b(\Lambda) \arrow[d] \\
D^b(\Gamma)/\,K^b(\operatorname{proj}\Gamma) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & & D^b(\Lambda)/\,K^b(\operatorname{proj}\Lambda) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\
\underline{\operatorname{mod}}\,\Gamma \arrow[rr, "-\otimes_\Lambda M"] & & \underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda
\end{tikzcd}
.
$$

次の 2 つの命題は, 森田型安定同値から両側傾複体の復元を試みるために重要である.

命題 2.7 ([Rou95]) M を両側 (Λ,Γ) 加群で, 右加群に制限しても左加群に制限しても射影的であるものとする. このとき, M の射影被覆は, Λ 加群の単純加群の完全代表系を渡る V に関する直和により, 次で与えられる.

$$\bigoplus_V Q(V)^* \otimes_k P(V \otimes_\Lambda M)$$

ただし, P, Q はそれぞれ Γ 加群, Λ 加群の射影被覆を表すものとする.

命題 2.8 ([Rou98]) C を両側 (Λ,Γ) 加群の有界複体とし, 次数 0 の項 M を除いて, 全ての項が射影的であるとする . M が Γ と Λ の間の森田型安定同値を誘導するとする. このとき, Λ は $C \otimes_\Gamma C^*$ の直和因子であり, Γ は $C^* \otimes_\Lambda C$ の直和因子である.

次に, Chuang–Rouquier により導入された導来同値について述べる. 本稿では, [CR17] における偏屈同値の特徴付けを定義として紹介する. $\mathcal{S}$ および $\mathcal{S}'$ を, それぞれ単純 Γ 加群と Λ 加群の同型類の完全代表系であるものとする. $q : \{0,\dots,r-1\} \to \mathbb{Z}$ を写像とし, $\mathcal{S}_\bullet$ および $\mathcal{S}'_\bullet$ をそれぞれ $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ のフィルトレーション (包含の列) で, 次の条件を満たすものとする.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_\bullet &: \emptyset = \mathcal{S}_{-1} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_{r-1} = \mathcal{S}, \\
\mathcal{S}'_\bullet &: \emptyset = \mathcal{S}'_{-1} \subseteq \mathcal{S}'_0 \subseteq \mathcal{S}'_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}'_{r-1} = \mathcal{S}'.
\end{aligned}
$$

定義 2.9 ([CR17]) 導来同値 $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}'_\bullet, q)$ に関する**偏屈同値**であるとは, 任意の i に対して次が成り立つことをいう.

- $S \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ であれば, $\ell \neq -q(i)$ をみたす任意の整数 ℓ に対して, $H^\ell(F(S))$ の組成因子はすべて $\mathcal{S}'_{i-1}$ に入る.
- $S \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ であれば, Λ 加群のフィルトレーション $L_1 \subseteq L_2 \subseteq H^{-q(i)}(F(S))$ があり, L_1 と $H^{-q(i)}(F(S))/L_2$ の組成因子は $\mathcal{S}'_{i-1}$ に入り, $L_2/L_1 \in \mathcal{S}'_i - \mathcal{S}'_{i-1}$ である.
- 上の対応 $S \mapsto L_2/L_1$ は全単射 $\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1} \to \mathcal{S}'_i - \mathcal{S}'_{i-1}$ を与える.

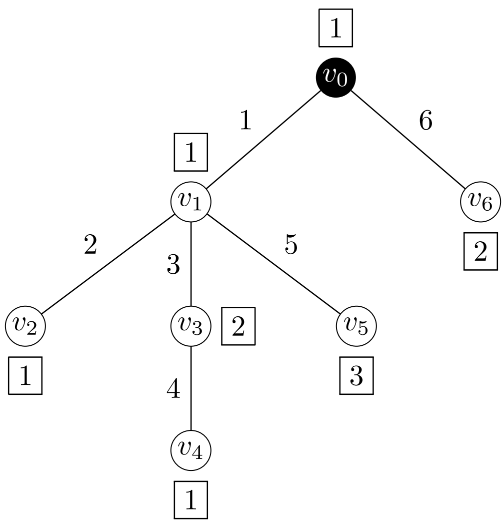
命題 2.10 ([CR17]) Λ' を対称 k 多元環であるとする. 導来同値 $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}'_\bullet, q)$ に関する偏屈同値で, $G : D^b(\Lambda) \to D^b(\Lambda')$ が $(\mathcal{S}'_\bullet, \mathcal{S}''_\bullet, q')$ に関する偏屈同値ならば, 次が成り立つ.

1. F^{-1} は $(\mathcal{S}'_\bullet, \mathcal{S}_\bullet, -q)$ に関する偏屈同値.
2. $G \circ F$ は $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}''_\bullet, q+q')$ に関する偏屈同値.
3. もし $q = 0$ ならば, F は Γ から Λ への森田同値に制限される.

3 Generalized Brauer tree algebra

Generalized Brauer tree algebra とは, Brauer graph が tree のものに付随する Brauer graph algebra である. tree 型の Brauer graph を generalized Brauer tree という. $\mathcal{T} = (V, E, m, \rho)$ が generalized Brauer tree であるとすると, (V, E) は tree であり, m は V から自然数への写像であり, 各頂点 $v \in V$ に対して, ρ_v は v から出る辺の巡回的な順番を与える. Generalized Brauer tree を図示したときは, 各頂点の m の値はそばの四角の箱の中の数字で表し, 各頂点の ρ の順番はその頂点から出る辺の反時計周りの順番が表すことにする. また, generalized Brauer tree の頂点 v_0 を固定したとき, その tree は tree with a root となる.

例 3.1 次は, v_0 から v_6 を頂点にもち, 1 から 6 を辺にもつ generalized Brauer tree algebra である. 黒く塗られた v_0 は root を表していて, 例えば, $m_{v_3} = m_{v_6} = 2$ であり, v_1 まわりの巡回的な辺の順番 ρ_{v_1} は 1, 2, 3, 5 である.



A を tree $\mathcal{T}$ に付随する generalized Brauer tree algebra であるとする. $n \in E$ に対して, P_n を辺 n に対応する直既約射影 A 加群, S_n を辺 n に対応する単純 A 加群であるとする. 辺 $n \in E$ にある頂点で, root v_0 より遠い位置にある頂点を v_n と表すとする. ρ_{v_n} に関して辺 n の次の辺を n' で表すものとする. L_n は, ボトムが S_n でトップが $S_{n'}$ である長さ最小の単列加群であるとする. 先ほどの例でこのことをみると次のようになる.

例 3.2 例 3.1 に付随する generalized Brauer tree algebra A に対して,

$$P_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & \\ 3 & & 6 \\ 5 & & \\ & 1 & \end{array}, \quad P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{array}, \quad P_3 = \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 5 & & 4 \\ 1 & & 3 \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{array}, \quad P_4 = \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{array}, \quad P_5 = \begin{array}{ccc} & 5 & \\ 1 & & \\ 2 & & \begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \\ 3 & & \\ & 5 & \end{array}, \quad P_6 = \begin{array}{cc} & 6 \\ 1 & 6 \\ & 6 \end{array},$$

$$L_1 \cong \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}, \quad L_2 \cong S_2, \quad L_3 \cong \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}, \quad L_4 \cong S_4, \quad L_5 \cong S_5, \quad L_6 \cong S_6.$$

各 $n \in E$ に対して, $v_n (\neq v_0)$ から root v_0 への経路

$$(p_n^0, p_n^1, \ldots, p_n^{d(n)-2}, p_n^{d(n)-1}).$$

をとる. ただし, $d(n)$ は v_n から v_0 への経路の長さを表す. $r = \max_{n \in E} d(n)$ とし, T_n を, 上の辺の列に対応して得られる A 加群の有界な複体であるとする:

$$\begin{array}{ccccccc} (-r+1)\mathrm{st} & & (-r+2)\mathrm{nd} & & & & (-r+d(n))\mathrm{th} \\ P_{p_n^{d(n)-1}} & \longrightarrow & P_{p_n^{d(n)-2}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{p_n^0}. \end{array}$$

定理 3.3 ([Mem97]) $T = \bigoplus_{n \in E} T_n$ に対して, 以下が成り立つ.

- 複体 T は A 加群の傾複体である.
- $\mathrm{End}(T)$ に付随する generalized Brauer tree $\mathcal{T}' = (V', E', m', \rho')$ は星形である.
- $\mathcal{T}'$ の星形の中心の頂点を root w_0 とすると, $m'_{w_0} = m_{v_0}$ である.
- $\mathcal{T}'$ の Green walk について root w_0 を除いた各頂点の m' の値からなる巡回的な数列 $\overline{m'}$ と, $\mathcal{T}$ の Green walk について root v_0 を除いた各頂点の m の値からなる巡回的な数列 $\overline{m}$ に対して, $\overline{m'}$ と $\overline{m}$ は巡回的な数列として等しい.

ここでいう generalized Brauer tree に関する Green walk とは, tree の外周を反時計周りに一筆書きしたときに現れる頂点の巡回的な順番である. 一筆書きで同じ頂点が複数回現れるとき, 最初に現れたものだけを考慮する. また, m による V の多重集合でみた像を $\widehat{m}$ とする.

この傾複体 T をもとに, Membrillo-Hernández は, 次を示した.

定理 3.4 ([Mem97]) Generalized Brauer tree $\mathcal{T}_1 = (V_1, E_1, m_1, \rho_1)$, $\mathcal{T}_2 = (V_2, E_2, m_2, \rho_2)$ それぞれ に付随する generalized Brauer tree algebra A_1, A_2 が導来同値であるための必要十分条件は, $|E_1| = |E_2|$ (辺の本数が等しい) かつ $\widehat{m_1} = \widehat{m_2}$ である.

よって, Membrillo-Hernández の傾複体 T は generalized Brauer tree algebra の導来同値類を考える上で重要である.

例 3.5 例 3.1 の generalized Brauer tree $\mathcal{T} = (V, E, m, \rho)$ に付随する generalized Brauer tree algebra A について,

$$\begin{array}{cccccccc} & & -2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\ T_1 & : & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ T_2 & : & P_1 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ T_3 & : & P_1 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & 0 \\ T_4 & : & P_1 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_4 \\ T_5 & : & P_1 & \longrightarrow & P_5 & \longrightarrow & 0 \\ T_6 & : & P_6 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

とすると

$$T = \bigoplus_{n\in E} T_n \quad : \quad P_1^{\oplus 5} \oplus P_6 \longrightarrow P_2 \oplus P_3^{\oplus 2} \oplus P_5 \longrightarrow P_4$$

は Membrillo-Hernández の傾複体を与える. $\mathcal{T}$ の Green walk は $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ からなる巡回的な順番である (例えば, $v_6, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ と等しい). ここから, v_0 を除いて各頂点を m で送ると, 巡回的な数列 $\overline{m} = 1, 1, 2, 1, 3, 2$ (例えば, $2, 1, 1, 2, 1, 3$ と等しい) を得る. よって, 定理 3.3 により, $\mathrm{End}(T)$ が付随する generalized Brauer tree $\mathcal{T}' = (V', E', m', \rho')$ は星形であり, 中心 w_0 に対して, $m'_{w_0} = m_{v_0} = 1$ であり, それ以外の点の m' の値は反時計周りに $1, 1, 2, 1, 3, 2$ である.

4 主結果

3 章の設定を引継ぐものとする. B を A と導来同値な多元環 $\mathrm{End}(T)$ であるとし, generalized Brauer tree $\mathcal{T}$ の辺 n に対して, Q_n を n に対応する直既約射影 B 加群, V_n を n に対応する単純 B 加群であるとする.

$r = \max_{n\in E} d(n)$ とし, $i \in \{-1, 0, 1, \dots, r-1\}$ に対して,

$$\mathcal{S}_i = \{S_n \in \mathcal{S} \mid d(n) \geq r - i\}$$

と定めると, 次の単純 A 加群の同型類の完全代表系 $\mathcal{S}$ に関するフィルトレーション

$$\mathcal{S}_\bullet : \emptyset = \mathcal{S}_{-1} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_{r-1} = \mathcal{S}$$

が得られる. 次の 2 つの命題は Chuang–Rouquier の decreasing perversities に従うことで得られる. 特に, tree with a root が階層構造をもつことから, 帰納法を適用することができる.

命題 4.1 ([FKT24]) $F = \mathrm{Hom}^\bullet_A(T, -) : D^b(A) \to D^b(B)$ は

$$\mathcal{S}_i = \{S_n \in \mathcal{S} \mid d(n) \geq r - i\}, \qquad \mathcal{S}'_i = \{V_n \in \mathcal{S}' \mid S_n \in \mathcal{S}_i\}$$

で定義される A, B 上の単純加群の完全代表系 $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ のフィルトレーション $\mathcal{S}_\bullet$, $\mathcal{S}'_\bullet$ と写像 q

$$\begin{array}{cccc} q & : & \{-1, 0, \ldots, r-1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \cup & & \cup \\ & & i & \longmapsto & -i \end{array}$$

に関して偏屈同値である.

命題 4.2 ([FKT24]) $S_n \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ に対して, $F^{-1}(V_n)$ は $D^b(A)$ において L_n の i シフト $L_n[i]$ に同型である.

ここで, $W^* := \mathrm{Hom}_k(W, k)$ を B 加群 W の双対 B^{op} 加群であるとし, $\Omega\, U$ を A 加群 U の射影被覆のカーネル, つまり syzygy であるとする. $\Omega^n U := \Omega\, \Omega^{n-1} U$ を $n \geq 1$ に対して n 回 U の syzygy をとったものとする. 双対的に, cosyzygy を定義する.

命題 2.6 により, T が誘導する森田型安定同値を誘導する直既約な両側 (B, A) 加群を M とする. $P^\bullet$ を両側 (B, A) 加群 M の極小射影分解であるとする. $\Omega\, M$ が再び森田型安定同値を誘導すること [Rou01] や, 単純 Λ 加群 V に対して $\Omega\,(V \otimes_\Lambda M)$ と $V \otimes_\Lambda \Omega\, M$ が同型であること [KK18], および命題 2.6 と 2.7 から, $P^\bullet$ は次のようになる.

$$P^{-t} = \begin{cases} M & (t = 0), \\ \bigoplus_{n \in E} Q_n^* \otimes_k P(\Omega^{t-1+d(n)-r}\, L_n) & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

この各項から次のように直和因子を削ると, $P^\bullet$ の部分複体 C を得られる.

$$C^{-t} = \begin{cases} M & (t = 0), \\ \bigoplus_{n \in E,\ d(n) \leq r-t} Q_n^* \otimes_k P(\Omega^{t-1+d(n)-r}\, L_n) & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

この C は, 実際には Membrillo-Hernández の傾複体 T に対応する両側傾複体である.

定理 4.3 ([FKT24]) 複体 C は両側 (B, A) 加群の複体であり, C を片側 A 加群に制限すると, $D^b(A)$ において T と同型である.

証明の方針は次の通りである. C の定め方と命題 4.2 から,

$$V_n \otimes_B C \cong L_n[r - d(n)] \cong F^{-1}(V_n)$$

である. このことと, 命題 2.8 や [Rou98] から, C が両側傾複体であることが示される. 偏屈同値の定義から, 関手 $- \otimes_B C$ は F^{-1} と同じフィルトレーションと関数に関する偏屈同値であることがわかる. よって, 命題 2.10 から, $- \otimes_B C$ と F の合成は自己森田同値に制限される.

例 **4.4** 例 3.1 の generalized Brauer tree に付随する generalized Brauer tree algebra を A とすると, 例 3.5 の T は A 上の Membrillo-Hernández の傾複体である.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & & -2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\
\cdots & & Q_1^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_1) & & Q_1^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_1) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
\cdots & & Q_2^* \otimes_k P(L_2) & & Q_2^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_2) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
\cdots & & Q_3^* \otimes_k P(L_3) & & Q_3^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_3) & & \\
 & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & M \\
\cdots & & Q_4^* \otimes_k P(\Omega L_4) & & Q_4^* \otimes_k P(L_4) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
\cdots & & Q_5^* \otimes_k P(L_5) & & Q_5^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_5) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
\cdots & & Q_6^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_6) & & Q_6^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_6) & &
\end{array}
$$

は T が誘導する森田型安定同値を誘導する両側加群 M の射影分解であり,

$$
\begin{array}{ccccc}
-2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\
Q_1^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_1) & & Q_1^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_1) & & \\
\oplus & & \oplus & & \\
 & & Q_2^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_2) & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & Q_3^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_3) & & \\
 & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & M \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & Q_5^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_5) & & \\
 & & \oplus & & \\
Q_6^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_6) & & Q_6^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_6) & &
\end{array}
$$

は T に対応する有界な両側傾複体である.

References

[Bro94] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, Finite Dimensional Algebras and Related Topics (Springer Netherlands) (1994), 1–26.

[CR17] J. Chuang, R. Rouquier, *Perverse equivalences*, (2017), preprint.

[Dad66] E. C. Dade, *Blocks with cyclic defect groups*, Annals of Mathematics 84 (1966), no. 1, 20–48.

[DF76] P. W. Donovan, M.-R. Freislich, *Indecomposable representations in characteristic two of the simple groups of order not divisible by eight*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 15 (1976), no. 3, 407–419.

[Erd90] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture notes in mathematics (Springer-Verlag) (1990).

[FKT24] S. Fujino, Y. Kozakai, K. Takamura, *Two-sided tilting complexes for generalized Brauer tree algebras*, (2024), arXiv : 2405.09188.

[Jan69] G. J. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups*, Annals of Mathematics 89 (1969), no. 2, 209–241.

[Kel93] B. Keller, *A remark on tilting theory and DG algebras*, manuscripta mathematica 79 (1993), no. 1, 247–252.

[KK18] Y. Kozakai, N. Kunugi, *Two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras*, Journal of Algebra and its Applications 17 (2018), no. 12, 1850231, 26.

[Mem97] F. H. Membrillo-Hernández, *Brauer tree algebras and derived equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 114 (1997), no. 3, 231–258.

[Ric89a] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 61 (1989), no. 3, 303–317.

[Ric89b] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, Journal of the London Mathematical Society s2-39 (1989), no. 3, 436–456.

[Ric91] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, Journal of the London Mathematical Society s2-43 (1991), no. 1, 37–48.

[Rou01] R. Rouquier, *Block theory via stable and Rickard equivalences*, Symposium on Modular Representation Theory of Finite Groups (2001), 101–146.

[Rou95] R. Rouquier, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, *Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2*, vol. 212, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 512–523.

[Rou98] R. Rouquier, *The derived category of blocks with cyclic defect groups (Springer Berlin Heidelberg)*, Derived Equivalences for Group Rings (1998), 199–220.

[WW85] B. Wald, J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras*, Journal of Algebra 95 (1985), no. 2, 480–500.

Shuji Fujino 1124702@ed.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan

Yuta Kozakai kozakai@rs.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601, Japan

Kohei Takamura 1122514@alumni.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan