群代数のタウ傾有限性について

平前直也（京都大学）
Naoya Hiramae (Kyoto University)

1　序文

τ-傾有限代数は Demonet–伊山–Jasso によって導入された有限次元代数のクラスであり，彼らは [DIJ] で有限次元代数の τ-傾有限性が brick の有限性やねじれ類の関手的有限性と関連することを示した．さらに，相原–水野によって有限次元代数の τ-傾有限性は準傾複体の連結性（どのふたつの準傾複体も有限回の既約変異で移り合うこと）と関係があることが示唆されている（[AM, Corollary 2.11] を参照せよ）．これらの理由から，近年，様々な有限次元代数に対して τ-傾有限性が議論されている．

本稿では，正標数 $p > 0$ の代数閉体上の群代数の τ-傾有限性が p-超焦点部分群によって決定されるのではないかという予想（予想 2.17）について述べた後，一般対称群 $(C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ に対しては $p > n$ を仮定すればその予想が成り立つという [H2] の主結果（定理 4.7, 系 4.9）について説明する．

2　準備

本節では有限次元代数の τ-傾理論と τ-傾有限性について基礎的な事項を準備した後，群代数の τ-傾有限性と p-超焦点部分群の関係について説明する．以下，簡単のため，代数と書けば代数閉体 k 上の有限次元代数を表し，加群と書けば有限生成右加群を意味するものとする．また，Λ を代数とし，Λ 上の加群圏を $\operatorname{mod}\Lambda$，射影加群からなる $\operatorname{mod}\Lambda$ の充満部分圏を $\operatorname{proj}\Lambda$，$\Lambda$ の射影加群の複体からなる有界ホモトピー圏を $K^b(\operatorname{proj}\Lambda)$，$\Lambda$ の加群の複体からなる有界導来圏を $D^b(\operatorname{mod}\Lambda)$ と書く．さらに，Λ 上の加群 M に対して，M の k-双対を $DM := \operatorname{Hom}_k(\Lambda, k)$，$M$ の Auslander-Reiten translate を τM と書く（詳細は [ARS] を参照せよ）．

2.1　τ-傾理論

τ-傾理論は足立–伊山–Reiten によって導入され，彼らは [AIR] で Λ 上の basic な台 τ-傾加群と $K^b(\operatorname{proj}\Lambda)$ の basic な 2 項準傾複体と $\operatorname{mod}\Lambda$ の関手的有限なねじれ類が 1 対 1 に対応することを示した．その後，Λ 上の basic な台 τ-傾加群は加群圏や導来圏のさまざまな重要な対象と 1 対 1 に対応することが示された（Λ 上の左有限な semibrick [Asai]，$D^b(\operatorname{mod}\Lambda)$ の 2 項 simple minded collection [KY]，length heart を持

つ有界な $D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ の intermediate t-structure [BY] など）．この小節では Λ 上の台 τ-傾加群と 2 項準傾複体の対応について説明する．

定義 2.1. $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ が台 τ-傾加群であるとは，M が次の 2 つの条件を満たすことである．

(a) M は τ-rigid である，すなわち，$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$.

(b) ある $P \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ が存在して，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$ かつ $|P| + |M| = |\Lambda|$.

ただし，$|M|$ は M の直既約因子の同型類の個数を表す．なお，P を明示するときは台 τ-傾加群を (M, P) と書く．

定義 2.2. $T \in K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が傾複体（resp. 準傾複体）であるとは，T が次の 2 つの条件を満たすことである．

(a) すべての整数 $i \neq 0$（resp. $i > 0$）に対して $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)}(T, T[i]) = 0$.

(b) T の有限直和の直和因子全体からなる $K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ の充満部分圏を $\mathrm{add}\,T$ とすると，$\mathrm{add}\,T$ が三角圏として $K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ を生成する．

Rickard の結果 [R, Theorem 6.4] より，Λ と導来同値な代数はすべて $K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ の傾複体の自己準同型環として得られるため，傾複体は代数の導来同値類を調べる上で非常に重要である．相原–伊山は傾複体より広いクラスである準傾複体を定義し，準傾複体の直和因子を取りかえる「変異」という操作を導入した（詳細は [AI] を参照せよ）．変異を繰り返すことで次々と準傾複体が得られるという点で，準傾複体は傾複体よりも取り扱いやすいクラスであると言える．なお，Λ が symmetric（すなわち，両側 Λ 加群として $\Lambda \cong D\Lambda$）のとき，$T \in K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が傾複体であることと準傾複体であることは同値である（[Ai, Theorem A.4] を参照せよ）．

定義 2.3. $T = (\cdots \to T^{-1} \to T^0 \to \cdots) \in K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が 2 項複体であるとは，すべての $i \neq -1, 0$ に対して $T^i = 0$ となることである．

Krull-Schmidt 圏（例えば $\mathrm{mod}\,\Lambda$，$K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$，$D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ など）の対象 X が basic であるとは，X の直既約因子たちが互いに非同型であることを言う．Λ 上の台 τ-傾加群 (M, P) に対して，M と P がともに basic であるとき，(M, P) は basic であると言う．Λ 上の basic な台 τ-傾加群の同型類全体の集合を $\mathrm{s}\tau\text{-}\mathrm{tilt}\,\Lambda$，$K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ の basic な 2 項準傾複体の同型類全体の集合を $2\text{-}\mathrm{silt}\,\Lambda$ と書く．

定理 2.4 ([AIR, Theorem 3.2])**.** 集合 $\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda$，$2\text{-silt}\,\Lambda$ の間に以下で与えられる全単射が存在する．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & 2\text{-silt}\,\Lambda, \\ \cup & & \cup \\ (M,P) & \longmapsto & (P_1^M \oplus P \xrightarrow{(f\ 0)} P_0^M), \\ \operatorname{Cok} g & \longleftarrow\!\shortmid & (P^{-1} \xrightarrow{g} P^0). \end{array}$$

ただし，M の極小射影表示を $P_1^M \xrightarrow{f} P_0^M \to M \to 0$ とする．

2.2 τ-傾有限代数

Demonet–伊山–Jasso は代数の τ-傾有限性を導入し，τ-傾有限性は brick の有限性やねじれ類の関手的有限性と関連があることを示した．本稿ではねじれ類やその関手的有限性の定義を省略するため，加群圏の部分圏に興味のある方は [DIJ] を参照して頂きたい．

定義 2.5. $\#\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda < \infty$ のとき，Λ は τ-傾有限であると言う．

定義 2.6. $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ が brick であるとは，$\operatorname{End}_\Lambda(M) \cong k$ であることを言う．

定理 2.7 ([DIJ, Theorems 3.8 and 4.2])**.** Λ に関する以下の条件はすべて同値である．

(a) Λ は τ-傾有限である．

(b) Λ 上の brick の同型類の個数は有限である．

(c) $\operatorname{mod}\Lambda$ のすべてのねじれ類が関手的有限である．

補足 2.8. 定理 2.7 により τ-傾有限性と birck の有限性は同値なので，代数の全射準同型 $\Lambda \twoheadrightarrow \Gamma$ があるとき Γ が τ-傾無限ならば Λ も τ-傾無限である．代数の τ-傾無限性を示すためによく使われる方法として，τ-傾無限であることが知られている代数（例えば拡大 Dynkin 箙の道代数など）を商代数として構成するという方法がある．個人的な見解ではあるが，一般には代数の τ-傾有限性を示す方が τ-傾無限性を示すよりも難しい．しかし，後述の命題 2.16 にあるように，群代数の τ-傾有限性は p-超焦点部分群を計算すれば簡単に証明できるため，群代数は τ-傾有限性について議論しやすい代数のクラスであると言える．

準傾複体 $T \in K^b(\operatorname{proj}\Lambda)$ とその直既約因子 X に対して，T の直既約因子のうち X だけを取り替えて新たな準傾複体を構成する 2 つの方法があり，それぞれ左既約変

異と右既約変異と呼ばれる（[AI] を参照せよ）．$K^b(\operatorname{proj}\Lambda)$ のどの 2 つの準傾複体も有限回の既約変異で移り合うとき，Λ は準傾連結であると言う．代数 Λ が symmetric のとき，準傾連結性は「すべての導来同値類が Λ から有限回の既約変異で得られる傾複体の自己準同型環として得られる」ことを意味するため，非常に重要な性質である．代数の τ-傾有限性は準傾連結性と次のような関連がある．

命題 2.9 ([AM, Corollary 2.11] and [AMY, Proposition 3.27])**.** Λ から有限回の左既約変異で得られるすべての準傾複体 $T \in K^b(\operatorname{proj}\Lambda)$ に対して $\operatorname{End}_{K^b(\operatorname{proj}\Lambda)}(T)$ が τ-傾有限であるならば，Λ は準傾連結である．

また，symmetric な代数の導来同値は τ-傾有限性を保つのではないかという予想があり，実際に polynomial growth の場合 [MW] と Brauer graph algebra の場合 [AAC] には正しいことが証明されている．もしこの予想が正しければ，命題 2.9 より，symmetric な代数が τ-傾有限ならば準傾連結であることが従う．

2.3 群代数の τ-傾有限性と p-超焦点部分群

この小節では G を有限群，k の標数を $p > 0$ として，群代数 kG の τ-傾有限性に関して現時点で分かっていることについて説明した後，群代数 kG の τ-傾有限性と G の p-超焦点部分群の関係について述べる．

定理 2.10 ([EJR, Theorem 16])**.** Tame な群代数は τ-傾有限である．

補足 2.11. 一般には tame な代数であっても τ-傾無限になる場合があるため,定理 2.10 は群代数に特異な性質である．群代数は symmetric であるが，symmetric な代数であっても tame かつ τ-傾無限な代数は存在する（例えば [AAC, Theorem 6.7] を参照せよ）．

命題 2.12.

(a) ([AIR, Example 6.1]) G が p-群のとき，kG は τ-傾有限である．

(b) ([KK, Theorem 3.10]) N を G の指数が p-冪の正規部分群とすると，kN が τ-傾有限ならば kG も τ-傾有限である．

(c) ([H1, Theorem 3.7]) N を G の中心に含まれる p-部分群とすると，kG が τ-傾有限であることと $k[G/N]$ が τ-傾有限であることは同値である．

補足 2.13. 命題 2.12 (b) の逆は正しいと予想しているが証明できていない．後述の予想 2.17 が正しければ，より一般に，G の任意の部分群 H に対して kG が τ-傾有限ならば kH も τ-傾有限であることが証明できる．

群代数の表現型（有限表現型，tame，wild）が p-Sylow 部分群によって決定されるという古典的な結果（命題 2.14）の類似として，群代数 kG の τ-傾有限性は群 G のどのような構造によって支配されているのかという自然な疑問が考えられる．定理 2.10，命題 2.12 (b)，命題 2.14 を使えば，群代数 kG が τ-傾有限になるための十分条件を G の p-超焦点部分群の言葉で記述することができる．

命題 2.14 ([E, THEOREM in Introduction])**.** G の p-Sylow 部分群を P としたとき次が成り立つ．

(a) kG が有限表現型であることは，P が巡回群であることと同値である．

(b) kG が有限表現型ではなく tame であることは，$p = 2$ かつ P が二面体群，準二面体群，一般四元数群のいずれかに同型であることと同値である．

定義 2.15. G の p-Sylow 部分群と $O^p(G)$ の共通部分を G の p-超焦点部分群と呼ぶ．ただし，$O^p(G)$ は G の指数が p-冪の正規部分群の中で最小なものである．

命題 2.16 ([HK, Proposition 2.15])**.** G の p-超焦点部分群を R とする．次のいずれかの条件が満たされるとき，kG は τ-傾有限である．

(a) R は巡回群である．

(b) $p = 2$ かつ R が二面体群，準二面体群，一般四元数群のいずれかに同型である．

次の場合については命題 2.16 の逆も成り立つことが証明されている．

- ([H1]) $G := P \rtimes H$（P はアーベル p-群で H はアーベル p'-群）の場合
- ([HK]) $p > n$ かつ $G := (C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の場合

これらの結果から，命題 2.16 の逆が一般の場合にも成り立つのではないかと予想している．

予想 2.17. G の p-超焦点部分群を R とする．kG が τ-傾有限であることは，次のいずれかの条件が満たされることと同値である．

(a) R は巡回群である．

(b) $p = 2$ かつ R が二面体群，準二面体群，一般四元数群のいずれかに同型である．

3 自己入射的代数の τ-傾有限性と Cartan 行列の定値性

本節では主結果の証明に必要な命題を用意する．前節の記号を踏襲する．以下，Λ を自己入射的代数とし，$P_1, \dots, P_t$ を Λ 上の直既約射影加群の同型類の完全代表系，Λ 上の中山置換を $\nu \in \mathfrak{S}_t$ とする（つまり，Λ 加群としての同型 $P_i \cong D\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{\nu(i)}, \Lambda)$ が成り立つ）．Λ の Cartan 行列 $C_\Lambda \in \mathrm{Mat}_{t\times t}(\mathbb{Z})$ を

$$C_\Lambda := (\dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j))_{1\le i,j\le t}$$

で定めると，Λ の τ-傾有限性と Cartan 行列 C_Λ の定値性の間には次のような関係がある．

命題 3.1 ([H2, Proposition 3.4])**.** 自己入射的代数 Λ に対して，次の 2 つの条件を満たす非零ベクトル $v \in \mathbb{Z}^t$ が存在するならば Λ は τ-傾無限である．

(a) $\nu \cdot v = v$（つまり，v は中山置換による成分の入れ替えに関して不変である）．

(b) $v^\top C_\Lambda v \le 0$.

系 3.2 ([H2, Proposition 3.2])**.** Weakly symmetric な代数（すなわち，中山置換が恒等置換であるような自己入射的代数）Λ に対して，Λ が τ-傾有限ならば Cartan 行列 C_Λ は正定値である．

命題 3.1 や系 3.2 を用いれば，自己入射的代数 Λ の Cartan 行列を計算することで Λ の τ-傾無限性を示すことができる場合がある．

補足 3.3. 命題 3.1 と系 3.2 の逆は成り立たない．例えば，群代数の Cartan 行列は常に正定値であるが，4 節で見るように群代数は τ-傾無限になる場合もある．

例 3.4. Λ を次の箙と関係式で与えられる symmetric な代数とする：

$$\Lambda := k\left[\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=40, "a"] \arrow[r, bend left=10, "b"'] & 2 \arrow[l, bend left=10, "a"'] \arrow[l, bend left=40, "b"] \end{tikzcd}\right]/(ab-ba, a^2, b^2).$$

このとき，頂点 1, 2 にそれぞれ対応する直既約射影加群 P_1, P_2 の Loewy 列は

$$P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2\ \ 2 \\ 1 \end{array}, \quad P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 1\ \ 1 \\ 2 \end{array}$$

であるため，Cartan 行列 C_Λ は

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となり正定値ではない．したがって，系 3.2 より Λ は τ-傾無限である．

例 3.5. Λ を次の箙と関係式で与えられる自己入射的代数とする：

$$\Lambda := k\left[1 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} 2 \underset{e}{\overset{d}{\rightleftarrows}} 3\right] /(ab, ad, c^2, eb, ed, ba - de, acb, ecd).$$

（頂点 2 には c のループがある）

このとき，頂点 1, 2, 3 にそれぞれ対応する直既約射影加群 P_1, P_2, P_3 の Loewy 列は

$$P_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad P_2 = \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ & 2 & \end{matrix}, \quad P_3 = \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

となるため，Cartan 行列 C_Λ は

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，中山置換は $(1\ 3) \in \mathfrak{S}_3$ である．したがって，ベクトル $v := (1, -1, 1)^\top$ は命題 3.1 の条件を満たし，Λ は τ-傾無限であることが分かる．

4 一般対称群の群代数の τ-傾有限性

本節では k を標数 $p > 0$ の代数閉体，H を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群とし，半直積群 $(C_m)^n \rtimes H$ の群代数 $k[(C_m)^n \rtimes H]$ がいつ τ-傾有限になるかについて論じる．前節までの記号をそのまま用いる．正整数 m を $m = p^\ell m'$（ℓ は非負整数で m' は p で割り切れない正整数）と分解して，まずは $k[(C_m)^n \rtimes H]$ の代わりに $k[(C_{p^\ell})^n \rtimes H]$ を考える．群代数 $k[(C_{p^\ell})^n \rtimes H]$ は次の skew group algebra

$$\Lambda := k[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{p^\ell}, \ldots, x_n^{p^\ell}) \rtimes H$$

と同型である．ただし，$h \in H$ の $f \in k[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{p^\ell}, \ldots, x_n^{p^\ell})$ への作用は

$$f \mapsto f^h(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{h^{-1}(1)}, \ldots, x_{h^{-1}(n)})$$

によって与えられる．ここで，正次数の対称多項式全体が生成する $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルを I とし，その商を $\mathcal{C} := k[x_1, \ldots, x_n]/I$ と書く．いま $p^\ell \geq n$ を仮定すれば，$(x_1^{p^\ell}, \ldots, x_n^{p^\ell}) \subseteq I$ となることが分かり（[H2, Proposition 4.2] の証明を参照せよ），代数の間の全射準同型 $\Lambda \twoheadrightarrow \mathcal{C} \rtimes H$ を得る．以上をまとめると，次のような関係になる（ただし最後の全射は $p^\ell \geq n$ の仮定が必要）：

$$k[(C_m)^n \rtimes H] \twoheadrightarrow k[(C_{p^\ell})^n \rtimes H] \cong \Lambda \twoheadrightarrow \mathcal{C} \rtimes H. \tag{4.1}$$

Skew group algebra $\mathcal{C} \rtimes H$ は自己入射的であり，次の事実が分かっている（[H2] の小節 4.1 と 4.2 を参照せよ）．

- $\mathcal{C} \rtimes H$ 上の単純加群の同型類全体の集合 $\mathrm{sim}\,\mathcal{C} \rtimes H$ と kH 上の単純加群の同型類全体の集合 $\mathrm{sim}\,kH$ の間に全単射 φ が存在する．
- $\mathcal{C} \rtimes H$ 上の中山置換を ν，H の符号表現に対応する単純 kH 加群を S_{sgn} としたとき，次の可換図式が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{sim}\,\mathcal{C} \rtimes H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\nu"] & \mathrm{sim}\,kH \arrow[d, "S_{\mathrm{sgn}} \otimes_k -"] \\ \mathrm{sim}\,\mathcal{C} \rtimes H \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{sim}\,kH. \end{tikzcd}$$

- $\mathrm{IBr}\,H$ で H の既約 p-Brauer 指標全体の集合を表し，$\lambda \in \mathrm{IBr}\,H$ に対応する直既約射影 kH 加群を P_λ と書く．このとき，$\mathcal{C} \rtimes H$ の Cartan 行列 $C_{\mathcal{C} \rtimes H}$ は

$$C_{\mathcal{C} \rtimes H} = ((\mathfrak{S}_n : H) \cdot \dim_k P_\lambda \cdot \dim_k P_\mu)_{\lambda,\mu \in \mathrm{IBr}\,H} \tag{4.2}$$

  で与えられる．

以上の事実と命題 3.1 を用いることで $\mathcal{C} \rtimes H$ が τ-傾無限になるための十分条件を得る．

命題 4.1 ([H2, Proposition 4.8])**.** $\#\mathrm{IBr}\,H \geq \min\{p, 3\}$ のとき，$\mathcal{C} \rtimes H$ は τ-傾無限である．

$\#\mathrm{IBr}\,H \geq \min\{p, 3\}$ を満たす場合に対して，命題 3.1 の条件を満たすベクトル v を具体的にどのように取るのか、いくつかの例を見てみる．

例 4.2. $p = 2$, $n = 3$, $H = \mathfrak{S}_3$ のとき，kH 上の単純加群の同型類は 2 つあり，自明表現に対応する 1 次元の単純加群 S_{triv} と標準表現に対応する 2 次元の単純加群 S_{std} である．S_{triv} の射影被覆 P_{triv} は 2 次元であり，S_{std} は自分自身が射影的であることから $P_{\mathrm{std}} = S_{\mathrm{std}}$ は 2 次元である．よって，式 (4.2) より $\mathcal{C} \rtimes H$ の Cartan 行列は

$$C_{\mathcal{C} \rtimes H} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

である．また，$p = 2$ より $S_{\mathrm{triv}} = S_{\mathrm{sgn}}$ であるから，中山置換は恒等置換である．したがって，ベクトル $v := (1, -1)^\top$ は命題 3.1 の条件を満たすため，$\mathcal{C} \rtimes H$ は τ-傾無限である．

例 4.3. $p \nmid n$, $n \geq 3$, $H = C_n < \mathfrak{S}_n$ のとき，Maschke の定理より kH は半単純である．$H = C_n$ の生成元 g を固定して，1 の原始 n 乗根を $\zeta \in k^\times$ としたとき，$g \mapsto \zeta^i$ で与えられる H の 1 次元表現に対応する単純 kH 加群を S_i と書く．このとき，$\mathrm{sim}\,kH = \{S_1, \ldots, S_n\}$ であるから，$\mathcal{C} \rtimes H$ の Cartan 行列は式 (4.2) より

$$C_{\mathcal{C} \rtimes H} = (n-1)! \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる．n が奇数のとき，$S_{\mathrm{sgn}} = S_n$ は自明加群だから中山置換は恒等置換なので，ベクトル $v := (1, -1, 0, \ldots, 0)^\top$ は命題 3.1 の条件を満たす．n が偶数のとき，$S_{\mathrm{sgn}} = S_{n/2}$ より中山置換は S_i と $S_{i+n/2}$ を入れ替える置換なので，第 1 成分と第 $(1 + n/2)$ 成分が 1 で第 2 成分と第 $(2 + n/2)$ 成分が -1 で他の成分はすべて 0 のベクトル $v = (1, -1, 0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)^\top$ は命題 3.1 の条件を満たす．よって，どちらの場合でも $\mathcal{C} \rtimes H$ は τ-傾無限である．

例 4.4. $p \geq 5$, $n = 3$, $H = \mathfrak{S}_3$ のとき，実は $\mathcal{C} \rtimes H$ は例 3.5 の Λ と森田同値になるが，箙と関係式を用いずに $\mathcal{C} \rtimes H$ の Cartan 行列と中山置換を計算して $\mathcal{C} \rtimes H$ の τ-傾無限性を示すことができる．Maschke の定理より kH は半単純である．kH 上の単純加群の同型類は 3 つあり，自明表現に対応する 1 次元の単純加群 S_{triv}，標準表現に対応する 2 次元の単純加群 S_{std}，符号表現に対応する 1 次元の単純加群 S_{sgn} である．よって，式 (4.2) より $\mathcal{C} \rtimes H$ の Cartan 行列は

$$C_{\mathcal{C} \rtimes H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である．また，

$$S_{\mathrm{sgn}} \otimes_k S_{\mathrm{triv}} \cong S_{\mathrm{sgn}},\ S_{\mathrm{sgn}} \otimes_k S_{\mathrm{std}} \cong S_{\mathrm{std}},\ S_{\mathrm{sgn}} \otimes_k S_{\mathrm{sgn}} \cong S_{\mathrm{triv}}$$

なので，中山置換は S_{triv} と S_{sgn} を入れ替えて S_{std} は動かさない．したがって，ベクトル $v := (1, -1, 1)^\top$ は命題 3.1 の条件を満たすため，$\mathcal{C} \rtimes H$ は τ-傾無限である．

命題 4.1 と $p^\ell \geq n$ の仮定の下で構成される全射準同型 (4.1) から次の系が成り立つ．

系 4.5 ([H2, Corollary 4.9])**.** $p^\ell \geq n$ かつ $\#\mathrm{IBr}\, H \geq \min\{p, 3\}$ のとき，$k[(C_m)^n \rtimes H]$ は τ-傾無限である．

補足 4.6. 系 4.5 において $p^\ell \geq n$ という条件を落とすことはできない．例えば，$p = 2$ のとき $k[(C_2)^3 \rtimes C_3]$ は系 4.5 の条件 $\#\mathrm{IBr}\, H \geq \min\{p, 3\}$ を満たしているが，命題 2.16 より τ-傾有限である（$(C_2)^3 \rtimes C_3$ の p-超焦点部分群は $C_2 \times C_2$ と同型である）．

系 4.5 と命題 2.16 を使うことで次の定理が得られる．

定理 4.7 ([H2, Theorem 4.11])**.** $p^\ell \geq n$ を仮定し，H を $\mathfrak{S}_n$ の p'-部分群とする．$(C_m)^n \rtimes H$ の p-超焦点部分群を R とすると，$k[(C_m)^n \rtimes H]$ が τ-傾有限であることと R が巡回群であることは同値である．

補足 4.8. H を $\mathfrak{S}_n$ の p'-部分群，R を $(C_m)^n \rtimes H$ の p-超焦点部分群とすると，R が巡回群であることは $p \nmid m$ または $\#H \leq 2$ であることと同値である（[H2, Proposition 4.10] を参照せよ）．

定理 4.7 の応用例として，一般対称群 $(C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$（すなわち $H = \mathfrak{S}_n$ の場合）の群代数 $k[(C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n]$ が τ-傾有限になるための条件を与えることができる．

系 4.9. $p > n$ のとき，一般対称群 $(C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の p-超焦点部分群を R とすれば，$k[(C_m)^n \rtimes \mathfrak{S}_n]$ が τ-傾有限であることと R が巡回群であることは同値である．

補足 4.10. 補足 4.8 より，系 4.9 の設定の下では，R が巡回群であることは $n \leq 2$ であることと同値である．

謝辞

本研究集会において，発表を勧めてくださった越谷重夫先生，並びに発表の機会をくださった飛田明彦先生に心より感謝申し上げます．

参考文献

[AAC] T. Adachi, T. Aihara, and A. Chan, *Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras*, Math. Z., Volume 290 (2018), Issue 1–2, 1–36.

[AIR] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math., Volume 150 (2014), Issue 3, 415–452.

[AMY] T. Adachi, Y. Mizuno, and D. Yang, *Discreteness of silting objects and t-structures in triangulated categories*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), Volume 118 (2019), Issue 1, 1–42.

[Ai] T. Aihara, *Tilting-Connected Symmetric Algebras*, Algebr. Represent. Theory, Volume 16 (2013), Issue 3, 873–894.

[AI] T. Aihara and O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. (2), Volume 85 (2012), Issue 3, 633–668.

[AM] T. Aihara and Y. Mizuno, *Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type*, Algebra Number Theory, Volume 11 (2017), Issue 6, 1287–1315.

[Asai] S. Asai, *Semibricks*, Int. Math. Res. Not. IMRN, Volume 2020 (2020), Issue 16 , 4993–5054.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math., Volume 36, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[BY] T. Brüstle and D. Yang, *Ordered exchange graphs*, Advances in Representation Theory of Algebras, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2013), 135–193.

[DIJ] L. Demonet, O. Iyama, and G. Jasso, *τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2019), no. 3, 852–892.

[EJR] F. Eisele, G. Janssens, and T. Raedschelders, *A reduction theorem for τ-rigid modules*, Math. Z. 290 (2018), Issue 3–4, 1377–1413.

[E] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Lecture Notes in Math., Volume 1428, Springer-Verlag, Berlin (1990).

[H1] N. Hiramae, *Reduction theorem for support τ-tilting modules over group algebras*, arXiv:2211.04030.

[H2] N. Hiramae, *τ-Tilting finiteness of group algebras over generalized symmetric groups*, arXiv:2405.10726.

[HK] N. Hiramae and Y. Kozakai, *τ-Tilting finiteness of group algebras of semidirect products of abelian p-groups and abelian p'-groups*, arXiv:2405.10021.

[KY] S. Koenig and D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras*, Doc. Math., Volume 19 (2014), 403–438.

[KK] R. Koshio and Y. Kozakai, *Normal subgroups and support τ-tilting modules*, J. Math. Soc. Japan Advance Publication 1–27 (2024).

[MW] K. Miyamoto and Q. Wang, *On τ-tilting finiteness of symmetric algebras of polynomial growth*, arXiv:2207.03079.

[R] J. Rickard, *Morita Theory for Derived Categories*, J. London Math. Soc. (2), Volume 39 (1989), Issue 3, 436–456.