Relative stable equivalences of Morita type for blocks of finite groups and its application

東京理科大学 鈴木香一 *
Kyoichi Suzuki
Tokyo University of Science

1 はじめに

本研究は東京理科大学の叨刀直子氏との共同研究に基づくものである．また，本稿の内容について，詳しくは [6] と [7] を参照されたい．

G を有限群とし，k を正標数 p をもつ代数的閉体とする．群環 kG は直既約な多元環の直積

$$kG = B_1 \times \cdots \times B_n$$

に分解でき，各 B_i は G のブロックと呼ばれる．1 次元ベクトル空間で G の任意の元が自明に作用するものは自明な kG 加群と呼ばれ，k_G で表す．kG のブロック B で $k_G B = k_G$ となるものが一意的に存在する．これは，kG の主ブロックと呼ばれ，$B_0(G)$ と書く．

また，G のブロック B に対して，

$$B \otimes_{kD} B \to B : x \otimes y \mapsto xy$$

が B-B 両側加群の準同型として分裂するような G の極小な p 部分群 D が G 共役を除いて一意的に定まり，B の不足群と呼ばれる．G の主ブロックの不足群は，G の Sylow p 部分群になる．不足群によってブロックの表現が統制されるのではないかと考えられており，Donovan 予想と呼ばれる次の予想がある．

予想 1.1 ([1])**.** P を有限 p 群とする．このとき，P と同型な不足群をもつ有限群のブロックの森田同値類は有限個ではないだろうか．

* E-mail: 1119703@alumni.tus.ac.jp

本研究では，Donovan 予想を背景に，主ブロック間の森田同値の構成について考える．これまで，主ブロック間の森田同値を構成するために，Broué により導入された森田型安定同値を用いる方法が取られてきた．しかし，この方法は，共通の非自明な中心的 p 部分群をもつ有限群に対して適用できないことが問題であった．一方で Wang-Zhang([13]) は，森田型安定同値を一般化する形で，森田型相対安定同値を定義した．本稿では，森田型相対安定同値に関して得られた結果を述べる (3 章)．この結果から，共通の非自明な中心的 p 部分群をもつ有限群に対しても適用可能な森田同値構成法を得る．また，この方法を適用して構成した森田同値の例についても述べる (4 章)．

本稿を通して，k は正標数 p をもつ代数的閉体，G は有限群とし，特に断らない限り加群は有限生成右加群とする．G の中心を $Z(G)$ で表し，$\Delta G = \{(g,g) \mid g \in G\}$ とする．加群 U に対して，U の k 双対を U^* で表す．G とその p 部分群 P に対して，G の P 上のフュージョンシステム $\mathcal{F}_P(G)$ とは，対象が P のすべての部分群で，P の各部分群 Q，R の間の射が

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(Q,R) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(Q,R) \mid \varphi = c_g \text{ for some } g \in G\}$$

で与えられる圏である．ただし，c_g は共役写像を表す．

2　森田型安定同値

本章では，森田型安定同値を用いた主ブロック間の森田同値構成法を述べる．

Broué [2] により森田型安定同値が導入された．

定義 2.1 ([2])**.** Γ と Λ を有限次元 k 多元環とする．M を Γ-Λ 両側加群，N を Λ-Γ 両側加群とする．このとき，組 (M,N) が Γ と Λ の間の森田型安定同値を誘導するとは，M と N が左加群としても右加群としても有限生成射影的で次の両側加群としての同型

$$M \otimes_\Lambda N \cong \Gamma \oplus X \ \text{ 及び } \ N \otimes_\Gamma M \cong \Lambda \oplus Y$$

が存在し，X と Y がそれぞれ Γ-Γ 両側加群，Λ-Λ 両側加群として射影的になるときをいう．

Q を G の p 部分群とする．$k_Q \otimes_{kQ} kG$ の直既約分解において k_G を部分加群にもつ直既約因子が一意的に存在する．この直既約因子は Q に関する Scott kG 加群と呼

ばれ，$S(G,Q)$ と書く．kG 加群 M の Q に関する Brauer construction $M(Q)$ とは，

$$M(Q) = M^Q / \sum_R \mathrm{tr}_R^Q(M^R)$$

により定義される $kN_G(Q)$ 加群である．ただし，R は Q の真部分群全体を動き，M^Q は M における Q の固定点全体，$\mathrm{tr}_R^Q : M^R \to M^Q$ は $\mathrm{tr}_R^Q(m) = \sum_{t\in[R\backslash Q]} mt$ により定まる線形写像を表す．

Broué [2] は，主ブロック間の森田型安定同値を構成する手法を与えた．

定理 2.2 ([2, Theorem 6.3])**.** G と G' は共通な Sylow p 部分群 P をもつ有限群で $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$ とする．また $M = S(G\times G', \Delta P)$ とする．このとき次は同値である．

(i) P の非自明な任意の部分群 Q に対して，$(M(\Delta Q), M(\Delta Q)^*)$ が $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_{G'}(Q))$ の間の森田同値を誘導する．

(ii) (M, M^*) が $B_0(G)$ と $B_0(G')$ の間の森田型安定同値を誘導する．

また，Linckelmann [8] は直既約な自己移入多元環の間の森田型安定同値が森田同値になるための必要十分条件を与えた．

定理 2.3 ([8, Theorem 2.1])**.** Γ と Λ を単純でない直既約な自己移入 k 多元環とする．M と N はそれぞれ Γ-Λ 両側加群と Λ-Γ 両側加群で，(M,N) が Γ と Λ の間の森田型安定同値を誘導しているとする．このとき次が成立する．

(i) M が直既約ならば，任意の単純 Γ 加群 S に対して，Λ 加群 $S\otimes_\Gamma M$ は直既約である．

(ii) (M,N) が Γ と Λ の間の森田同値を誘導することの必要十分条件は，任意の単純 Γ 加群 S に対して，Λ 加群 $S\otimes_\Gamma M$ が単純になることである．

定理 2.2 と定理 2.3 を合わせると，主ブロック間の森田同値を構成する方法が得られる．まず定理 2.2 を用いて森田型安定同値を構成し，次に定理 2.3 を用いてそれが森田同値であることを確認するという方法である．実際この方法を用いて主ブロック間の森田同値が構成されてきた (例えば [10] や [3])．

しかし，G と G' の共通の Sylow p 部分群が非自明な部分群 Z で $Z(G)$ と $Z(G')$ に含まれるものをもつ場合，この方法を用いることができない．このとき，$C_G(Z) = G$ 及び $C_{G'}(Z) = G'$ となる．したがって，定理 2.2 において，$B_0(G)$ と $B_0(G')$ の間の森田型安定同値を構成したいにもかかわらず，それよりも強い森田同値が必要になっ

てしまう.

3　森田型相対安定同値

本章では，森田型相対安定同値を用いた主ブロック間の森田同値構成法を述べる．2 章の最後で述べたように，森田型安定同値を用いる方法は，共通の中心的な p 部分群をもつ 2 つの有限群に対しては適用できない．本章で述べる方法はこのような場合にも適用可能な方法を与えるものである.

H を G の部分群とする．kG 加群 U が相対 H 射影的であるとは，ある kH 加群 V が存在し，U が $V \otimes_{kH} kG$ の直和因子になることをいう.

Wang-Zhang([13]) により森田型相対安定同値が定義された.

定義 3.1 ([13, Definition 5.1])**.** G と G' は有限群で共通の p 部分群 P をもつとする．B と B' を G と G' のブロックとする．B-B' 両側加群 M と B'-B 両側加群 N に対し，(M, N) が B と B' の間の森田型相対 Q 安定同値を誘導するとは，M と N が左加群としても右加群としても有限生成射影的で次の両側加群としての同型

$$M \otimes_{B'} N \cong B \oplus X \quad \text{及び} \quad N \otimes_B M \cong B' \oplus Y$$

が存在し，X と Y がそれぞれ $k[G \times G]$ 加群，$k[G' \times G']$ 加群として $Q \times Q$ 射影的になるときをいう.

注意 3.2. [13, Definition 5.1] では，森田型相対安定同値はより一般的な状況で定義されている．そこでは，Okuyama([9]) により導入された加群に関する相対射影性が用いられる.

Broué の結果に対応するものとして，共通の中心的 p 部分群に関する森田型相対安定同値を構成する手法を得た.

定理 3.3 (Kunugi-S [6, Theorem 1.1])**.** k を正標数 p をもつ代数的閉体とする．有限群 G と G' は共通の Sylow p 部分群 P をもち，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(G')$ が成り立つとする．$M = S(G \times G', \Delta P)$ とし，Z を P の部分群で $Z(G)$ と $Z(G')$ に含まれるものとする．このとき次は同値である.

(i) P の任意の部分群 Q で Z を真に含むものに対して，$(M(\Delta Q), M(\Delta Q)^*)$ が $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_{G'}(Q))$ の間の森田同値を誘導する.

(ii) (M, M^*) が $B_0(G)$ と $B_0(G')$ の間の森田型相対 Z 安定同値を誘導する.

定理 3.3 において $Z=1$ とすると定理 2.2 が得られる．

また，Linckelmann の結果に対応するものとして，共通の中心的 p 部分群に関する森田型相対安定同値が森田同値になるための必要十分条件を得た．

定理 3.4 (Kunugi-S [6, Theorem 1.2])**.** k を正標数 p をもつ代数的閉体とする．有限群 G と G' は共通の非自明な Sylow p 部分群 P をもち，$\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(G')$ が成り立つとする．$M=S(G\times G',\Delta P)$ とし，Z を P の真部分群で $Z(G)$ と $Z(G')$ に含まれるものとする．このとき (M,M^*) が $B_0(G)$ と $B_0(G')$ の間の森田型相対 Z 安定同値を誘導するならば，次が成立する．

(i) 任意の単純 $B_0(G)$ 加群に対して，$B_0(G')$ 加群 $S\otimes_{B_0(G)}M$ は直既約である．

(ii) (M,M^*) が $B_0(G)$ と $B_0(G')$ の間の森田同値を誘導することの必要十分条件は任意の単純 $B_0(G)$ 加群 S に対して，$B_0(G')$ 加群 $S\otimes_{B_0(G)}M$ が単純であることである．

定理 3.4 において，$Z=1$ とすれば定理 2.3 の特別な場合を得る．

したがって，Broué と Linckelmann の結果のときと同様に，これらの定理を合わせれば，共通の非自明な中心的 p 部分群をもつ場合にも適用可能な森田同値構成法を得る．

4　応用例

最後に，3 章で述べた方法を用いて森田同値を構成した結果を述べる．

有限群 G と G' のブロック B と B' が splendid 森田同値であるとは，B-B' 両側加群 M によって B と B' の間の森田同値が誘導され，M が $k[G\times G']$ 加群として p 置換加群であるときをいう．Donovan 予想における森田同値を splendid 森田同値にしたものは，Puig 予想と呼ばれる ([12, Conjecture 38.5])．2，3 章で述べた森田型安定同値や森田型相対安定同値を用いる方法で構成される森田同値は，Scott 加群が p 置換加群であることから，splendid 森田同値になっている．

Puig 予想に関連して，近年 tame 表現型の主ブロックの splendid 森田同値による分類が行われた ([3, 4, 5])．ブロックが tame 表現型になるのは $p=2$ で不足群が二面体群，準二面体群，一般四元数群のときに限られることが知られている．これらの結果では，共通の Sylow 群をもつ Lie 型の有限群の無限系列において，それらの主ブロックが 1 つの splendid 森田同値類をなすことが示されている．これにより有限個の分類が与えられ，主ブロックに関する Puig 予想の成立が示される．

本研究では，有限体上の 2 次一般線形群の無限系列を考える．$G_i = GL_2(q_i)$, $i = 1$, 2 とする．G_1 と G_2 は，$(q_1 \pm 1)_p = (q_2 \pm 1)_p = p^s$ のとき共通の Sylow p 部分群 P をもつ．ただし，$(q_i \pm 1)_p$ は $(q_i \pm 1)$ を割る p の最大べきを表し，p が奇数なら $s \geq 1$，$p = 2$ なら $s \geq 2$ とする．状況をまとめると表 1 のようになる．

表 1

	$s \geq 2$	P	
p: odd	$(q_i + 1)_p = p^{s-1}$	$C_{p^{s-1}}$	(1)
	$(q_i - 1)_p = p^{s-1}$	$C_{p^{s-1}} \times C_{p^{s-1}}$	(2)
$p = 2$	$(q_i + 1)_2 = 2^s$	$SD_{2^{s+2}}$	(3)
	$(q_i - 1)_2 = 2^s$	$C_{2^s} \wr C_2$	(4)

ただし表 1 において，$C_{p^{s-1}}$ は位数 p^{s-1} の巡回群，$SD_{2^{s+2}}$ は位数 2^{s+2} の準二面体群を表す.

表 1 の各場合における $B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ の splendid 森田同値の確認状況は次のようになる．(1) の場合，巡回不足群をもつブロックに関する一般論からを示すことができる．(2) の場合，Puig [11] の結果を適用することで示すことができる．(3) の場合は [5] から読み取ることができる．(4) の場合，Puig の結果を用いることができず，また，共通の非自明な中心的 2 部分群をもつため，森田型安定同値による方法も適用できない.

森田型相対安定同値を用いる方法 (定理 3.3, 定理 3.4) により (4) の場合の splendid 森田同値を得た.

定理 4.1 (Kunugi-S [7, Theorem 1.1])**.** k を標数 2 の代数的閉体とする．また，q_1，q_2 を奇素数のべきで，$q_1 \equiv q_2 \equiv 1 \pmod 4$ かつ $(q_1 - 1)_2 = (q_2 - 1)_2$ を満たすとする．このとき，$B_0(GL_2(q_1))$ と $B_0(GL_2(q_2))$ は splendid 森田同値である.

参考文献

[1] J. L. Alperin. Local representation theory. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, Vol. 37 of *Proc.*

Sympos. Pure Math., pp. 369–375. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.

[2] M. Broué. Equivalences of blocks of group algebras. In *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, Vol. 424 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pp. 1–26. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[3] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with dihedral defect groups. *Math. Z.*, 294(1-2):639–666, 2020.

[4] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal blocks with generalised quaternion defect groups. *J. Algebra*, 558:523–533, 2020.

[5] S. Koshitani, C. Lassueur, and B. Sambale. Splendid Morita equivalences for principal blocks with semidihedral defect groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 150(1):41–53, 2022.

[6] N. Kunugi and K. Suzuki. Relative stable equivalences of Morita type for the principal blocks of finite groups and relative Brauer indecomposability. *J. Group Theory*, 26(6):1157–1184, 2023.

[7] N. Kunugi and K. Suzuki. Splendid Morita equivalences for the principal 2-blocks of 2-dimensional general linear groups in non-defining characteristic. *SUT J. Math.*, 59(2):117–135, 2023.

[8] M. Linckelmann. Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups. *Math. Z.*, 223(1):87–100, 1996.

[9] T. Okuyama. A generalization of projective covers of modules over group algebras, preprint.

[10] T. Okuyama. Some examples of derived equivalent blocks of finite groups. 1997.

[11] L. Puig. Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley. *Astérisque*, (181-182):9, 221–236, 1990.

[12] J. Thévenaz. *G-algebras and modular representation theory.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[13] L. Wang and J. Zhang. Relatively stable equivalences of Morita type for blocks. *J. Pure Appl. Algebra*, 222(9):2703–2717, 2018.