Characters and conjugacy classes of split extensions of finite groups

埼玉大学教育学部 飛田明彦
Akihiko Hida
Faculty of Education, Saitama University

1　有限群の指標と共役類

G を有限群, $\mathrm{Irr}(G)$ を G の複素既約指標の全体, $\mathrm{Cl}(G)$ を G の共役類の全体とする。このとき $|\,\mathrm{Irr}(G)| = |\,\mathrm{Cl}(G)|$ であり,

$$|G| = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} |C| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2$$

が成り立ち, 指標の次数 $\chi(1)$ と共役類の大きさ $|C|$ はどちらも $|G|$ の約数である。有限群の指標と共役類の関係については非常に多くの研究がなされているが, 本稿では, 次数 $\chi(1)$ と大きさ $|C|$ に着目した関係, 特にその積に関する原田予想について, 群の分裂拡大の場合を中心に考察する。

次の２つの条件を考える。

(A) 全単射

$$\varphi : \mathrm{Irr}(G) \longrightarrow \mathrm{Cl}(G)$$

で

$$\chi(1) \;\Big|\; |\varphi(\chi)| \quad (\forall \chi \in \mathrm{Irr}(G))$$

を満たすものが存在する。

(B)

$$\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1) \;\Big|\; \prod_{C \in \mathrm{Cl}(G)} |C|$$

明らかに, (A) が成り立つならば (B) は成立する。(B) は原田予想として知られている ([4])。原田予想に関しては [1] も参照いただきたい。

例 1.1. (1) $G = S_3$ を 3 次対称群とする。

$$\chi(1) = 1, 1, 2 \quad |C| = 1, 2, 3$$

であり条件 (A) が成り立つ。
(2) G を位数 2^5 の extra special 2-群とする。

$$\chi(1) = \underbrace{1, \ldots, 1}_{16}, 4$$

$$|C| = 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{15}$$

であり, (A) は成り立たないが (B) は成立している。

条件 (B), つまり原田予想の成立する群の代表例として, 対称群と一般線形群があげられる。

命題 1.2 ([5], [6], [7])**.** q を素数べき, $\mathbf{F}_q$ を q 元体とする。一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ および対称群 S_n に対して, 条件 (B) つまり原田予想が成立する。

2 Wreath 積

有限群 H が集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ に作用しているとする。集合 M に対して, H の $M^n = M \times \cdots \times M$ への作用は

$$\mu = (\mu(1), \ldots, \mu(n)) \in M^n, \ h \in H$$

$$\mu^h(i) = \mu(i^{h^{-1}})$$

で与えられる。有限群 K に対して, K^n への H の作用により半直積を構成し $G = K^n \rtimes H$ とおく。$k = |\operatorname{Irr}(K)| = |\operatorname{Cl}(K)|$ とおくと H は $[k]^n$ に作用し, $\mu \in [k]^n$ に対して $C_H(\mu) = \{h \in H \mid \mu^h = \mu\}$ とおく。Wreath 積の共役類や指標については, [2], [3] に詳細が述べられている。

定理 2.1. 条件 (A) (または (B)) が K と $C_H(\mu)$ ($\forall \mu \in [k]^n$) に対して成り立つならば, 条件 (A) (または (B)) が G に対して成り立つ。

p を素数とするとき, 対称群 S_n の Sylow p-部分群は位数 p の巡回群による wreath 積の繰り返し（の直積) として得られるので, 次が得られる。

系 2.2. P が S_n の Sylow p-部分群ならば, P に対して (A) が成り立つ。

また, 対称群に対して (B) が成り立つことより次が得られる。

系 2.3. $G = K \wr S_n$ とする。もし K について (B) が成り立つならば, G に対しても (B) が成り立つ。特に B 型の Weyl 群についても (B) が成り立つ。

3　正規可換部分群

有限群 H が有限可換群 N に作用しているとして, 半直積 $G = N \rtimes H$ を構成する。また N の指標群を $N^* = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Irr}(N)$ とおくと, H は N^* に作用し, $h \in H$, $\mu \in N^*$ に対して

$$\mu^h(x) = \mu(x^{h^{-1}})$$

である。群 A が集合 X に作用するとき, 軌道の集合を

$$X/A = \{xA \mid x \in X\}$$

とおく。この設定で次の 2 つの条件を考察する。

(C) 任意の $h \in H$ に対して全単射

$$\phi_h : C_{N^*}(h)/C_H(h) \longrightarrow (C_{N^*}(h))^*/C_H(h)$$

で

$$|z| \mid |\phi_h(z)||N : C_N(h)| \ (\forall z \in C_{N^*}(h)/C_H(h))$$

をみたすものが存在する。

(D)

$$\prod_h \prod_{z \in C_{N^*}(h)/C_H(h)} |z| \mid \prod_h \Big(\prod_{w \in (C_{N^*}(h))^*/C_H(h)} |w| \Big) |N : C_N(h)|^{k(h)}$$

ただし, h は H の共役類の代表を動き, $h \in H$ に対して, $k(h) = |C_{N^*}(h)/C_H(h)|$ である。

条件 (A), (B) の関係と同様に, 条件 (C) が成り立つならば条件 (D) も成り立つことがわかる。これらの条件について次の定理が成り立つ。

定理 3.1. $C_H(\mu)$ $(\forall \mu \in N^*)$ について (A) (または (B)) が成立し, かつ, N に対して (C) (または (D)) が成立するならば, G に対して (A) (または (B)) が成立する。

定理の応用として次が得られる。

系 3.2. N が有限群 G の可換正規部分群で, G/N が巡回群ならば G に対して (A) が成り立つ。特に G が meta cyclic 群ならば (A) が成立する。

条件 (C), (D) の成立する例として次があげられる。

命題 3.3. (1) 一般線形群 $H = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ の $N = \mathbf{F}_q^n$ への自然な作用を考えるとき H, N に対して条件 (D) が成立する。
(2) p を素数, $H = C_p \times C_p$ を位数 p^2 の基本可換群とする。H が可換群 N に作用しているとき, 条件 (D) が成立する。

$\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ においては原田予想すなわち条件 (B) が成り立つ (命題 1.2) ので, アフィン群 $\mathbf{F}_q^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ に対して (B) が成り立つことがわかる。

系 3.4. $G = \mathbf{F}_q^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ に対して条件 (B) つまり原田予想が成立する。

H が可換群の場合, 条件 (D) において, 任意の $h \in H$ に対して $C_H(h) = H$ であり取り扱いやすい。現状では $|H| = p^2$ という限られた場合しか考察できていないが, 一般に H が可換群の場合に (D) が成り立つことが期待される。もし H が可換群の場合に (D) が成り立つことが示せれば, 定理 3.1 より, 可換群の分裂拡大において条件 (B) つまり原田予想が成立することが導かれる。

予想 3.5. N と H が可換 p-群ならば (D) が成り立つ。

一方, H が可換群であっても条件 (C) が成り立つとは限らない。例 1.1 であげた位数 2^5 の extra special 2 群は $H = C_2 \times C_2$, $N = C_2 \times C_2 \times C_2$ の場合であり, 命題 3.3 より条件 (D) は成立するが, 条件 (C) は成り立っていない。H が可換群の場合, 予想 3.5 とあわせて, 条件 (C) が成り立つ作用はどのようなものであるか, という問題も興味深いものと考えられる。

References

[1] 安部利之, 千吉良直紀, 原田予想 II の解決に向けて, 数理解析研究所講究録, 2189, 77-86 (2021).

[2] D. Bernhardt, A. C. Niemeyer, F. Rober, L. Wollenhaupt, Conjugacy classes and centralisers in wreath products, Journal of Symbolic Computation 113, 97–125 (2022).

[3] G. James, A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol.16, Addison-Wesley Publishing Co. (1981).

[4] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, Bull. Inst. Math., Acad. Sin. (N.S.) 13, 383-395 (2018).

[5] A. Hida, The character degree product and the conjugacy length product for symmetric groups, preprint.

[6] A. Hida, M. Sugimoto, The character degree product and the conjugacy length product for finite general linear groups, arXiv:2501.03527.

[7] M. Sugimoto, Harada's conjecture II for finite general linear groups and unitary groups, International Journal of Group Theory, in press.