置換加群とブロック・イデアルのソース多元環

佐々木 洋城
Sasaki, Hiroki
北海道大学 理学研究院
Hokkaido University, Faculty of Science

1 はじめに

今回の報告はすでに口頭では発表していた（2018 日本数学会秋季総合分科会，2019 RIMS 共同研究 (公開型)「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」）結果の紹介です．以前の議論はとても難しかったのですが，ようやく，見通しよく整理できたと思うので紹介させていただいた次第です．なお，論文は [11] として発表予定です.（オンラインではすでに閲覧可能）

状況設定 以下の状況の下で考える．

(1) k は標数 $p > 0$ の代数的閉体.
(2) G は有限群で $p \bigm| |G|$ とする．直積 $G \times G$ を群環 kG に次のように作用させる：

$$(x, y)\alpha = x\alpha y^{-1} \quad ((x, y) \in G \times G,\ \alpha \in kG).$$

(3) b は kG のブロック・イデアル，(P, e_P) を極大 b-Brauer pair とする．
(4) $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{(P,e_P)}(G, b)$ を (P, e_P) に含まれる b-Brauer pairs が定義する fusion system とする．
(5) P_γ を (P, e_P) に属する local pointed group とする．P_γ は unique である．
(6) A を b のソース多元環で原始的べき等元 $i \in \gamma$ により $A = ikGi$ と表されるものとする．

$x \in G \setminus N_G(P)$ をとる．

$$R = P^x \cap P, \quad S = P \cap {}^xP$$

とおき，b-Brauer pairs (R, e_R)，$(S, e_S) \subset (P, e_P)$ をとる．さらに，$b_R = k[C_G(R)]e_R$，$b_S = k[C_G(S)]e_S$ とおく．

b-Brauer pairs $(R, e_R), (S, e_S) \subset (P, e_P)$ は x によって共役である，すなわち

$${}^x(R, e_R) = (S, e_S)$$

であると仮定する．fusion system $\mathscr{F}$ における射 $\varphi : R \to P; u \mapsto {}^x u\ (u \in R)$，$\psi : S \to P; v \mapsto v^x\ (v \in S)$ が定義される．

仮定 元 x は次の条件を満たすと仮定する．この条件を「(P, P)-icc 条件」とよぶ．

$$どの\ c \in C_G(P \cap {}^x P) に対しても\ P \cap {}^{cx} P = P \cap {}^x P.$$

結果は以下の定理 1.1，定理 1.2，系 1.3 である．

定理 1.1 状況設定 と **仮定**の下で，さらに，次のどれかが成立するならば，$k[P \times P]$-加群 $k[PxP]$ はソース多元環 A の直和因子に同型である．

(1) S は fully $\mathscr{F}$-centralized である．
(2) R は fully $\mathscr{F}$-centralized である．
(3) S は $\mathscr{F}$-quasicentric，または，これと同値であるが，R は $\mathscr{F}$-quasicentric である．

部分群 S が fully $\mathscr{F}$-centralized であることと $C_P(S)$ が b_S のデフェクト群であることとは同値である．また，部分群 S が $\mathscr{F}$-quasicentric であることとブロック・イデアル b_S がべき零ブロックであることとは同値である．

状況設定の下で次の等式が成り立つ．

$$\frac{|N_{{}^x P}(S) \cap N_P(S) C_G(S)|\,|C_P(S)|}{|S|} = \frac{|N_{P^x}(R) \cap N_P(R) C_G(R)|\,|C_P(R)|}{|R|}.$$

上の値は整数で，p^{d_1} と表す．

定理 1.2 状況設定 と **仮定**の下でさらに，S が $\mathscr{F}$-quasicentric，または，同値であるが，R が $\mathscr{F}$-quasicentric であると仮定する．b_S のデフェクト群の位数を p^{d_0} とする．このとき，次の合同式が成り立つ．

$$k[PxP]\ の\ A\ における重複度 \equiv p^{d_0 - d_1} \pmod{p^{d_0 - d_1 + 1}}.$$

系 1.3 状況設定 と **仮定**の下で，さらに，S が $\mathscr{F}$-quasicentric，または，同値でるが，R が $\mathscr{F}$-quasicentric であると仮定する．もし，さらに，S が fully $\mathscr{F}$-centralized であるか，または R が fully $\mathscr{F}$-centralized ならば，$k[PxP]$ の A における重複度は p を法として 1 に合同である．

本研究は Okuyama and Sasaki [7] の続きである．そこでは次の定理を示した．

定理 1.4 ([7, Theorem 1.2]) G，b，P，(P, e_P)，A，$\mathscr{F}$ を**状況設定**と同様とする．

$T < P$ を $\mathscr{F}$-essential 部分群とする．b-Brauer pair $(T, e_T) \subseteq (P, e_P)$ をとる．部分群 $M \leqslant N_G(T, e_T)$ で $M \geqslant N_P(T)C_G(T)$ かつ $M/TC_G(T)$ が $N_G(T, e_T)/TC_G(T)$ において strongly p-embedded であるものが存在する．

このとき，元 $x \in N_G(T, e_T) \setminus M$ に対して $P \cap {}^xP = T$ であり，$k[P \times P]$-加群 $k[PxP]$ は A の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

この定理は系 1.3 から得られる．この定理の適用例は Sasaki [10] で発表した．

2 p-置換加群

定義 2.1 kG-加群 M について

(1) 加群 M は，G-集合である k-基底をもつとき，置換加群であるという．
(2) 加群 M は，どの p-部分群 $Q \leqslant G$ についても置換 kQ-加群であるとき，p-置換加群であるという．

P が G の Sylow p-部分群ならば，kG-加群 M が p-置換加群であるためには M が kP-加群として置換加群であることが必要十分である．

補題 2.1 p-置換 kG-加群の直和因子はやはり p-置換 kG-加群である．特に，P が p-群ならば，置換 kP-加群の直和因子はやはり置換 kP-加群である．

G の部分群 H について p-置換 kH-加群の G への誘導加群も p-置換 kG-加群である．

命題 2.2 M を kG-加群とする．次は同値である：

(1) M は p-置換加群である．
(2) M は置換 kG-加群の直和因子に同型である．
(3) M は trivial source 加群（つまり，どの直既約直和因子も自明なソースをもつ）である．

定義 2.2 M を kG-加群とする．部分群 $H \leqslant G$ に対して $M^H = \{ v \in M \mid xv = v \,\forall x \in H \}$ とおく．$K \leqslant H \leqslant G$ に対して

$$\mathrm{tr}_K^H : M^K \to M^H; v \mapsto \sum_{h \in [H/K]} hv,$$

ここで，$[H/K]$ は $H/K = \{ hK \mid h \in H \}$ の完全代表系であり，上の和はそのとり方によらない．

部分群 $P \leqslant G$ に対して

$$M(P) = M^P / \sum_{Q<P} \mathrm{tr}_Q^P M^Q$$

を M の P による Brauer construction とか Brauer quotient とよぶ．P が p-部分群でなければ $M(P) = 0$ である．$M(P)$ は $k[N_G(P)/P]$-加群である．自然な全射 $\mathrm{Br}_P : M^P \to M(P)$ を Brauer 準同型とよぶ．これは $k[N_G(P)/P]$-加群の準同型である．

命題 2.3 M を p-置換 kG-加群とする．p-部分群 $P \leqslant P$ に対して（M は置換 kP-加群である）X を P-不変な k-基底とする．

(1) $\mathrm{Br}_P(X^P) = \{\, \mathrm{Br}_P(x) \mid x \in X^P \,\}$ は $M(P)$ の k-基底である．
(2) $M(P)$ は p-置換 $k[N_G(P)/P]$-加群である．
(3) $A = \mathrm{End}_k(M)$ とおく．A は kG-加群である．$A(P)$ は自然に $M(P)$ に作用し，$k[N_G(P)/P]$-加群としての同型 $A(P) \simeq \mathrm{End}_k(M(P))$ を引き起こす.

系 2.4 M が直既約 p-置換 kG-加群ならば $M(P) \neq 0$ である極大部分群 P は M の vertex である．

M が直既約 p-置換 kG-加群で P が M の vertex ならば，Brauer construction $M(P)$ は（M が p-置換加群であるということから）直既約である．さらにこれは射影的 $k[N_G(P)/P]$-加群である．さらに

命題 2.5 M を直既約 p-置換 kG-加群とする．p-部分群 $P \leqslant G$ について

$$P = \mathrm{vtx}\, M \iff M(P) \neq 0 \text{ かつ } M(P) \text{ は射影的 } k[N_G(P)/P]\text{-加群}.$$

特に，P が M の vertex ならば，$M(P)$ は M の $(G, P, N_G(P))$ に関する Green correspondent である．

補題 2.6 ([7, Lemma 2.1]) X を p-置換 kG-加群とする．$Q \leqslant G$ を p-部分群とする．直既約射影的 $k[N_G(Q)/Q]$-加群 U について，U を $k[N_G(Q)]$-加群とみてその $(G, Q, N_G(Q))$ に関する Green correspondent を Y とすると

$$Y \bigm| X \iff U \bigm| X(Q).$$

さらに，重複度は一致する．

これにより，$X(Q)$ の直既約直和因子を調べることにより X の直既約直和因子を調べることができる．

3 両側加群の同型

P，$Q \leqslant G$ を p-部分群とする．$x \in G$ について

$$R = P^x \cap Q,\ S = P \cap {}^xQ$$

とおく．${}^xR = S$ である．

補題 3.1 上の状況の下で，$y \in G$ について

$$k[P \times Q]\text{-加群として } k[PyQ] \simeq k[PxQ]$$

$$\iff$$

$$P \cap {}^xQ = P \cap {}^{cx}Q \text{ をみたすある } c \in C_G(S) \text{ により } PyQ = PcxQ \text{ となる．}$$

定義 3.1

$x \in G$ が (P, Q)-icc 条件ををみたす $\underset{\text{定義}}{\iff} \forall c \in C_G(P \cap {}^xQ)$ について $P \cap {}^xQ = P \cap {}^{cx}Q$.

従って，$x \in G$ が (P, Q)-icc 条件をみたすならばどの $c \in C_G(P \cap {}^xQ)$ についても $k[P \times Q]$-加群として $k[PcxQ] \simeq k[PxQ]$ である．

コホモロジー論の立場からは次のような意味がある．すなわち，コホモロジー環の写像

$$t_{PxQ} : H^*(Q, k) \to H^*(P, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{P \cap {}^xQ} \mathrm{con}^x \zeta$$

が 0 写像でなければ，$x \in G$ は (P, Q)-icc 条件をみたす.

icc 条件の下で，両側加群の同型を Brauer construction で判定できるのだが，それは次の補題に基づく．すなわち

補題 3.2 P，$Q \leqslant G$ を p-部分群とし，$T = P \cap Q$ とおく．元 $g \in G$ について

$$k[PgQ](\Delta(T)) \neq 0 \iff PgQ \subset PC_G(T)Q.$$

4 ブロック・イデアルのソース加群

G，b，P，(P, e_P) を**状況設定**と同様とする．

$G \times G$ は G に transitive に作用し，1 の固定部分群は

$$\Delta(G) = \{ (x, x) \mid x \in G \}$$

である．従って，$k[G \times G]$-加群としての同型

$$kG \xrightarrow{\sim} k_{\Delta(G)}^{G \times G}; x \mapsto (x, 1) \otimes 1$$

がある．すなわち，kG は p-置換 $k[G\times G]$-加群である．

ブロック・イデアル b は直既約 $k[G\times G]$-加群であり，$\Delta(P)=\{(a,a)\mid a\in P\}$ を vertex としてもつ．$G\times P\geqslant\Delta(P)$ であるから，直既約 $k[G\times P]$-加群 X で

$$X \,\Big|\, {}_{k[G\times P]}b,\quad \Delta(P)=\mathrm{vtx}\,X$$

であるものが存在する．この X を b のソース加群（source module）とよぶ．X と X' がともにブロック・イデアル b のソース加群ならば，ある $t\in N_G(P)$ によって，(b,kP)-両側加群として $X\simeq X'\otimes t$ である．

b の (b,kP)-加群としての直既約直和因子は $b^{\Delta(P)}$ の原始的べき等元 i によって，kGi と表される．その直既約 $k[G\times P]$-加群としての vertex について

$$\Delta(P)=\mathrm{vtx}\,kGi \iff \mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)\neq 0$$

であり，さらに

$$(b,kP)\text{-両側加群として } kGi\simeq kGj \iff i\sim_{U(b^{\Delta(P)})} j.$$

ここで，左辺の同値関係は $b^{\Delta(P)}$ の単数群 $U(b^{\Delta(P)})$ による共役である．従って，b のソース加群の同型類は $b^{\Delta(P)}$ の原始的べき等元 i で $\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)\neq 0$ であるものの同値類と 1 対 1 に対応する．$b^{\Delta(P)}$ の原始的べき等元の $U(b^{\Delta(P)})$ による共役の同値類を point とよぶのであった．さらに，$\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)\neq 0$ である原始的べき等元 i は local であるといい，その同値類は local point とよばれる．つまり，b のソース加群を定めるということは local point γ による pointed group P_γ を考えるということである．その point γ に属する原始的べき等元をソースべき等元とよぶ．

$\mathrm{End}_{k[G\times 1]}(kGi)^{\mathrm{op}}\simeq ikGi$ を b のソース多元環とよぶ．

local pointed group P_γ を指定して，ソースべき等元 $i\in\gamma$ をとると，$\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)\in kC_G(P)$ は原始的である．従って，$X=kGi$ の Brauer construction $X(\Delta(P))\simeq kC_G(P)\,\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)$ は直既約 $k[C_G(P)]$-加群である．いま，P_γ は (P,e_P) に属しているとすれば

$$\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)e_P=\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)$$

である．すなわち，$\mathrm{Br}_{\Delta(P)}(i)$ はブロック・イデアル $k[C_G(P)]e_P$ に属する．X も (P,e_P) に属するという．

さて，ソース多元環 $A = ikGi$ は $k[P \times P]$-加群として kG の直和因子であるから，ある $\mathscr{Y} \subset G$ により

$$(*) \qquad A \simeq \sum_{y \in \mathscr{Y}} k[PyP]$$

と直和分解される．課題は次のとおりである．

- どの $k[PxP]$（$x \in G$）が A の直和因子に同型であるか？
- その重複度はいかほどであるか？

5 ソース多元環の直和因子

直既約 $k[P \times P]$-加群 $k[PxP]$（$x \in G$）について

$$\begin{aligned} & k[P \times P]\text{-加群として } k[PxP] \text{ は } A \text{ の直和因子に同型} \\ \Longleftrightarrow \quad & k[P \times {}^xP]\text{-加群として } k[P \cdot {}^xP] = k[PxP]x^{-1} \text{ は } Ax^{-1} \text{ の直和因子に同型} \end{aligned}$$

であるから，$k[P \cdot {}^xP]$ が Ax^{-1} の直和因子に同型であるか，その重複度はいかほどであるかということを考える．

さて，$\Delta(P \cap {}^xP)$ は $k[P \cdot {}^xP]$ の vertex である．$S = P \cap {}^xP$ とおく．補題 2.6 により，W を $k[P \cdot {}^xP]$ の $(P \times {}^xP, \Delta(S), N_{P \times {}^xP}(\Delta(S)))$ に関する Green correspondent とすると

$$\mathrm{mlty}_{k[P \times {}^xP]}(k[P \cdot {}^xP], Ax^{-1}) = \mathrm{mlty}_{k[N_{P \times {}^xP}(\Delta(S))]}(W, Ax^{-1}(\Delta(S))).$$

Green correspondent W は，命題 2.5 により，Brauer construction $k[P \cdot {}^xP](\Delta(S))$ で与えられる．すなわち

$$\mathrm{mlty}_{k[N_{P \times {}^xP}(\Delta(S))]}(k[P \cdot {}^xP](\Delta(S)), Ax^{-1}(\Delta(S)))$$

を調べる．$\mathscr{Y}' = \{\, y \in \mathscr{Y} \mid k[PyP]x^{-1}(\Delta(S)) \neq 0 \,\}$ とおくと

$$Ax^{-1}(\Delta(S)) = \sum_{y \in \mathscr{Y}'} k[PyP]x^{-1}(\Delta(S)).$$

$k[PyP]x^{-1} = k[Pyx^{-1}\,{}^xP]$ であり，$\Delta(P \cap {}^xP) = \Delta(S)$ である．

$$\begin{aligned} (*2) \qquad k[Pyx^{-1}\,{}^xP](\Delta(S)) \neq 0 &\Longleftrightarrow Pyx^{-1}\,{}^xP \subset PC_G(S)\,{}^xP \\ &\Longleftrightarrow \text{ある } c \in C_G(S) \text{ により } Pyx^{-1}\,{}^xP = Pc\,{}^xP \end{aligned}$$

であることがわかる．

さて，$k[P \cdot {}^xP] \simeq k[Pyx^{-1}\,{}^xP]$ となる y を調べたいのであるが，この条件は，補題 3.1 により，ある $c \in C_G(P \cap {}^xP) = C_G(S)$ で $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ をみたすものについて $yx^{-1} \in Pc\,{}^xP$ となることと同値である．

従って，(*2) の $c \in C_G(S)$ が条件 $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ をみたせば $k[P \cdot {}^xP] \simeq k[Pyx^{-1}\,{}^xP]$ となる．

$k[PxP]$ に対して直和分解 (*) においてこのような y を探し，さらに重複度も調べたいということが課題なのであるが，x について何らかの制限をつけなければ，成果が得られない．そこで，x が (P, P)-icc 条件を満たすと仮定してみる．すなわち，

どの $c \in C_G(P \cap {}^xP) = C_G(S)$ も $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ をみたす

と仮定するのである．この仮定の下で，$k[Pyx^{-1}\,{}^xP](\Delta(S)) \neq 0$ ならば $k[P \cdot {}^xP] \simeq k[Pyx^{-1}\,{}^xP]$ となる．よって

$$Ax^{-1}(\Delta(S)) \simeq \sum_{y \in \mathscr{Y}'} k[P \cdot {}^xP](\Delta(S)).$$

すなわち

命題 5.1 状況設定と**仮定**の下で重複度は次のように記述される．

$$\mathrm{mlty}_{k[P \times {}^xP]}(k[PxP], A) = \mathrm{mlty}_{k[P \times {}^xP]}(k[P \cdot {}^xP], Ax^{-1}) = \frac{\dim Ax^{-1}(\Delta(S))}{\dim k[P \cdot {}^xP](\Delta(S))}.$$

この分母，分子の次元を調べる．

$k[N_{P \times {}^xP}(\Delta(S)))/\Delta(S)]$ は $k[P \cdot {}^xP]$ の Green correspondent である．すなわち，

$$k[P \cdot {}^xP](\Delta(S)) \precsim k[N_{P \times {}^xP}(\Delta(S)))/\Delta(S)].$$

この次元を調べる．そのため，一般に部分群 $Q \leqslant P$ と fusion system $\mathscr{F}$ における射 $\varphi : Q \to P$ に対して $\Delta_\varphi(Q)$ と N_φ を説明する．$R = \varphi(Q)$ とおき射 $\psi : R \to P; \varphi(u) \mapsto u$ を定義する．

$\Delta_\varphi(Q) = \{\, (u, \varphi(u)) \mid u \in Q \,\}$ とおく．部分群 $N_\varphi \leqslant N_P(Q)$ を次のように定義する．

$$N_\varphi = \{\, y \in N_P(Q) \mid \exists z \in N_P(R) \text{ such that } (y, z) \in N_{P \times P}(\Delta_\varphi(Q)) \,\}$$

$(y, z) \in N_P(Q) \times N_P(R)$ について

$$(y, z) \in N_{P \times P}(\Delta_\varphi(Q)) \Longleftrightarrow \varphi({}^yu) = {}^z\varphi(u) \quad \forall u \in Q.$$

補題 5.2 同じ記号の下で次が成り立つ．

(1) 射 φ が元 $x \in G$ による共役で与えられるならば ${}^xN_\varphi = N_{{}^xP}(R) \cap N_P(R)C_G(R)$ である．

(2) 写像 $N_{P \times P}(\Delta_\varphi(Q)) \to N_\varphi; (y, z) \mapsto y$ は群の全射準同型であり，その核は $1 \times C_P(R)$ である：

$$1 \to 1 \times C_P(R) \to N_{P \times P}(\Delta_\varphi(Q)) \to N_\varphi \to 1.$$

特に，位数に関する等式 $|\,N_{P \times P}(\Delta_\varphi(Q))\,| = |\,N_{{}^xP}(R) \cap N_P(R)C_G(R)\,|\,|\,C_P(R)\,|$ が成り立つ．

(3) 写像 $N_{P\times P}(\Delta_\varphi(Q)) \to N_{P\times P}(\Delta_\psi(R));\ (y, z) \mapsto (z, y)$ は群の同型である．

(4) 次の等式が成り立つ：

$$|N_{^xP}(R) \cap N_P(R)C_G(R)|\,|C_P(R)| = |N_{P^x}(Q) \cap N_P(Q)C_G(Q)|\,|C_P(Q)|.$$

元の状況に戻って，補題 5.2 を P, R, S に適用して次が得られる．

補題 5.3 次の等式が成り立つ．

(1)

$$|N_{^xP}(S) \cap N_P(S)C_G(S)|\,|C_P(S)| = |N_{P^x}(R) \cap N_P(R)C_G(R)|\,|C_P(R)|.$$

(2)

$$\dim k[P\cdot{}^xP](\Delta(S)) = \frac{|N_\varphi|\,|C_P(S)|}{|S|} = \frac{|N_{^xP}(S) \cap N_P(S)C_G(S)|\,|C_P(S)|}{|S|}.$$

定理 5.4 **状況設定**と**仮定**の下で重複度は次の等式で与えられる．

$$\mathrm{mlty}_{k[P\times P]}(k[PxP], A) = \frac{|S|\dim Ax^{-1}(\Delta(S))}{|N_\varphi|\,|C_P(S)|} = \frac{|S|\dim Ax^{-1}(\Delta(S))}{|N_{^xP}(S) \cap N_P(S)C_G(S)|\,|C_P(S)|}.$$

注意 5.1 (1) A が置換 $k[P \times P]$-加群であるということのみに基づいている．

(2) $\dfrac{\dim Ax^{-1}(\Delta(S))}{|C_P(S)|}$ は x が (P, P)-icc 条件をみたさなくても整数であることがわかる．

(3) x が (P, P)-icc 条件をみたすとき，$\dfrac{\dim Ax^{-1}(\Delta(S))}{|C_P(S)|}$ は $\dfrac{|N_\varphi|}{|S|}$ で割りきれ，その商が重複度になるのである．

$$j = \mathrm{Br}_{\Delta(R)}(i) \in (b_R)^{\Delta(N_P(R))}, \quad \ell = \mathrm{Br}_{\Delta(S)}(i) \in (b_S)^{\Delta(N_P(S))}$$

とおくと，$Ax^{-1}(\Delta(S)) = \mathrm{Br}_{\Delta(S)}((ikG\,{}^xi)^{\Delta(S)})$ であるから，$Ax^{-1}(\Delta(S)) \simeq \ell k[C_G(S)]\,{}^xj$. 上の定理を書き直せば

定理 5.5 **状況設定**と**仮定**の下で重複度は次の等式で与えられる．

$$\mathrm{mlty}_{k[P\times P]}(k[PxP], A) = \frac{|S|\dim \ell k[C_G(S)]\,{}^xj}{|N_{^xP}(S) \cap N_P(S)C_G(S)|\,|C_P(S)|}.$$

従って，$\ell k[C_G(S)]\,{}^xj \neq 0$ となるような場合に重複度が 1 以上であって，$k[PxP]$ は A の直和因子に同型になる．その例として次が得られる．

系 5.6 b_S と $\ell k[C_G(S)]\ell$ が森田同値であるか b_R と $jk[C_G(R)]j$ が森田同値であるならば $k[PxP]$ は A の直和因子に同型である．

例えば，b_S と $\ell k[C_G(S)]\ell = \ell b_S \ell$ が森田同値ならば，$b_S \mid b_S\ell \otimes_{\ell b_S \ell} \ell b_S$ であるから，${b_S}^x j \mid b_S \ell \otimes_{\ell b_S \ell} \ell {b_S}^x j$ である．従って，$\ell {b_S}^x j \neq 0$ を得る．b_R と $jk[C_G(R)]j$ が森田同値の場合も同様.

この系が適用できる例として

(1) S が fully $\mathscr{F}$-centralized

(2) R が fully $\mathscr{F}$-centralized

(3) S が $\mathscr{F}$-quasicentric，または，同値であるが，R が $\mathscr{F}$-quasicentric

が挙げられる．S または R が fully $\mathscr{F}$-centralized のときは Linckelmann [4, Lemma 3.3 (iii)] または [6, Proposition 8.7.3 (i)] が適用できる．S が $\mathscr{F}$-quasicentric ならば，ブロック・イデアル b_S はべき零ブロックであり，べき零ブロックの既約加群の同型類はただ一つである（例えば， [6, Proposition 8.11.5]）から，ただ一つの point をもつ．よって，$\ell b_S \ell$ もまたただ一つの point をもつ．従って，b_S と $\ell b_S \ell$ は森田同値である.（例えば, Thévenaz [12, Theorem 9.9]）こうして，定理 1.1 が得られる.

6 $\mathscr{F}$-quasicentric 部分群

ここでは $\mathscr{F}$-quasicentric 部分群について考える.

はじめに point の重複度ついて復習しよう.

H, $K \leqslant G$ を部分群とする．A を k 上の G-algebra とする．A 上の pointed 群 H_α，K_β をとる．$H_\alpha \leqslant K_\beta$ ならば A^K の point β に属する原始的べき等元 j は A^H において直交する原始的べき等元の和として分解される．この和に出現する A^H の point α に属する原始的べき等元の個数を m_α^β と記す．従って，j は A^H において次のように表される.

$$j = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{m_\alpha^\beta} + s,$$

ここで，$\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{m_\alpha^\beta} \in \alpha$ であり s は A^H の α 以外の points に属する原始的べき等元の和である．β の α における重複度 m_α^β は points α，β に対して一意的である.

$\mathscr{F}$-quasicentric な部分群に注目するのは Puig による次の事実による．Q_δ を kG 上の local pointed group とする．Q_δ が属する Brauer pair を (Q, f) とする.（すなわち，$j \in \delta$ について $\mathrm{Br}_{\Delta(Q)}(j)f = \mathrm{Br}_{\Delta(Q)}(j)$）ブロック・イデアル $k[C_G(Q)]f$ がべき零ブロックであるとき，Q_δ は nil-centralized であるという.（Puig [8]）$k[C_G(Q)]f$ の既約加群の同型類はただ一つであって，(Q, f) に属する local pointed group はただ一つ Q_δ のみである.

命題 6.1 (Puig [8, Proposition 3.5]) kG 上の nil-centralized な pointed groups Q_δ，R_ε について $Q_\delta \leqslant R_\varepsilon$ ならば合同式 $(m_\varepsilon^\delta)^2 \equiv 1 \pmod p$ が成り立つ.

さて，G，b，P，(P, e_P)，P_γ，A，$\mathscr{F}$ を**状況設定**と同様とする.

$Q \leqslant P$ について b-Brauer pair $(Q, e_Q) \subset (P, e_P)$ をとる．ブロック・イデアル $b_Q = k[C_G(Q)]e_Q$ がべき零ブロックであるとき，Q は $\mathscr{F}$-quasicentric であるという．(Q, e_Q) に属する local pointed group はただ一つであり，それを Q_δ としよう．$R \leqslant P$ を Q に $\mathscr{F}$ において同型な $\mathscr{F}$-quasicentric な部分群とする．同様に，$(R, e_R) \subset (P, e_P)$ に属するただ一つの local pointed group を R_ε とする．重複度 m_δ^γ, m_ε^γ について次が成り立つ．

命題 6.2 同じ記号の下で，合同式 $m_\delta^\gamma \equiv m_\varepsilon^\gamma \pmod{p}$ が成り立つ．

この命題は当たり前に思われるかもしれないが，証明は実は簡単ではない．

定理 1.2 について考えよう．$S \leqslant P$ を $\mathscr{F}$-quasicentric とする．${}^x(R, e_R) = (S, e_S)$ であるから，R も $\mathscr{F}$-quasicentric である．よって，S は b 上のただひとつの local point δ をもち，$S_\delta \leqslant P_\gamma$ である．ソースべき等元 i を $b^{\Delta(S)}$ において直交する原始的べき等元の和として表す：

$$i = i_1 + \cdots + i_{m_\delta^\gamma} + (\text{local でない原始的べき等元の和}).$$

ここで，i_1, ..., $i_{m_\delta^\gamma}$ は local である．Brauer 準同型を施せば $\ell = \mathrm{Br}_S(i) = \sum_{r=1}^{m_\delta^\gamma} \mathrm{Br}_S(i_r)$ は ℓ の $b^{\Delta(S)}$ における原始的べき等元分解である．同様に，R は b 上のただひとつの local point ε をもち $R_\varepsilon \leqslant P_\gamma$ である．$b^{\Delta(R)}$ において $i = i'_1 + \cdots + i'_{m_\varepsilon^\gamma} +$(local でない原始的べき等元の和 in $b^{\Delta(R)}$，ここで，i'_1, ..., $i'_{m_\varepsilon^\gamma}$ は local な原始的べき等元，と表せば，j の原始的べき等元分解 $j = \mathrm{Br}_R(i) = \sum_{r=1}^{m_\varepsilon^\gamma} \mathrm{Br}_R(i'_r)$ を得る．よって，${}^x j = {}^x\mathrm{Br}_R(i) = \sum_{r=1}^{m_\varepsilon^\gamma} {}^x\mathrm{Br}_S(i'_r)$ は $b^{\Delta(S)}$ における原始的べき等元分解である．

S は b 上のただひとつの local point をもつから，どの原始的べき等元 ℓ_0，$\ell'_0 \in b^{\Delta(S)}$ も同値である．よって

$$\dim \ell_0 k[C_G(S)]\ell'_0 = \text{Cartan invariant of } b_S = p^{d_0}$$

である．$\ell = \mathrm{Br}_S(i) = \sum_{r=1}^{m_\delta^\gamma} \mathrm{Br}_S(i_r)$，${}^x j = \sum_{r=1}^{m_\varepsilon^\gamma} \mathrm{Br}_S({}^x i'_s)$ は原始的べき等元分解であるから

$$\dim \ell\, k[C_G(S)]\, {}^x j = \sum_{r,s} \dim \mathrm{Br}_S(i_r) k[C_G(S)]\, \mathrm{Br}_S({}^x i'_s) = m_\delta^\gamma m_\varepsilon^\gamma\, p^{d_0}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} \mathrm{mlty}_{k[P \times P]}(k[PxP], A) &= \frac{|\,S\,|}{|\,N_{{}^xP}(S) \cap N_P(S) C_G(S)\,|\,|\,C_P(S)\,|} \cdot m_\delta^\gamma m_\varepsilon^\gamma\, p^{d_0} \\ &= m_\delta^\gamma m_\varepsilon^\gamma\, p^{d_0 - d_1}. \end{aligned}$$

${}^x(R, e_R) = (S, e_S)$ であることから，命題 6.2 により，$m_\varepsilon^\gamma \equiv m_\delta^\gamma \pmod p$ である．さらに，命題 6.1 により，$m_\varepsilon^\gamma \equiv \pm 1 \pmod p$ であることにより，$m_\varepsilon^\gamma \equiv m_\delta^\gamma \equiv \pm 1 \pmod p$ であることが結論される．こうして，定理 1.2 が得られる．

この節の最後に，系 1.3 について述べる．定理 1.2 の条件にさらに，S が fully $\mathscr{F}$-centralized であると仮定してみる．このとき，$C_P(S)$ は b_S の defect 群であり，さらに，実は，${}^xN_\varphi = S$ であることが示され，$p^{d_0} = p^{d_1} = |\,C_P(S)\,|$ である．従って，系 1.3 の前半が示される．後半も同様である．

7 defect 群が wreathed 2-群であるブロック・イデアル

定理 1.1，定理 1.2，系 1.3 および定理 1.4 の適用例を述べる．ブロック・イデアル b の defect 群は wreathed 2-群

$$P = \langle\, a_1, a_2, t \mid {a_1}^{2^n} = {a_2}^{2^n} = t^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ ta_1t = a_2\,\rangle,\ n \geqslant 2$$

であるとする．

$c = a_1a_2, d = a_1{a_2}^{-1}$ とおく．$Z(P) = \langle\, c\,\rangle, P' = \langle\, d\,\rangle$ である．さらに次のように，元，部分群を定める．

$$x_1 = {a_1}^{2^{n-1}},\ x_2 = {a_2}^{2^{n-1}},\ z = c^{2^{n-1}} = x_1x_2,$$
$$e = x_1t,\ f = d^{2^{n-2}} (= (a_1{a_2}^{-1})^{2^{n-2}})$$
$$U = \langle\, a_1, a_2\,\rangle,\ Q = \langle\, e, f\,\rangle (\simeq Q_8),\ V = \langle\, e, f, c\,\rangle (= \langle\, x_1, t, c\,\rangle),\ W = \langle\, t, c\,\rangle,$$
$$E = \langle\, x_1, x_2\,\rangle,\ F = \langle\, t, z\,\rangle.$$

$\mathrm{Aut}\,U \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$，$\mathrm{Out}\,V \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ である．

(P, e_P) を maximal b-Brauer pair とする．(U, e_U)，$(V, e_V) \subset (P, e_P)$ をとる．

(1) $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ のとき (U, e_U) は $\mathscr{F}$-essential である．$PC_G(U)/C_G(U) < N_G(U, e_U)/C_G(U)$ は strongly embedded である．

(2) $N_G(V, e_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ のとき (V, e_V) は $\mathscr{F}$-essential である．$N_P(V)C_G(V)/VC_G(V) < N_G(V, e_V)/VC_G(V)$ は strongly embedded である．

そこで，以下では $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$，$N_G(V, e_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ であると仮定する．

$g_U \in N_G(U, e_U) \smallsetminus PC_G(U)$ を U の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$${}^{g_U}a_1 = a_2, \quad {}^{g_U}a_2 = {a_1}^{-1}{a_2}^{-1}.$$

$g_V \in N_G(V, e_V) \setminus N_P(V)C_G(V)$ を V の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし，次のように作用するものとする．

$$^{g_V}e = ef^{-1}, \quad ^{g_V}f = e, \quad ^{g_V}c = c.$$

$g_V \in N_G(V, e_V)$ の x_1, t への作用は次の通りである．

$$^{g_V}x_1 = c^{2^{n-2}}x_1 t = c^{2^{n-2}}e, \quad ^{g_V}(c^{2^{n-2}}e) = t, \quad ^{g_V}t = x_1.$$

特に

$$^{g_V}F = {}^{g_V}\langle t, z \rangle = \langle x_1, z \rangle = E.$$

7.1 $k[Pg_UP]$，$k[Pg_VP]$

Okuyama and Sasaki [7] が適用できて

命題 7.1 (1) $P \cap {}^{g_U}P = U$, $P \cap {}^{g_V}P = V$.

(2) $k[Pg_UP]$, $k[Pg_VP] \,\big|\, ikGi$．さらに，それぞれの重複度 m_U, m_V は奇数である．

(3) $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_U \,\mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_UP}$, $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_V \,\mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_VP}$.

注意 7.1 写像 $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_U \,\mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_UP}$, $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_V \,\mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_VP}$ は 0 写像ではない．

7.2 $k[Pg_Vg_UP]$，$k[Pg_Ug_VP]$

$V \cap {}^{g_V}U = W_0$, $U \cap {}^{g_U}V = T_1$ とおく．また，$\langle x_1, a_2 \rangle = T_0$, $\langle c, t \rangle = W_1$ とおく．このとき

$$^{g_U}T_0 = U \cap V, \ {}^{g_Vg_U}T_0 = {}^{g_V}(V \cap U) = V \cap {}^{g_V}U = W_0$$

$$^{g_V}W_1 = U \cap V, \ {}^{g_Ug_V}W_1 = {}^{g_U}(U \cap V) = U \cap {}^{g_U}V = T_1.$$

補題 7.2 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \,\mathrm{con}^{g_Vg_U}$, $\mathrm{tr}^P \,\mathrm{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \,\mathrm{con}^{g_Ug_V}$ は 0 写像ではない．

(2) g_Vg_U は (P, P)-icc 条件を満たす．特に，$W_0 = P \cap {}^{g_Vg_U}P$.

(3) g_Ug_V は (P, P)-icc 条件を満たす．特に，$T_1 = P \cap {}^{g_Ug_V}P$.

b-Brauer pairs (T_0, e_{T_0})，(T_1, e_{T_1})，(W_0, e_{W_0})，$(W_1, e_{W_1}) \subset (P, e_P)$ をとる．

補題 7.3 上の b-Brauer pairs は次のように共役である．

$$^{g_Vg_U}(T_0, e_{T_0}) = (W_0, e_{W_0}), \quad ^{g_Ug_V}(W_1, e_{W_1}) = (T_1, e_{T_1}).$$

この共役は g_U, g_V による共役の合成として次のように得られる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (U, e_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (V, e_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (T_0, e_{T_0}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (U \cap V, e_{U \cap V}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (W_0, e_{W_0}) \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & (V, e_V) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (U, e_U) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ (W_1, e_{W_1}) \arrow[rr, "g_V"'] & & (U \cap V, e_{U \cap V}) \arrow[rr, "g_U"'] & & (T_1, e_{T_1}) \end{tikzcd}$$

補題 7.4 (1) T_0，T_1 は fully $\mathscr{F}$-centralized である．
(2) T_0，T_1 は $\mathscr{F}$-quasicentric である．

以上により，定理 1.1 と系 1.3 により，次が得られる．

命題 7.5 (1) $k[Pg_Vg_UP]$, $k[Pg_Ug_VP] \,\big|\, ikGi$．さらに，それぞれの重複度 m_{VU}, m_{UV} は奇数である．
(2) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V\cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_Vg_U} = t_{P(g_Vg_U)P}$，$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U\cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_Ug_V} = t_{P(g_Ug_V)P}$．

7.3 $k[Pg_Vg_Ug_VP]$

$F_1 = V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_Vg_U}V$ とおく．

補題 7.6 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{F_1} \mathrm{con}^{g_Vg_Ug_V}$ は 0 写像ではない．
(2) $g_Vg_Ug_V$ は (P, P)-icc 条件を満たす．特に，$P \cap {}^{g_Vg_Ug_V}P = F_1$．

b-Brauer pairs (E, e_E), (F, e_F)，$(F_1, e_{F_1}) \subset (P, e_P)$ をとる．

補題 7.7 b-Brauer pairs (F, e_F)，(F_1, e_{F_1}) は次のように共役である．

$$ {}^{g_Vg_Ug_V}(F, e_F) = (F_1, e_{F_1}). $$

この共役は g_U, g_V による共役の合成として次のように得られる．

$$\begin{tikzcd}
& (V, e_V) & & (U, e_U) & & (V, e_V) & \\
(F, e_F) \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "g_V"'] & & (E, e_E) \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "g_U"'] & & (E, e_E) \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "g_V"'] & & (F_1, e_{F_1}) \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

補題 7.8 (1) ${}^{g_V{}^{-1}}U$ は e_F の defect 群である．
(2) ${}^{g_V}U$ は e_{F_1} の defect 群である．
(3) e_F はべき零ブロックである．

従って，定理 1.1 の条件 (1) や (2) は満たされない．しかし (3) が成り立つので定理 1.2 の公式を調べる．そのため，すこし，工夫をする．

補題 7.9 $w = {a_1}^{2^{n-2}} g_Vg_Ug_V$ とおく．
(1) $w \in N_G(F, e_F)$, ${}^wt = zt$, ${}^wz = t$．すなわち，w は F の位数 3 の自己同型を引き起こし

$$ N_G(F, e_F) = \langle x_1, w\rangle C_G(F). $$

(2) 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{F_1} \mathrm{con}^{g_Vg_Ug_V} = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_F \mathrm{con}^w$ は 0 写像ではない．
(3) $2^{d_0} = 2^{d_1} = 2^{2n}$ である．

そこで，$k[PwP]$ に定理 1.2 を適用して次が得られる．

命題 7.10 (1) $F = P \cap {}^{w}P$.

(2) $k[Pg_V g_U g_V P] = k[PwP] \mid ikGi$．さらに，その重複度 m_{VUV} は奇数である．

参考文献

[1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, J. Algebra **239** (2001), no. 1, 262–271.

[2] M. Broué, On representations of symmetric algebras: an introduction, Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich, 1991.

[3] Yun Fan and Lluis Puig, On blocks with nilpotent coefficient extensions, Algebr. Represent. Theory **1** (1998), no. 1, 27–73.

[4] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1998), 93–107.

[5] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[6] ———, The block theory of finite group algebras, London Mathematical Society Student Texts 92, vol. 2, Cambridge University Press, 2018.

[7] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, J. Algebra **497** (2018), 92–101.

[8] L. Puig, The hyperfocal subalgebra of a block, Invent. Math. **141** (2000), 365–397.

[9] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[10] H. Sasaki, Source algebras and cohomology algebras of block ideals of finite groups with defect groups isomorphic to extraspecial p-groups, Hokkaido Math. J. **53** (2024), 443–462.

[11] ———, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups II, J. Algebra **666** (2025), 777–793, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2024.10.051.

[12] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.