リース積シロー 2-部分群を持つ有限群の主 2-ブロック

千葉大学 理学研究院　越谷 重夫 (こしたに　しげお)

Shigeo Koshitani

Graduate Shool of Science, Chiba University, Japan

§1. 序文:

今回の結果は, Caroline Lassueur （ドイツ・RPTU・以前のカイザースラオターン工科大学)[1]と Benjamin Sambale (ドイツ・ハノーファー大学)[2] の二人との共同研究である. 始めたのは, 2019 年頃だから, 5 年かかった訳である. ようやく論文が出版されることとなった [6].

本題に入る. 唐突ではあるが, 素数 p を止めておく. 有限群のモジュラー表現論における未解決予想の一つに, 「与えられた有限 p-群 P を固定したとき, 不足群に P を持つ有限群の p-ブロックは森田同値を除いて有限個しか存在しない」というものがある. Peter Donovan による Donovan 予想である. ドノバン自身が書いたものは存在しないが, 1979 年アメリカ合衆国 Santa Cruz 研究集会（アメリカ数学会 Summer Institut, で J.L.Alperin が問題 (M) として発表したものである. まだ未解決である. 2 年前の同じ研究集会の時の延長線上にある話ではあるが, 今回の話題も, 最初に述べた予想, Donovan 予想より強い予想「与えられた p-群 P を固定したとき, 不足群に P を持つ有限群の p-ブロックは Puig(=splendid Morita = source algebra isomorphism) 同値を除いて有限個しか存在しない」（Puig の有限性予想, [10, (38.5)Conjecture], [8, Conjecture 6.4.2]）の部分解答についてである. ただし, 主ブロックに限っている点が弱点であるが. さて, 主役 splendid 森田同値の定義

[1]2023 年 1 月, Laudau ランダウ大学と合併して Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau 略して RPTU と名前が変わった.

[2]2023 年秋から平日は, Data scientist at DAS として働いている. しかし, 研究意欲はますます盛んで, 最初の論文が出た 2011 年から, 80 以上の価値ある論文を発表している.

をきちんとしないと, いけないのだが, サボらしてもらう[3]. 勝手な有限 p-群 P を固定する. 有限群 G, H の 2 つのブロック A, B が splendid 森田同値（= Puig 同値）とは,「P は, A, B は共通の不足群 A になっていて, その上 A の P-source algebra と B の P-source algebra が互いに interior kP-algebra として同型であること」である. source algebra とは, 森田同値での basic algebra (basic ring) に相当する. 森田理論では, 2 つの環 R, S が森田同値であるとは, それらの basic ring 達が同型であることは必要十分であったが, これの言替えにあたる. 有体に言って, splendid 森田同値で群の作用を忘れたものが森田同値になっている, という感じである. ここで, 最初に P は A, B 共通の不足群, と仮定したが, 実はこれは splendid Morita 同値の条件を見かけ上少し弱めても「結果的に A, B の不足群は同じになってしまう」という L.Puig の大きな結果があることを一つ注意しておく ([8, Proposition 9.7.1], [9, Corollary 7.4]). 2 年前の講究録に書いたことだが, 2 つのブロック A, B が単に森田同値だと, 不足群が同型にならない反例が発見されたことと比べ, 大きく違っているのは, 興味深い ([2]).

§2. 主結果

主定理 (越谷-Lassueur-Sambale [6]). まず記号として, 整数 $t \geq 0$ と素数の巾 q に対して

$$\mathrm{SL}_2^t(q) := \{A \in \mathrm{GL}_2(q) \mid \det(A)^{2^t} = 1\},$$

$$\mathrm{SU}_2^t(q) := \{A \in \mathrm{GU}_2(q) \mid \det(A)^{2^t} = 1\}.$$

と定義する. 次に k を標数 2 の代数的閉体とし, また自然数 $n \geq 2$ を固定する. さらに, G を有限群で, $P := C_{2^n} \wr C_2$ (wreath リース, 環積) をシロー 2-部分群に持つ有限群とする. このとき, kG の主 2 ブロック $B_0(kG)$ は, 以下のどれか一つの有限群 H の主 2 ブロック $B_0(kH)$ と splendid 森田同値になる. そしてこの森田同値は, スコット加群 $M :=$

[3] 申訳ない ([8, §9.7] を参照)

$\mathrm{Sc}(G \times H, \Delta P)$ で誘導されている[4]. 以下で $q > 1$ は或る素数の巾である.

- $C_{2^n} \wr C_2$;
- $(C_{2^n} \times C_{2^n}) \rtimes \mathfrak{S}_3$;
- $\mathrm{SL}_2^n(q)$ 　但し $(q-1)_2 = 2^n$;
- $\mathrm{SU}_2^n(q)$ 　但し $(q+1)_2 = 2^n$;
- $\mathrm{PSL}_3(q)$ 　但し $(q-1)_2 = 2^n$;
- $\mathrm{PSU}_3(q)$ 　但し $(q+1)_2 = 2^n$.

注意. 　シロー 2-部分群が二面体群または一般四元数群である有限群 G に対して, $G/O_{2'}(G)$ の構造は古くから決定されていた [D. Gorenstein and J.H. Walter, J. Algebra **2** (1965)]. これの自然な拡張で, シロー 2-部分群がリース群の場合にも, 同じような定理を証明しよう, と考えるのは, 自然なことである. だがこの場合には, [D. Gorenstein and J.H. Walter, J. Algebra **2** (1965)] に相当する定理を少なくとも筆者は知らなかった（有限群のモジュラー表現論多くがそうであった. [1] はあったが). これを, 共著者の一人, Benjamin Sambale が証明した（[6, Theorem 3.3]）. また, 主定理の証明には筆者と別の共同研究者 Ipek Tuvay との共同研究が必須であったことを注意したい [7]. 関連する話題として, [3, 4, 5] がある.

§3. 終わりに: 今回の研究集会の世話人 飛田明彦教授（埼玉大学）には大変世話になりました. ここに感謝の意を表します. 最後に, 2024 年 3 月に亡くなられた渡辺アツミさん（熊本大学）へ対して, 謹んで御冥福をお祈りしたいと思います. 有限群のモジュラー表現論で多大な貢献をされました. 個人的には, まだまだ沢山, Puig 理論他を教えてもらいたかったのに, 残念でなりません.

---

[4] M は, $kG \otimes_{kP} kH$ の直和因子である直既約 (kG, kH)-両側加群であって自明な $k(G \times H)$-加群 $k_{G\times H}$ が, M の top に現れるもの, として定義される. また, $\Delta P := \{(u,u) \in G \times H | u \in P\} \leq G \times H$ で, これは M の vertex になっている.

References

[1] J.L. Alperin, R. Brauer and D. Gorenstein. Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 1–261.

[2] D. García, L. Margolis and Á. del Río. Non-isomorphic 2-groups with isomorphic modular group algebras. J. reine angew. Math. **783** (2022), 269–274.

[3] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with dihedral defect groups. Math. Z. **294** (2020), 639–666.

[4] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with generalised quaternion defect groups. J .Algebra **558** (2021), 523–533.

[5] S. Koshitani, C. Lassueur and B. Sambale. Splendid Morita equivalences for principal blocks with semidihedral defect groups. Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), 41—53.

[6] S. Koshitani, C. Lassueur and B. Sambale. Principal 2-blocks with wreathed defect groups up to splendid Morita equivalence. To appear in Annals of Representation Theory. https://arxiv.org/pdf/2310.13621

[7] S. Koshitani and İpek Tuvay. Brauer indecomposability of Scott modules with wreath 2-group vertices. Rocky Mountain Journal of Mathematics **51** (2021), 1259–1280.

[8] M. Linckelmann. The Block Theory of Finite Group Algebras, vol. 1 and 2. London Math. Soc. Student Texts **91** and **92**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2018.

[9] L. Puig. On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks. Birkhäuser, Progress in Math. Vol.178 (1999).

[10] J. Thévenaz. G-Algebras and Modular Representation Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995.