A brick version of Clifford's theorem

小境 雄太 [*]　　酒井 嵐士 [†]

概 要

「クリフォードの定理」は，有限群の表現論において重要な定理であり，単純加群に関する主張である。本稿では，単純加群の一般化の概念である「ブリック」に関するクリフォードの定理が，ある条件下で成り立つことを紹介する。

1 背景

本稿では，k を体，G を有限群，N を G の正規部分群，Λ を有限次元多元環とする。加群は有限生成左加群を表すものとする。また，kG-加群 M に対して，$\mathsf{Res}\, M := \mathsf{Res}_N^G\, M$ によって，M の kN-加群への制限を表すものとする。

次の定理は，いわゆるクリフォードの定理であり，有限群の表現論において重要な定理である。

定理 1.1 ([C]). 単純 kG-加群 S に対して，$\mathsf{Res}\, S$ は半単純 kN-加群である。さらに，$\mathsf{Res}\, S = T_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus T_n^{\oplus a_n}$ (ただし，$T_1, \ldots, T_n$ は互いに非同型な単純加群) と表したとき，次が成り立つ。

(1) G は $\{T_i^{\oplus a_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ を可移に置換する。

(2) $\dim_k T_1 = \cdots = \dim_k T_n$ が成り立つ。

(3) $a_1 = \cdots = a_n$ が成り立つ。

また，単純 Λ-加群の準同型に関しては，以下のことが成り立つことが知られている。

定理 1.2 (シュアーの補題). 単純 Λ-加群 S に対して，$\mathrm{End}_\Lambda(S)$ は斜体となる。また，互いに非同型な単純 Λ-加群 S, T に対して，$\mathrm{Hom}_\Lambda(S, T) = 0$ である。

ブリック/セミブリックは，このシュアーの補題に現れる等式を用いて定義される，単純加群/半単純加群の一般化の概念である。

[*]東京理科大学 kozakai@rs.tus.ac.jp
[†]名古屋大学 m20019b@math.nagoya-u.ac.jp

定義 1.3. Λ-加群 S がブリックであるとは，$\mathrm{End}_\Lambda(S)$ が斜体となるときをいう。また，Λ-加群 M に対して，$M = S_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus S_n^{\oplus a_n}$ と直既約分解され，$S_1, \ldots, S_n$ がブリックであり，$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_i, S_j) = 0$ となるとき，M をセミブリックという。

シュアーの補題より，単純加群はブリック，半単純加群はセミブリックとなる。つまり，ブリックは単純加群の，セミブリックは半単純加群の一般化である。これらは，最近，盛んに研究されている τ-傾理論などとも密接に関係しており，重要な概念である。自然に次の疑問が生じる。

問題 1.4. クリフォードの定理は，ブリックに対しても成り立たないか？つまり，kG-加群であるブリック S に対して，$\mathsf{Res}_N^G S$ がセミブリックとなり，定理 1.1 の (1)〜(3) が成り立たないか？

残念ながら，これは一般には成り立たない（注意 3.5 を見よ）。しかし，適切な条件の下でなら，これが成り立つ。本稿では，“wide 部分圏” に関する適切な条件の下で，ブリックに対するクリフォードの定理 (定理 1.1) が成り立つことを紹介する。

2　Wide 部分圏とセミブリック

ここからは，有限生成 Λ-加群の加群圏を $\mathsf{mod}\,\Lambda$ で表し，$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏といったら，加法的な充満部分圏で同型で閉じるものとする。wide 部分圏とは，以下で定義される。

定義 2.1 (wide 部分圏)**.** $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{W}$ が wide 部分圏であるとは，以下が成り立つときをいう：

(1) 拡大で閉じる。つまり，完全列 $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ に対して，$M_1, M_2 \in \mathcal{W}$ ならば $M \in \mathcal{W}$ が成り立つ。

(2) Ker を取る操作で閉じる。つまり，任意の $M_1, M_2 \in \mathcal{W}$ および $\varphi : M_1 \to M_2$ に対して，$\mathrm{Ker}\,\varphi \in \mathcal{W}$ が成り立つ。

(3) Coker を取る操作で閉じる。つまり，任意の $M_1, M_2 \in \mathcal{W}$ および $\varphi : M_1 \to M_2$ に対して，$\mathrm{Coker}\,\varphi \in \mathcal{W}$ が成り立つ。

以下，$\mathsf{wide}\,\Lambda$ により $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の wide 部分圏全体を表すことにする。また，Λ-加群 M に対して，

$$\mathsf{add}\,M := \{X \mid X \text{ is a direct summand of } M^{\oplus n} \text{ for some integer } n\}$$

とし，Λ-加群 M_1, M_2 が add-同値であるとは，$\mathsf{add}\,M_1 = \mathsf{add}\,M_2$ が成り立つときをいう。$\mathsf{sbrick}\,\Lambda$ により，Λ 上のセミブリックの add-同値類を表すことにする。

$\mathcal{X} \subset \mathsf{mod}\,\Lambda$ に対して，Λ-加群 M が $\mathcal{X}$-filtration をもつとは，M の部分加群の列

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset X_n = M$$

が存在して，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，M_i/M_{i-1} が，ある $X_i \in \mathcal{X}$ と同型となるときをいう。また，

$$\mathsf{Filt}\,\mathcal{X} := \{X \in \mathsf{mod}\,\Lambda \mid X \text{ が } \mathcal{X}\text{-filtration をもつ}\}$$

とおく。また，Λ-加群 M に対して，M の直既約分解を $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ としたとき，

$$\mathsf{Filt}\,M := \mathsf{Filt}\{M_1, \ldots, M_n\}$$

とおく。$\mathcal{W} \in \mathsf{wide}\,\Lambda$ に対して，$S \in \mathcal{W}$ が simple object であるとは，$\mathcal{W}$ における任意の monomorphism $X \to S$ がゼロ射か同型射に限るときをいい，$\mathcal{W}$ の simple object の同型類全体を $\mathsf{sim}\mathcal{W}$ で表す。Ringle により示された次の定理は，ブリックを考えるのに役立つ。

定理 2.2 ([Rin, Section 1.2])**.** $\mathsf{wide}\,\Lambda$ と $\mathsf{sbrick}\,\Lambda$ は次の対応により一対一対応する。

$$\mathsf{sbrick}\,\Lambda \ni M \mapsto \mathsf{Filt}\,M \in \mathsf{wide}\,\Lambda,$$

$$\mathsf{wide}\,\Lambda \ni \mathcal{W} \mapsto \bigoplus_{S \in \mathsf{sim}\mathcal{W}} S \in \mathsf{sbrick}\,\Lambda.$$

3　主定理

この章では，[KS] に基づき，体 k の標数を $p > 0$ とし，問題 1.4 の 1 つの答えを述べる（$p = 0$ では，マシュケの定理より，kG が半単純環となり，ブリックと単純加群が一致するため，ブリックに関するクリフォードの定理を考える意味がない）。定理 2.2 で述べたように，kG 上のブリック S に対して，$\mathsf{Filt}\,S$ は $\mathsf{mod}\,kG$ の wide 部分圏であった。ブリックに関するクリフォードの定理は，以下のように $\mathsf{Filt}\,S$ に関するある条件の下で成り立つ。ここで，$\mathsf{mod}\,kG$ の wide 部分圏 $\mathcal{W}$ が $k[G/N] \otimes_k -$ の下で安定であるとは，任意の $X \in \mathcal{W}$ に対して，$k[G/N] \otimes_k X \in \mathcal{W}$ が成り立つときをいう。

定理 3.1 ([KS])**.** S を kG 上のブリックとする。$\mathsf{mod}\,kG$ の wide 部分圏 $\mathsf{Filt}\,S$ が $k[G/N] \otimes_k -$ の下で安定であるならば，$\mathsf{Res}\,S$ はセミブリックである。さらに，$\mathsf{Res}\,S = T_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus T_n^{\oplus a_n}$ （ただし，$T_1, \ldots, T_n$ は互いに非同型なブリック）と表したとき，次が成り立つ。

(1) G は $\{T_i^{\oplus a_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ を可移に置換する。

(2) $\dim_k T_1 = \cdots = \dim_k T_n$ が成り立つ。

(3) $a_1 = \cdots = a_n$ が成り立つ。

注意 3.2. 実は，定理 3.1 の状況で，

$$\mathsf{Ind}^{-1}(\mathsf{Filt}\,S) := \{M \in \mathsf{mod}\,kN \mid \mathsf{Ind}\,M := kG \otimes_{kN} M \in \mathsf{Filt}\,S\}$$

は $\mathsf{mod}\,kN$ の wide 部分圏となり，$\mathsf{Res}\,S$ は $\mathsf{Ind}^{-1}(\mathcal{W})$ の semisimple object である。

以下，G/N が p-群であるときを考える。一般に，任意の kG-加群 X に対して，$k_G \otimes_k X \cong X$ であり，$k[G/N] \otimes_k X \cong \mathsf{Ind}\,\mathsf{Res}\,X$ が成り立つ。また，「G/N が p-群」という仮定の下では，kG-加群 $k[G/N]$ は組成因子に自明加群 k_G のみをもつ。したがって，wide 部分圏は拡大で閉じるため，$\mathsf{mod}\,kG$ の任意の wide 部分圏は $k[G/N] \otimes_k -$ の下で不変となる。これらより，次の系を得る。

系 3.3 ([KS]). S を kG 上のブリックとする。G/N が p-群であるとき，$\mathsf{Res}\,S$ はセミブリックである。さらに，$\mathsf{Res}\,S = T_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus T_n^{\oplus a_n}$ （ただし，$T_1, \ldots, T_n$ は互いに非同型なブリック）と表したとき，次が成り立つ。

(1) G は $\{T_i^{\oplus a_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ を可移に置換する。

(2) $\dim_k T_1 = \cdots = \dim_k T_n$ が成り立つ。

(3) $a_1 = \cdots = a_n$ が成り立つ。

例 3.4. $G := \mathfrak{S}_4, N := A_4$ とする（G/N は 2-群である）。また，k を標数 2 の代数的閉体とする。このとき kG は 2 つの単純加群 k_G と S_2 をもち，kN は 3 つの単純加群 k_N, T_1, T_2 をもつ。ここで，S_2 は 2 次元単純加群であり，他の単純加群はすべて 1 次元である。また，$g := (1\ 2) \in G/N$ に対して，$gT_1 \cong T_2$ である。kG 上のすべてのブリックは以下の通りである：

$$k_G, S_2, \begin{bmatrix} S_2 \\ k_G \\ k_G \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_G \\ S_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_2 \\ k_G \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_G \\ k_G \\ S_2 \end{bmatrix}.$$

これらの kN への制限は以下のようになる：

$$\mathsf{Res}\,k_G = k_N, \mathsf{Res}\,S_2 = T_1 \oplus T_2, \mathsf{Res}\begin{bmatrix} S_2 \\ k_G \\ k_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ k_N \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} T_2 \\ k_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ k_N \end{bmatrix} \oplus g\begin{bmatrix} T_1 \\ k_N \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{Res}\begin{bmatrix} k_G \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_N \\ T_1 \oplus T_2 \end{bmatrix}, \mathsf{Res}\begin{bmatrix} S_2 \\ k_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \oplus T_2 \\ k_N \end{bmatrix}, \mathsf{Res}\begin{bmatrix} k_G \\ k_G \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_N \\ T_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} k_N \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_N \\ T_1 \end{bmatrix} \oplus g\begin{bmatrix} k_N \\ T_1 \end{bmatrix}.$$

注意 3.5. 定理 3.3 において「G/N が p-群」という仮定を外すと，定理 3.3 は一般には成り立たない。例えば，例 3.4 と同様に，

$$G = \mathfrak{S}_4, N = A_4, N_1 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

とし，代数閉体 k の標数を 2 とする。（この場合，N/N_1 は $2'$-群であり，G/N_1 は 2-群でも $2'$-群でもない。）このとき，$\begin{bmatrix} k_N \\ T_2 \end{bmatrix}$ は kN 上のブリックであるが，$\mathsf{Res}_{N_1}^{N} \begin{bmatrix} k_N \\ T_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} k_{N_1} \\ k_{N_1} \end{bmatrix}$ はセミブリックでもブリックでもない。さらに $\begin{bmatrix} k_G \\ S_2 \end{bmatrix}$ は kG 上のブリックであるが，$\mathsf{Res}_{N_1}^{G} \begin{bmatrix} k_G \\ S_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} k_{N_1} \\ k_{N_1} \oplus k_{N_1} \end{bmatrix}$ はセミブリックでもブリックでもない。

参考文献

[C] A. H. Clifford, *Representations induced in an invariant subgroup*, Ann. of Math. (2) 38 (1937), no. 3, 533–550.

[KS] Y. Kozakai, A. Sakai, *Clifford's theorem for bricks*, J. Algebra, to appear (arXiv:2312.07299).

[Rin] C. M. Ringel, *Representations of K-species and bimodules*, J. Algebra 41 (1976), no. 2, 269–302.