有限群の元の位数に関する和と deflation 写像について

近畿大学大学院 総合理工学研究科 小島 悠靖
Yuya Kojima
Faculty of Science and Engineering,
Graduate School of Science and Engineering,
Kindai University

概要

近年の研究により，有限群 G の元の位数に関する量の和と G の構造との間の関係性が明らかになってきている．本稿では，元の位数に関する量の和の，係数拡大した Burnside 環を用いた表示を，Chigira 先生，Oda 先生との共同研究 [4] に基づいて紹介し，講演では触れなかった，有限群の元の位数に関する量の和の，マーク行列を利用した計算方法を述べる．

1 先行研究との関わり

G を有限群とする．G の位数を $|G|$，$g \in G$ の位数を $\mathrm{o}(g)$ で表す．2009 年の Amiri と Jafarian Amiri，Isaacs の研究により，有限群の構造とその元の位数の和 $\psi(G) = \sum_{g \in G} \mathrm{o}(g)$ との間の関連性が示唆された [2]．その後，様々な研究者によって，元の位数の和，もしくはこれに関連する量による有限群の特徴付けが調べられている．2 つ例を挙げよう．

- 任意の有限群 G に対して，
$$\psi(G) \leq \frac{211}{1617}\psi(C_{|G|})$$
が成り立ち，等号成立は $G \cong A_5 \times C_m$ $(\gcd(m, 30) = 1)$ であるとき，かつそのときに限る [1, Main Theorem]．ここで，C_m $(m \in \mathbb{N})$ は位数 m の巡回群を表す．
- 有限群 G と実数 r, s に対して，$R_G(r, s) = \sum_{g \in G} \dfrac{\mathrm{o}(g)^s}{\varphi(\mathrm{o}(g))^r}$ とおく．このとき，任意の $r < 0$ に対して，
$$R_G(r, r) \leq R_{C_{|G|}}(r, r)$$
が成り立ち，等号成立は G が冪零であるとき，かつそのときに限る [5, Theorem 4]．

今回，我々は，$\psi(G)$ などの有限群の元の位数に関する量の和を，係数拡大した Burnside 環の中で表示する方法を得た．また，この系として，元の位数に関する和が行列計算により得られることを発見した．

2 準備

G を有限群，k を標数 0 の体とする．G の部分群全体の集合を $\mathrm{S}(G)$ と書き，$\mathrm{S}(G)$ 上の同値関係 $=_G$ を

$$H =_G K \iff \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gHg^{-1} = K \quad (H, K \leq G)$$

で定める．さらに，商集合 $\mathrm{S}(G)/{=_G}$ を s_G で表し，s_G の完全代表系を (s_G) と表す．

G 集合 X の同型類を $[X]$ で表す．推移的 G 集合の同型類全体 $\mathcal{B}_G$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$$\mathrm{B}(G) = \langle [G/H] \mid H \in (\mathrm{s}_G) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

を考える．$H, K \leq G$ に対して，G/H と G/K の直和の同型類 $[(G/H) \sqcup (G/K)]$ を $[G/H] + [G/K]$ とみなすことにより，任意の有限 G 集合の同型類は $\mathrm{B}(G)$ の元だと思える．さらに，$\mathrm{B}(G)$ における積 $\times$ を

$$[G/H] \times [G/K] = [G/H \times G/K]$$

と定めれば，$\mathrm{B}(G)$ は $[G/G]$ を単位元とする可換環となる．この $\mathrm{B}(G)$ を G **の Burnside 環**（Burnside ring of G）と呼ぶ．本稿では，$k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{B}(G)$ を $k\mathrm{B}(G)$ で表す．

$H \leq G$ とする．任意の G 集合 X に対して，その H における固定点集合 $\{\, x \in X \mid \forall h \in H (hx = x) \,\}$ を X^H で表す．対応 $[G/K] \mapsto \left|(G/K)^H\right|$ $(K \leq G)$ を線形に拡張して得られる $\mathrm{B}(G)$ から $\mathbb{Z}$ への写像を Φ_H で表す．本稿では，任意の $u \in k\mathrm{B}(G)$ に対して，$(k \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi_{\mathbf{1}})(u)$ を $|u|$ で表す．

N を G の正規部分群とする．任意の G 集合 X に対して，その N 軌道全体の集合 $N\backslash X$ への G/N の作用が自然に定まる．実際，$gN.Nx := N(gx)$ $(gN \in G/N, Nx \in N\backslash X)$ とすればよい．したがって，$\mathrm{B}(G)$ から $\mathrm{B}(G/N)$ への **deflation 写像** $\mathrm{Def}^G_{G/N}$ が

$$\mathrm{Def}^G_N([X]) = [N\backslash X]$$

によって定まる．本稿では，$k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Def}^G_{G/N} \colon k\mathrm{B}(G) \to k\mathrm{B}(G/N)$ を $k\mathrm{Def}^G_{G/N}$ で表す．

Poset $\langle \mathrm{S}(G), \leq \rangle$ の Möbius 関数 $\mu\colon\ \mathrm{S}(G) \times \mathrm{S}(G) \to \mathbb{Z}$ は，帰納的に

$$\mu(K, H) = \begin{cases} 1 & (K = H) \\ -\displaystyle\sum_{K \leq L < H} \mu(K, L) & (K < H) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義される．この μ を用いることにより，$k\mathrm{B}(G)$ の原始的冪等元を具体的に記述することができる．

補題 2.1 (Gluck [6], Yoshida [7])　$H \leq G$ に対して，$k\mathrm{B}(G)$ の元 e^G_H を

$$e^G_H = \frac{1}{|\mathrm{N}_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K|\, \mu(K, H)\, [G/K]$$

で定める．このとき，$\{\, e^G_H \mid H \in (\mathrm{s}_G) \,\}$ は $k\mathrm{B}(G)$ の原始的冪等元全体の集合である．

これまでに定義した写像による e_H^G たちの像は以下のように計算される．

補題 2.2　$H, K \leq G$ に対して

$$(k \otimes \Phi_K)\,(e_H^G) = \begin{cases} 1 & (H =_G K) \\ 0 & (H \neq_G K) \end{cases}$$

である．

補題 2.3 (Bouc [3, Theorem 5.2.4.4])　$H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ に対して，

$$\mathrm{Def}_{G/N}^G(e_H^G) = \frac{(\mathrm{N}_G(HN) : HN)}{(\mathrm{N}_G(H) : H)} m_{H,H\cap N} e_{HN/N}^{G/N}$$

である．ここで，$N \trianglelefteq G$ に対して

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{X \leq G \\ XN = G}} |X|\,\mu(X, G)$$

である．

$m_{G,N}$ の性質はいくつか知られているが，ここでは，特に本稿で扱う性質のみを準備しておく．その他の性質については，Bouc の *Biset Functors for Finite Groups* [3] が詳しい．

補題 2.4 (Bouc [3, Proposition 5.6.1])　任意の有限群 G に対して，

$$m_{G,G} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(|G|)}{|G|} & (G\text{: cyclic}) \\ 0 & (G\text{: non-cyclic}) \end{cases}.$$

3　主結果

a を s_G から k への写像，$\mathcal{S}$ を s_G の部分集合とする．また，$[H]_G \in \mathrm{s}_G$ の a による像を a_H と表すことにする．このとき，$\sigma_a^{\mathcal{S}} \in k\mathrm{B}(G)$ を

$$\sigma_a^{\mathcal{S}} = \sum_{H \in (\mathrm{s}_G)} a_H e_H^G$$

と定める．特に，$\mathcal{S} = \mathrm{s}_G$ のときは，$\sigma_a^{\mathcal{S}}$ を σ_a^G と表す．

定理 3.1 (C–K–O [4, Theorem 1.1])　上述の設定の下，任意の $N \trianglelefteq G$ に対して

$$\left| k\mathrm{Def}_{G/N}^G\, \sigma_a^{\mathcal{S}} \right| = \frac{1}{|N|} \sum_{g \in \mathcal{S}'} a_{\langle g \rangle}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{S}' = \{\, g \in N \mid [\langle g \rangle]_G \in \mathcal{S} \,\}$ である．

証明　補題 2.3 より,

$$
\begin{aligned}
k\mathrm{Def}^G_{G/N}\,\sigma^{\mathcal{S}}_a &= \sum_{H\in(\mathcal{S})} a_H k\mathrm{Def}^G_{G/N}\, e^G_H \\
&= \sum_{H\in(\mathcal{S})} a_H \frac{(\mathrm{N}_G(HN):HN)}{(\mathrm{N}_G(H):H)} m_{H,H\cap N} e^{G/N}_{HN/N} \\
&= \sum_{\substack{H\in(\mathcal{S})\\ H\le N}} a_H \frac{(G:N)}{(\mathrm{N}_G(H):H)} m_{H,H} e^{G/N}_{N/N} \\
&\qquad + \sum_{\substack{H\in(\mathcal{S})\\ H\not\le N}} a_H \frac{(\mathrm{N}_G(HN):HN)}{(\mathrm{N}_G(H):H)} m_{H,H\cap N} e^{G/N}_{HN/N}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

が成り立つ．ここで，任意の $H \le G$ に対して

$$
HN/N =_G N/N \iff H \le N
$$

が成り立つから，補題 2.2 より，式 (3.1) の第 2 項目は $\Phi_{N/N}$ を作用させると 0 になる．したがって，補題 2.4 より

$$
\begin{aligned}
\left| k\mathrm{Def}^G_H\,\sigma^{\mathcal{S}}_a \right| &= \sum_{\substack{H\in(\mathcal{S})\\ H\le N}} a_H \frac{(G:N)}{(\mathrm{N}_G(H):H)} m_{H,H} \\
&= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H\in(\mathcal{S})\\ H\le N\\ H:\ \text{cyclic}}} (G:\mathrm{N}_G(H))\,\varphi(|H|)a_H
\end{aligned}
$$

となる．任意の $H \le G$ に対して $|[H]_G| = (G:\mathrm{N}_G(H))$ だから,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H\in(\mathcal{S})\\ H\le N\\ H:\ \text{cyclic}}} (G:\mathrm{N}_G(H))\,\varphi(|H|)a_H &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H\in\cup\mathcal{S}\\ H\le N\\ H:\ \text{cyclic}}} \varphi(|H|)a_H \\
&= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{\langle g\rangle\in\cup\mathcal{S}\\ g\in N}} \varphi(\mathrm{o}(g))a_{\langle g\rangle} \\
&= \frac{1}{|N|} \sum_{g\in\mathcal{S}'} a_{\langle g\rangle}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，$\cup\mathcal{S} = \bigcup_{[H]_G\in\mathcal{S}} [H]_G$ である．　■

特に，$\mathcal{S} = \mathrm{s}_G$ のときは $\mathcal{S}' = N$ なので,

$$
\left| k\mathrm{Def}^G_{G/N}\,\sigma^G_a \right| = \frac{1}{|N|} \sum_{g\in N} a_{\langle g\rangle}
$$

が分かる．

4　行列による計算方法

k 係数 Burnside 環 $k\mathrm{B}(G)$ は k 線形空間であり，$k\mathrm{Def}^G_{G/N}$，$k\otimes_{\mathbb{Z}}\Phi_{\mathbf{1}}$ はそれぞれ k 線形写像である．したがって，定理 3.1 を行列により書き換えることで，有限群の元の位数の逆数和などを行列計算により得ることができる．

$k\mathrm{B}(G)$ から **ghost ring** $k\widetilde{\Omega}(G)=k^{|\mathrm{s}_G|}$ への写像 $k\Phi$ を

$$k\Phi(u)=((k\otimes_{\mathbb{Z}}\Phi_H)(u))_{H\in(\mathrm{s}_G)}\quad(u\in k\mathrm{B}(G))$$

で定める．ただし，右辺のベクトルは縦ベクトルであるとし，(s_G) は代表元の位数の大小で順序付けられているとする．$k\Phi$ の各成分が k 線形写像なので，$k\Phi$ 自身もまた k 線形写像となる．この k 線形写像 $k\Phi$ を**マーク準同型写像**と呼ぶ．また，$k\mathrm{B}(G)$ の基底 $\mathcal{B}_G=\{\,[G/H]\mid H\in(\mathrm{s}_G)\,\}$ と $k\widetilde{\Omega}(G)$ の標準基底に関するマーク準同型写像の表現行列 $\mathrm{Tom}(G)$ を，G の**マーク行列**と呼ぶ．

命題 4.1　$\mathrm{Tom}(G)$ は可逆であり，$k\mathrm{B}(G)\cong k\widetilde{\Omega}(G)$ が成り立つ．

証明　任意の $H,K\le G$ に対して，マーク行列の (H,K) 成分 $\mathrm{Tom}(G)_{H,K}$ は

$$\left|(G/K)^H\right|=\frac{|\{\,g\in G\mid {}^gH\le K\,\}|}{|K|}$$

である．よって, 対角成分 $\mathrm{Tom}(G)_{H,H}=|\mathrm{N}_G(H)/H|$ は 0 でなく, $|H|<|K|$ ならば $\mathrm{Tom}(G)_{H,K}=0$ が成り立つ．また，$|H|=|K|$ のとき，$\mathrm{Tom}(G)_{H,K}\neq 0$ なら $H=_G K$ であるから，$\mathrm{Tom}(G)$ は可逆な上三角行列となる．■

D^G_N を $\mathrm{Def}^G_{G/N}$ の基底$\mathcal{B}_G$ と $\mathcal{B}_{G/N}$ に関する表現行列とする．このとき, $\mathrm{Def}^G_{G/N}([G/H])=[G/HN]$ であるから,

$$(D^G_N)_{K,H}=\begin{cases}1 & (HN=K)\\ 0 & (HN\neq K)\end{cases}$$

が成り立つ．また，M^G_H を $k\otimes\Phi_H\colon k\mathrm{B}(G)\to k$ の基底 $\mathcal{B}_G$ と $\{1\}$ に関する表現行列とすると,

$$M^G_{\mathbf{1}}=\begin{pmatrix}(G:\mathbf{1}) & \cdots & (G:G)\end{pmatrix},$$
$$M^G_G=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる．したがって，$a=(a_H)_{H\in(\mathrm{s}_G)}$ とみなすことで，定理 3.1 より

$$M^{G/N}_{\mathbf{1}}D^G_N\,\mathrm{Tom}(G)^{-1}a=\frac{1}{|N|}\sum_{g\in N}a_{\langle g\rangle}$$

を得る．

例 4.1　$a_H=(G:H)$ とすれば,

$$M^{G/G}_{\mathbf{1}}D^G_G\,\mathrm{Tom}(G)^{-1}a=\sum_{g\in G}\frac{1}{\mathrm{o}\,(g)}$$

を得る.

$$D_G^G = (1, 1, \ldots, 1),$$
$$M_{\mathbf{1}}^{G/G} = (1)$$

であるから,

$$\sum_{g \in G} \frac{1}{\mathrm{o}\,(g)} = \sum_{H \in (\mathrm{s}_G)} (\mathrm{Tom}(G)^{-1} a)_H$$

が分かる．これは，$(G : H)$ を並べた縦ベクトル $((G : H))_{H \in (\mathrm{s}_G)}$ の左から，マーク行列の逆行列 $\mathrm{Tom}(G)^{-1}$ を掛けることで，G の元の位数の逆数和が得られることを表している.

関連して，$(G : N) = p$ のとき，deflation 写像に関する次の関係式が得られる.

定理 4.2　任意の $v \in k\mathrm{B}(G)$ に対して

$$\frac{p \left| k\mathrm{Def}_{G/G}^G \, v \right| - \left| k\mathrm{Def}_{G/N}^G \, v \right|}{p - 1} = \left| (k\mathrm{Def}_{G/N}^G \, v)^{G/N} \right| \tag{4.1}$$

が成り立つ.

証明　$(k \otimes \Phi_{\mathbf{1}}) \circ k\mathrm{Def}_{G/N}^G$ の表現行列 $M_{\mathbf{1}}^{G/N} D_N^G$ を変形すると,

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{1}}^{G/N} D_N^G &= \left(p\delta_{H \leq N} + \delta_{H \not\leq N} \right)_{H \in (\mathrm{s}_G)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \frac{p-1}{p} \left(p\delta_{H \leq N} \right) \\ &= M_{\mathbf{1}}^{G/G} D_G^G + \frac{p-1}{p} \left(M_{\mathbf{1}}^{G/N} D_N^G - M_{G/N}^{G/N} D_N^G \right) \end{aligned}$$

が分かる．ここで，H に関する命題 $P(H)$ に対して，$\delta_{P(H)}$ は $P(H)$ が真であるときに 1，偽であるときに 0 となる記号である．したがって，写像の等式

$$(k \otimes \Phi_{\mathbf{1}}) \circ k\mathrm{Def}_{G/N}^G = (k \otimes \Phi_{\mathbf{1}}) \circ k\mathrm{Def}_{G/G}^G + \frac{p-1}{p} \left((k \otimes \Phi_{\mathbf{1}}) \circ k\mathrm{Def}_{G/N}^G - (k \otimes \Phi_{G/N}) \circ k\mathrm{Def}_{G/N}^G \right)$$

を得る．この等式を変形すれば，式 (4.1) を得る.　■

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を頂いたことに感謝申し上げます．また，研究代表者である飛田氏におきましては，研究集会を開催して頂いたことに感謝申し上げるとともに，大変有益なご指摘を頂いたことに，この場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[1] Zeinab Akhlaghi, Afsane Bahri, and Behrooz Khosravi, *A result on the sum of element orders of a finite group*, Archiv der Mathematik **114** (2020), no. 1, 3–12. MR 4047654

[2] Habib Amiri, I. M. Isaacs, and S. M. Jafarian Amiri, *Sums of element orders in finite groups*, Communications in Algebra **37** (2009), no. 9, 2978–2980. MR 2554185

[3] Serge Bouc, *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1990, Springer-Verlag, Berlin, 2010. MR 2598185

[4] Naoki Chigira, Yuya Kojima, and Fumihito Oda, *An expression for values on element orders of finite groups*.

[5] Martino Garonzi and Massimiliano Patassini, *Inequalities detecting structural properties of a finite group*, Communications in Algebra **45** (2017), no. 2, 677–687. MR 3562530

[6] David Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex*, Illinois Journal of Mathematics **25** (1981), no. 1, 63–67. MR 602896

[7] Tomoyuki Yoshida, *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, Journal of Algebra **80** (1983), no. 1, 90–105. MR 690705