

群の高次構造とその幾何学

高村茂 京都大学理学研究科数学教室

2024 年 2 月 15 日

概要

高次群論の観点から、群に関するさまざまな新しい「組み合わせ的公式」を定式化し導出することができる—これらの公式は群の高次構造を介在させるため、古典的群論では定式化できない。本稿では、その一端として、交点公式（ベズー型定理）およびその精密化である分解型交点公式を解説する。

1 序

「単純」さとは、「すべてを見通して」「突如としてこの一挙に」正しくその「全体」をつかむ、という意味です。

フルトヴェングラー 『音と言葉』 p.9
芳賀檀 訳 新潮文庫（1981 年）

著者が高次群論の構築を始めたきっかけのひとつは、群論の公式と代数幾何の公式の類似性に気がついたことであった（他の動機については、[Ta1], [Ta2] で述べたので興味ある方はご覧下さい）。有限群 G の部分群 H, K に対し、両側剰余類 HaK ($a \in G$) の位数は $|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K^a|}$ で与えられる ([Isa] p.6)。ただし、 $K^a := aKa^{-1}$ である。 $m := |HaK|$ とおいて、この公式を $|H||K| = m|H \cap K^a|$ と書き直してみる。これは代数幾何の交差理論に現われる公式に似ている。まず、複素射影曲線 $\mathbb{P}^2$ の中の平面代数曲線 C と D が同じ tangency で交わるとする—つまり、どの交点も同じ交差重複度を持つ（これを n とする）。また、 $\deg C, \deg D$ は C, D の次数を表すものとする。このとき、（ベズーの定理 [EiHa] p.140 の特別な場合として） $\deg C \deg D = n|C \cap D|$ が成り立つ。ここで、 $|C \cap D|$ は C と D の交点の個数を表す。2つの公式を並べてみると類似性が一目瞭然である：

群論	代数幾何
$ H K = m H \cap K^a $ ここで $m := HaK $.	$\deg C \deg D = n C \cap D $ ここで n は共通の交差重複度。

ここで、 $\deg C \deg D = n|C \cap D|$ はあくまでベズーの定理の特別な場合であるが、一般のベズーの定理に対応するような、群の「公式」は存在するであろうか。答えは「存在する」である。これは高次群論を発展させていく過程で得られた。

さて、代数幾何において、ベズーの定理の“厳格な”証明の探求が、古典的な代数幾何から現代的な（層を駆使する）代数幾何への脱皮をうながしたように [Ful]、われわれのベズー型定理（交点公式）は、高次群論建設のマイルストーンとみなすことができる。ここで、代数幾何において、代数多様体上の上部構造である層は、現代的代数幾何への脱皮でカギとなる役割を果たしたが、高次群論でも、ある種の「上部構造」が重要な役割を果たす—と言うより、この「上部構造」を導入することによって、はじめて高次群論が理論として離陸し始めた。

大ざっぱに言うと、高次群論では、まず次の3つを遂行する：

- (1) 群に対して「高次構造」（部分群積、コセット積）を導入する。
- (2) (1) の「高次構造」に対して、その「上部構造」を導入する。
- (3) 群論における「ミクロな相互作用（群の元の積）」と「マクロな相互作用（部分群積やコセット積）」を、(2) の「上部構造」の観点から融合的に扱う。

先に進む前に、他分野も含めて俯瞰しておく。空間のつながり具合を把握するのに、局所的な様子とそれらの貼り合わせとしての大局を考えるというのは自然な考え方である。この考え方は幾何学から“溢れ出て”、他分野にも広がっていき、現代数学の指導原理のひとつになった—顕著なのは、代数幾何（スキーム論）、整数論（類体論—アデルの構成）である。この「局所大局対応」をコンセプト化したものが「層」である。しかし、これにあたる“自然な”対象はこれまでの群論には見当たらない。

幾何学では「局所大局対応」の思想は、不変量に結実する。たとえば、（計量の入った）曲面上で、局所的な量である曲率を積分すると、その曲面の位相不変量であるオイラー数が得られる（ガウス・ボンネの定理）。また、曲面上のベクトル場の指数（これは局所的に定まる量）を足し上げると、これもまた曲面のオイラー数になる（ポアンカレ・ホップの定理）。ここで、曲率やベクトル場は、曲面の上部構造“ベクトル束”に付随する。つまり、上記の不変量は曲面そのものからではなく、曲面の上部構造を経由して導かれる。群に対しては、こういった形では不変量は出てこない（「局所大局対応」の欠如）。ベクトル束や層にあたるものが群論に導入されれば、あらたな発展の起爆剤になることが期待される。しかし、今までこういうものが「無かった」というのには歴然とした理由がある。「局所大局対応」が定まるには、位相空間的な見方ができなければならないのだが、（位相群はともかく）一般の群に対しては、「近さ」「遠さ」が定まらない—代数幾何におけるザリ

スキ位相に相当するものが存在しない¹。「局所大局対応」に固執する限り、展望は開けない。では、どうするか、である。

注：有限群 G に対しては、その位数 $|G|$ を割る素数 p ごとに（シロー p 部分群などの） p 部分群たちをひとまとめに考えて（つまり p 部分群ポセット）、その情報が G の「局所データ」を与え、 $|G|$ を割る素数全体を走らせることにより、 G の「大局データ」が得られる、という（グロタンディーク流の $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 的）立場もある。ここで、「 $|G|$ を割る素数全体を走らせて、 G の大局データを得る」というのは数論で大成功を収めたスキーム論的な考えではあるが、スキーム論が“すべての”可換環を対象とすることに比して、有限群だけに通じる考え方であるという点で不十分さが否めない。望ましいのは、一般の群に対しても成り立つ「理論」で投網を掛け、次に有限群に関しては、さらに網目細かく議論する、という二段構えである。

群の高次構造を導入する。まず、群 G の元 a は 0 次（スカラー）、部分群 H やコセット aH は 1 次、また両側コセット KaH は 2 次とみなす。そして、 n 次の対象 ($n = 2, 3, 4, \dots$) として、部分群積（セクト） $H_1 H_2 \cdots H_n$ やコセット積（クラン） $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ を導入する。具体的には、これらは G の次の部分集合である（ n をセクトやクランの次数あるいは長さという）：

$$\begin{cases} H_1 H_2 \cdots H_n := \{h_1 h_2 \cdots h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}, \\ a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n := \{a_1 h_1 a_2 h_2 \cdots a_n h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}. \end{cases}$$

セクトは多項式 $x_1 x_2 \cdots x_n$ のアナロジー、クランは多項式 $c_1 x_1 c_2 x_2 \cdots c_n x_n$ (c_i はスカラー) のアナロジーである。このように、群 G に対し新しい「階層（高次構造）」を導入すると、これらを支配する新しい「法則」があると期待される。余談になるが、つぎは素粒子論の坂田哲学である（太字引用者）：

「自然の無限の階層性」の哲学の重要な側面は、単に物質構造がそのような質的違いを持った階層構造を持っているということだけではなく、「それぞれの階層には固有の法則が支配している」という考えである。従って、**新しい階層の発見は、新しい法則の発見へつながるという考えである。逆に言えば、現在知られている法則では、新しい物質階層の存在様式は理解できないであろうということにもなる。**極言すれば、新しい未知の物質（粒子）を仮説的に導入する際には、既存の物理学にとらわれることなく、それを自由に無視してよいという考えにもつながる。

小出義夫 『なぜ坂田学派はクォーク模型にたどりつけなかったのか』 pp.3-4
静岡県立大学・短期大学部機関リポジトリ（1995 年）

<https://u-shizuoka-ken.repo.nii.ac.jp/record/1742/files/AN10118525199512001030.pdf>

さて、群 G に対し、元たちの「相互作用」、部分群たちあるいはコセットたちの「相互作用」——いわば「ミクロな相互作用」と「マクロな相互作用」——は次の通りである：

¹ただし、有限群や離散群に対しては、その群の生成系を指定することにより、ケーレーグラフが定義され、ある意味、「近さ」「遠さ」が定まる。

(I) ミクロな相互作用：

- 群 G の元たち $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対し、 $a_1, a_2, \dots, a_n \in G \mapsto a_1 a_2 \cdots a_n \in G$.

(II) マクロな相互作用：

- 群 G の部分群たち $H_1, H_2, \dots, H_n$ に対し、

$$H_1, H_2, \dots, H_n \mapsto H_1 H_2 \cdots H_n := \{h_1 h_2 \cdots h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}.$$

(この相互作用の生成物 $H_1 H_2 \cdots H_n$ (セクト) は、一般に G の部分群ではない。)

- 群 G のコセットたち $a_1 H_1, a_2 H_2, \dots, a_n H_n$ に対し、

$$a_1 H_1, a_2 H_2, \dots, a_n H_n \mapsto a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n := \{a_1 h_1 a_2 h_2 \cdots a_n h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}.$$

(この相互作用の生成物 $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ (クラン) は、一般に G のコセットではない。)

ミクロな相互作用 (I) とマクロな相互作用 (II) を「融合的に」扱うために、セクトやクランの「上部構造」であるシナジーやテラジーといった概念を導入する。

自然現象を理解する上で、多体系が集団として見せる協力現象のあり方を理解することは世界の基本的な要素を理解することと、車の両輪をなすといえるだろう。

宮下精二 『相転移・臨界現象』 まえがき 岩波書店 (2002 年)

まず、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ に対し、その**シナジー** (synergy) を次で定義する：

$$\begin{aligned} \pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n &\longrightarrow H_1 H_2 \cdots H_n, \\ \pi(h_1, h_2, \dots, h_n) &:= h_1 h_2 \cdots h_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

注意 シナジーは、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の群構造だけでは決まらない—じっさい、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ 自体、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の G の中への埋め込まれ方に依存する。さらに、いくつか注意しておく。

- $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ は直積なのでシナジーは簡単なものに見えるが、そうではない。写像 π は (したがって、ファイバーは) 一般に非常に複雑である。
- シナジーの各ファイバー $\pi^{-1}(x)$ ($x \in H_1 H_2 \cdots H_n$) は、 $x = h_1 h_2 \cdots h_n$ をみたす $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ からなる。群論的に言うと、 $x = h_1 h_2 \cdots h_n$ は「 x の表示」である。したがって、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は、「 x の表示」からなる—ファイバーという幾何的な対象が、代数的な対象に言い換えられた。また、シナジーにおいて、マクロな相互作用 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \mapsto H_1 H_2 \cdots H_n$ とミクロな相互作用 $(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto h_1 h_2 \cdots h_n$ が同時に現われるので、これら 2 つの相互作用が融合的に扱える。

- (iii) $x \in H_1 H_2 \cdots H_n$ をパラメータとみなし、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ を、代数幾何における「代数多様体の族 (family)」のように“族”としてシナジーを研究するのが、われわれの基本方針である（セクトの研究の「幾何学化」）。なお、われわれの先行する仕事では、代数幾何的な族の研究も行ってきた [HiTa1], [HiTa2], [Ta7], [Ta8], [Ta9], [Ta10]。

シナジーの例を挙げておく。

例 1.1. （位数 8 の）二面体群 $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^3 \rangle$ の、位数 2 の巡回部分群 $H_1 := \langle b \rangle$, $H_2 := \langle ab \rangle$, $H_3 := \langle a^2 b \rangle$ を取る。このとき、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ のファイバーは、一点あるいは二点の 2 通りである（図 1 参照）。

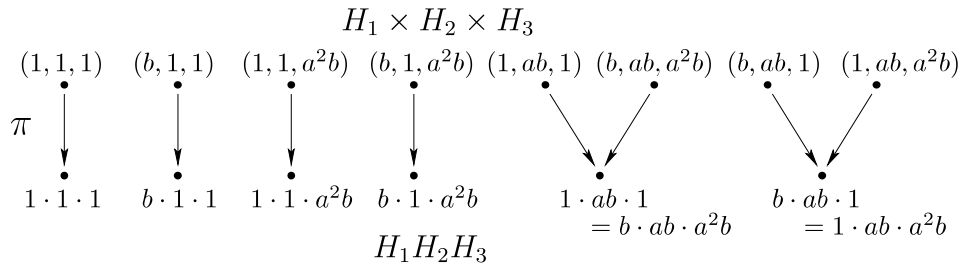


図 1: 例 1.1 のシナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ のファイバー。

上の例と「対称的な」例を上げておこう—図 1 と図 2 は左右真逆になっている。

例 1.2. 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の、互換 $a = (12)$, $b = (23)$ で生成される位数 2 の巡回部分群 $H_1 = \langle a \rangle$ と $H_2 = \langle b \rangle$ を考える。このとき、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_1 \rightarrow H_1 H_2 H_1$ は図 2 のとおり（単位元は e と書く—互換の中の数字“1”と紛らわしくないように）。

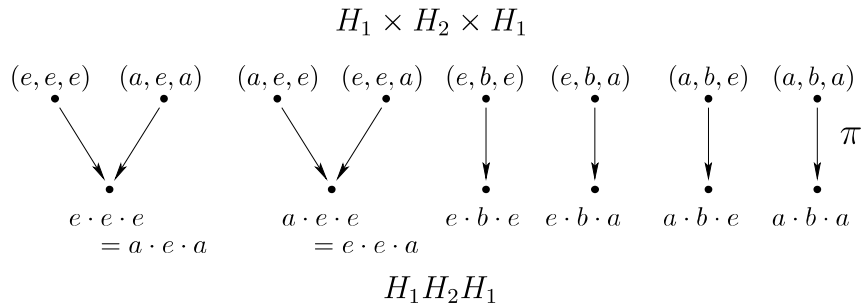


図 2: 例 1.2 のシナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_1 \rightarrow H_1 H_2 H_1$ のファイバー。

次に、クラン $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ に対し、そのシナジー（正確にはクラン・シナジー）

を次のように定める：

$$\begin{aligned}\pi : a_1 H_1 \times a_2 H_2 \times \cdots \times a_n H_n &\longrightarrow a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n, \\ \pi(a_1 h_1, a_2 h_2, \dots, a_n h_n) &:= a_1 h_1 a_2 h_2 \cdots a_n h_n.\end{aligned}\tag{1.2}$$

実は、クランにはこれ以外にも（コセット $a_i H_i$ の代表元の取り方に応じて定まる）上部構造がある。構成をはっきりさせるため、 $a_i H_i$ を C_i と書き、クラン $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ を $C_1 C_2 \cdots C_n$ と書く。各コセット C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) から代表元 $r_i \in C_i$ を取り、クラン $C_1 C_2 \cdots C_n (= r_1 H_1 r_2 H_2 \cdots r_n H_n)$ のもう一つの上部構造である**テラジー** (telergy：遠隔相互作用) を次で定める（名称の由来は下の補足 1.4 参照）：

$$\begin{aligned}\eta : \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n &\longrightarrow r_1 H_1 r_2 H_2 \cdots r_n H_n, \\ \eta(r_1, h_1, r_2, h_2, \dots, r_n, h_n) &= r_1 h_1 r_2 h_2 \cdots r_n h_n.\end{aligned}\tag{1.3}$$

ここで、 $r_1 H_1 r_2 H_2 \cdots r_n H_n = C_1 C_2 \cdots C_n$ ゆえ、テラジーは次のようにも思える：

$$\eta : \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n \longrightarrow C_1 C_2 \cdots C_n.\tag{1.4}$$

クラン $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ のシナジーは、クランに対したただ一つ定まるが、テラジーは（コセット C_i の代表元 r_i の取り方がいろいろあるので）クランに対し一つには定まらないことに注意。

補足 1.3. セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ に関する公式を示す過程で、シナジーだけではなく、テラジーも現れる（補足 3.1 参照）。

補足 1.4. テラジー η は、クラン・シナジー π を使って次のように合成写像で表されるので、 η は π より「遠隔」にあると思える—これが「テラジー」という名称の由来である。

$$\begin{aligned}\eta : \{r_1\} \times H_1 \times \{r_2\} \times H_2 \times \cdots \times \{r_n\} \times H_n \\ \xrightarrow{\nu} r_1 H_1 \times r_2 H_2 \times \cdots \times r_n H_n = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \\ \xrightarrow{\pi} C_1 C_2 \cdots C_n.\end{aligned}\tag{1.5}$$

ここで、 $\nu(r_1, h_1, r_2, h_2, \dots, r_n, h_n) = (r_1 h_1, r_2 h_2, \dots, r_n h_n)$ 。

2 ギルドと交点公式（ベズー型定理）

われわれの目標は、セクトやクランに対して、「組み合わせ的公式」を導出することであるが、これは2段階でおこなう。まずは、セクトやクランを一般化した**ギルド** (guild) に対し、「組み合わせ的公式」（ベズー型定理）を示す。ここで、セクトやクランは群 G の部

分集合であるが、ギルドはより一般的な部分集合である。具体的には、次の形をした群 G の部分集合である：

$$HAK = \{hak : h \in H, a \in A, k \in K\}, \quad (2.1)$$

ここで、 H と K は G の部分群、 A は G の“任意の”部分集合。

例 2.1. セクトやモニックなクランはギルドの特別な場合である。じっさい、

$$H := H_1, \quad A := H_2 H_3 \cdots H_{n-1}, \quad K := H_n$$

と取ると、ギルド HAK はセクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ である。また、

$$H := H_1, \quad A := a_2 H_2 a_3 H_3 \cdots a_{n-1} H_{n-1} a_n, \quad K := H_n$$

と取ると、ギルド HAK はモニック・クラン $H_1 a_2 H_2 a_3 H_3 \cdots a_n H_n$ である。

一般のクラン $a_1 H_1 a_2 H_2 a_3 H_3 \cdots a_n H_n$ に対しては、これをまずモニック・クラン $H_0 a_1 H_1 a_2 H_2 a_3 H_3 \cdots a_n H_n$ (ここで $H_0 := \{e\}$ は単位部分群) として表す。すると、上のようにギルドとみなせる。

ギルドの持つ著しい特徴は、**両側作用** (baction) を持つことである：

$$\begin{aligned} H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K : \quad & \text{ここで } u \in H, v \in K \text{ に対し、} \\ & hak \in HAK \mapsto u \cdot hak \cdot v := (uh)a(kv) \in HAK. \end{aligned} \quad (2.2)$$

この両側作用による軌道分解は、ギルド HAK の**両側コセット分解**を与える：

$$HAK = \coprod_{i \in I} Ha^{(i)}K, \quad (a^{(i)} \in A). \quad (2.3)$$

(用心：群 G の一般の部分集合は両側コセット分解を持たない。)

以下の構成では、両側コセット $Ha^{(i)}K$ (2 次のクラン) が大きな役割を果たす。

補足 2.2. 高次群論では、文字通り「高次構造」を扱うのだが、意外なことに 2 次の部分でかなり制御できる。これはモース理論じみていて興味深い (微分可能多様体の上のモース関数の 2 次の部分で、この多様体の位相型が決まる)。

ギルド・シナジーを次で定義する：

$$\psi : H \times A \times K \rightarrow HAK, \quad (h, a, k) \mapsto hak. \quad (2.4)$$

分解 $H \times A \times K = \coprod_{b \in A} H \times \{b\} \times K$ を $H \times A \times K$ の**分解**という (各 $H \times \{b\} \times K$ は**サテライト**)。このとき、ギルド・シナジーはサテライト分解から両側コセット分解への写像とみなせる：

$$\psi : \coprod_{b \in A} H \times \{b\} \times K \longrightarrow \coprod_{i \in I} Ha^{(i)}K. \quad (2.5)$$

ここで、各サテライト $H \times \{b\} \times K$ は両側コセット $HbK (= Ha^{(i)}K \text{ for some } i)$ にうつることに注意。つまり、ギルド・シナジーは factor-wise な写像である。

定義 2.3. サテライト $H \times \{b\} \times K$ が両側コセット $Ha^{(i)}K$ の上にあるとは、ギルド・シナジー $\psi : H \times A \times K \rightarrow HAK$ が $H \times \{b\} \times K$ を $Ha^{(i)}K$ にうつすとき。つまり $HbK = Ha^{(i)}K$ のとき。また、 $Ha^{(i)}K$ の上にあるサテライトの個数（無限個ある場合は cardinality）を $s^{(i)}$ と記し、 $Ha^{(i)}K$ のサテライト指数という。（ギルドが有限のときは、サテライトの個数は有限個、したがってサテライト指数も有限である。）

慣習 2.4. $x \in Ha^{(i)}K$ に対し、 $s^{(i)}$ を x のサテライト指数ともいう。

このとき、次を導入する：

定義 2.5. すべての $x \in Ha^{(i)}K$ に対するサテライト指数の総計 $m^{(i)} := s^{(i)}|Ha^{(i)}K|$ を $Ha^{(i)}K$ の重複度という。

次は [Ta3] の主結果のひとつである：

交点公式 有限ギルド HAK に対し、次が成り立つ：

$$|H||A||K| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H \cap K^{a^{(i)}}|. \quad \text{ここで } K^{a^{(i)}} := a^{(i)}Ka^{(i)-1}. \quad (2.6)$$

証明は、ギルド・シナジーのファイバーの元の個数の数え上げによる。詳しくは [Ta3] 参照。この交点公式は、上部構造（シナジー）を使ってはじめて定式化されることに注意——古典群論では定式化されない（この点で、シナジーの役割は、「層」が“現代的な”代数幾何で果たした役割と似ている）。公式 (2.6) は、高次群論独自の法則性を浮き彫りにしている。余談になるが、昔読んだ、次の文章が頭に浮かんだ：

マクロの世界には、ミクロの世界と異質の統一があり、異なるレベルでの法則がある。

久保亮五 『統計物理学』岩波講座 (1978) の初版への序

われわれの交点公式 (2.6) は下で述べる代数幾何のベズーの定理に似ている——意外なことに、（可換とはほど遠い）群の世界でも、代数幾何の定理の類似物が成り立つのである。記号を準備する。複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の平面代数曲線 C と D に対し、それらの次数を $\deg C, \deg D$ と書く（これらは、 C および D の定義多項式の次数）。このとき、ベズーの定理 [EiHa] p.140 は、次を主張する：

$\deg C \deg D$ は、 C と D の各交点の「交差重複度」をすべて足し上げたものに等しい。

これを少し書き換える。まず、ここに現れる交差重複度の集合を $\{m_i, i = 1, 2, \dots, l\}$ とする。各 m_i に対し、交差重複度が m_i に等しい交点全体の集合を $(C \cap D)_i$ と表すことにし、その個数を $|(C \cap D)_i|$ と表す。このとき、

$$\text{ベズーの定理} \quad \deg C \deg D = \sum_{i=1}^l m_i |(C \cap D)_i|.$$

これは、われわれの交点公式 (2.6) に酷似している。可換な世界（可換環論）と非可換な世界（高次群論）で、なぜ共通の「ベズー（型）の定理」が成り立つのだろうか。背後に根源的な（カテゴリーカルな）理由があるのだろうか。気になるところではある。

対照表を載せておく：

代数幾何	高次群論
$\mathbb{P}^2$: 複素射影平面	HAK : G のギルド
$C, D \subset \mathbb{P}^2$: 平面代数曲線	$H, K \subset HAK$: G の部分群
$(C \cap D)_i$, 交差重複度 m_i	$H \cap K^{a^{(i)}}$, 重複度 $m^{(i)}$
$\deg C, \deg D$	$ H , K $
ベズーの定理	交点公式
$\deg C \deg D = \sum_{i=1}^l m_i (C \cap D)_i $	$ H A K = \sum_{i \in I} m^{(i)} H \cap K^{a^{(i)}} $

補足 2.6. ベズーの定理と比べると、われわれの交点公式には、“余計なもの” ($|A|$ や $a^{(i)} \in A$) が現れる。この違いは、 C と D の “ambient space” $\mathbb{P}^2$ は C と D によらないのに対し、 H と K の “ambient space” HAK は A に依存することに起因する。

われわれの交点公式 (2.6) の応用例をいくつか挙げておく。まずは、両側コセット HaK の位数の古典的な公式を (2.6) の系として導出する。

例 2.7. 有限ギルド HAK の真ん中の部分 A が 1 点集合 $A = \{a\}$ ($a \in G$) のときは、 HAK は両側コセット HaK である。この両側コセット分解は自明、つまり自分自身であり、その重複度は $|HaK|$ である。また、 $|A| = |\{a\}| = 1$ に注意すると、交点公式 (2.6) は $|H||K| = |HaK||H \cap K^a|$ となる。つまり、

$$|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K^a|}. \quad (2.7)$$

これは HaK の位数の古典的な公式にほかならない。

例 2.8. 有限セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := H_2 H_3 \cdots H_{n-1}, \quad K := H_n \quad (\text{ただし、} n = 2 \text{ の場合は } A = \{e\})$$

と取り、 HAK に交点公式 (2.6) を適用すると、

$$|H_1||H_2H_3\cdots H_{n-1}||H_n| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \quad (2.8)$$

例 2.9. 有限モニック・クラン $H_1a_2H_2a_3H_3\cdots a_{n-1}H_{n-1}a_nH_n$ に対し、

$$H := H_1, \quad A := a_2H_2a_3H_3\cdots a_{n-1}H_{n-1}a_n, \quad K := H_n$$

と取り、 HAK に交点公式 (2.6) を適用すると、

$$|H_1||a_2H_2a_3H_3\cdots a_{n-1}H_{n-1}a_n||H_n| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \quad (2.9)$$

一般の有限クラン $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ に対しては、有限モニック・クランとみなし、交点公式 (2.6) を適用すればよい。つまり、 $H_0a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ (ただし、 $H_0 := \{e\}$ は単位部分群) とみなしてから、(2.6) を適用すればよい。

3 ブースターと分解型交点公式

セクトやクランに対する公式 (2.8) や (2.9) は、「ギルドの交点公式」から導かれたものである。しかし、これら以外にも（ギルドの交点公式からは導かれない）セクトやクランに“固有の”公式もある。まず、観察から始める。有限セクト $H_1H_2\cdots H_n$ に対し、例 2.8 で示したように、

$$|H_1||H_2H_3\cdots H_{n-1}||H_n| = \sum_{i \in I} m^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \quad (3.1)$$

とくに $n = 2, 3$ のとき、左辺は $|H_1||H_2|$, $|H_1||H_2||H_3|$ である。では、

$n \geq 4$ のときも、 $|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式が存在するであろうか？

答えはイエスである。しかしその導出は、今までの「ギルドに関する概念だけを使った」議論では足りず、さらに他の概念も導入しなければならない—したがって導かれる公式は、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ に“固有の”公式なのである。思い出しておく、(3.1) を導くときのギルド表示 HAK は、 $H = H_1$, $A = H_2H_3\cdots H_{n-1}$ および $K = H_n$ であり、次の写像と分解が活躍した：

- ギルド・シナジー：

$$\begin{aligned} \psi : H_1 \times H_2H_3\cdots H_{n-1} \times H_n &\longrightarrow H_1H_2H_3\cdots H_{n-1}H_n, \\ (h_1, h_2h_3\cdots h_{n-1}, h_n) &\longmapsto h_1h_2h_3\cdots h_{n-1}h_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- サテライト分解：

$$H_1 \times H_2 H_3 \cdots H_{n-1} \times H_n = \coprod_{b \in H_2 H_3 \cdots H_{n-1}} H_1 \times \{b\} \times H_n, \quad (3.3)$$

ここで、各 $H_1 \times \{b\} \times H_n$ はサテライト。

これらだけでは $|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式を導くには不十分で、さらに次の写像と分解が必要である：

- ブースター：

$$\begin{aligned} \varphi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n &\longrightarrow H_1 \times H_2 H_3 \cdots H_{n-1} \times H_n, \\ (h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n) &\longmapsto (h_1, h_2 h_3 \cdots h_{n-1}, h_n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

- プラネット分解：

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n = \coprod_{(c_2, c_3, \dots, c_{n-1}) \in H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_{n-1}} H_1 \times \{(c_2, c_3, \dots, c_{n-1})\} \times H_n, \quad (3.5)$$

ここで、各 $H_1 \times \{(c_2, c_3, \dots, c_{n-1})\} \times H_n$ は**プラネット**。

セクト・シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、ギルド・シナジー ψ とブースター φ の合成写像 $\pi = \psi \circ \varphi$ として表されることに注意する：

$$\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \xrightarrow{\varphi} H_1 \times H_2 H_3 \cdots H_{n-1} \times H_n \xrightarrow{\psi} H_1 H_2 \cdots H_n. \quad (3.6)$$

ここで、

- (i) ブースター φ は**局所的に**全単射（したがって、トポロジーのエタール写像²の類似物）。実際、各プラネット $P := H \times \{(c_2, c_3, \dots, c_{n-1})\} \times H_n$ への制限

$$\begin{aligned} \varphi_P : H_1 \times \{(c_2, c_3, \dots, c_{n-1})\} \times H_n &\longrightarrow H_1 \times \{b\} \times H_n, \\ (h_1, (c_2, c_3, \dots, c_{n-1}), h_n) &\longmapsto (h_1, c_2 c_3 \cdots c_{n-1}, h_n) \left(= (h_1, b, h_n) \right) \end{aligned}$$

は全単射である。

- (ii) ギルド・シナジー ψ の各サテライト $S := H_1 \times \{b\} \times H_n$ への制限はテラジー

$$\begin{aligned} \psi_S : H_1 \times \{b\} \times H_n &\longrightarrow H_1 b H_n, \\ (h_1, b, h_n) &\longmapsto h_1 b h_n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

これは全射であり、全てのファイバーは $H_1 \cap H_n^b$ に全単射である ([Ta3] Corollary 2.17). この結果は、微分トポロジーにおける、沈めこみ (submersion) に対するエーレスマンのファイブレーション定理の類似である（したがって、 ψ_S は沈めこみの類似物）。

²局所同相写像。[nLab] 参照。

補足 3.1. (3.7) は「テラジー」(両側コセット・テラジー) であることに注意。セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ に関する公式を導出する過程で、シナジーだけではなく、テラジーも現れるのである。

簡単のため $H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_{n-1}$ の元 $(c_2, c_3, \dots, c_{n-1})$ を $\vec{c}$ と書くことにする。このとき、プラネット分解 (3.5) は次のように表せる：

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n = \coprod_{\vec{c} \in H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_{n-1}} H_1 \times \{\vec{c}\} \times H_n. \quad (3.8)$$

以下では、プラネット分解のみならず、サテライト分解 (3.3) および両側コセット分解 $H_1 H_2 \cdots H_n = \coprod_{i \in I} H_1 a^{(i)} H_n$, $(a^{(i)} \in H_2 H_3 \cdots H_{n-1})$ も考える。すると、ギルド・シナジー ψ ((3.2) 参照), ブースター φ ((3.4) 参照) およびセクト・シナジー $\pi = \psi \circ \varphi$ は、次のように「分解間の」写像とみなせる：

$$\psi : \coprod_{b \in H_2 H_3 \cdots H_{n-1}} H_1 \times \{b\} \times H_n \longrightarrow \coprod_{i \in I} H_1 a^{(i)} H_n, \quad (3.9)$$

$$\varphi : \coprod_{\vec{c} \in H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_{n-1}} H_1 \times \{\vec{c}\} \times H_n \longrightarrow \coprod_{b \in H_2 H_3 \cdots H_{n-1}} H_1 \times \{b\} \times H_n, \quad (3.10)$$

$$\pi : \coprod_{\vec{c} \in H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_{n-1}} H_1 \times \{\vec{c}\} \times H_n \longrightarrow \coprod_{i \in I} H_1 a^{(i)} H_n. \quad (3.11)$$

簡単のため $H := H_1$, $K := H_n$ とおき、次の用語を導入する。

- サテライト $H \times \{b\} \times K$ が両側コセット $H a^{(i)} K$ の上にあるとは、ギルド・シナジー ψ が $H \times \{b\} \times K$ を $H a^{(i)} K$ にうつすとき、つまり $H b K = H a^{(i)} K$ が成り立つとき。
- プラネット $H \times \{\vec{c}\} \times K$ (ここで $\vec{c} = (c_2, c_3, \dots, c_{n-1})$) がサテライト $H \times \{b\} \times K$ の上にあるとは、ブースター φ が $H \times \{\vec{c}\} \times K$ を $H \times \{b\} \times K$ にうつすとき、つまり $H \times \{c_2 c_3 \cdots c_{n-1}\} \times K = H \times \{b\} \times K$ が成り立つとき。すなわち $c_2 c_3 \cdots c_{n-1} = b$ のとき。
- プラネット $H \times \{\vec{c}\} \times K$ が両側コセット $H a^{(i)} K$ の上にあるとは、セクト・シナジー $\pi (= \psi \circ \varphi)$ が $H \times \{\vec{c}\} \times K$ を $H a^{(i)} K$ にうつすとき、つまり $H c_1 c_2 \cdots c_n K = H a^{(i)} K$ が成り立つとき。

定義 3.2. (1) 両側コセット $H a^{(i)} K$ に対し、その上にあるサテライトたちを $S^{(ij)}$ ($j \in J^{(i)}$) とする。サテライト $S^{(ij)}$ に対し、その上にあるプラネットの個数を $S^{(ij)}$ の**プラネット指数**といい、 $p^{(ij)}$ で表す。

(2) 両側コセット $Ha^{(i)}K$ に対し、その上にあるプラネットの個数を $Ha^{(i)}K$ の**プラネット指数**といい、 $q^{(i)}$ で表す。

$p^{(ij)}$ と $q^{(i)}$ は独立ではなく、次の関係を持つ：

$$q^{(i)} = \sum_{j \in J^{(i)}} p^{(ij)}. \quad (3.12)$$

定義 3.3. 両側コセット $Ha^{(i)}K$ のプラネット指数を $q^{(i)}$ とするとき、 $\mu^{(i)} := q^{(i)}|Ha^{(i)}K|$ を $Ha^{(i)}K$ の**絶対重複度**という（一方、 $Ha^{(i)}K$ のサテライト指数を $s^{(i)}$ とするとき、 $m^{(i)} := s^{(i)}|Ha^{(i)}K|$ は $Ha^{(i)}K$ の重複度である）。

このとき、有限セクト $H_1H_2 \cdots H_n$ に対し、次が成り立つ：

分解型交点公式 [Ta3]

$$|H_1||H_2| \cdots |H_n| = \sum_{i \in I} \mu^{(i)} |H_1 \cap H_n^{a^{(i)}}|. \quad (3.13)$$

証明およびこの公式のクランへの一般化は [Ta3] 参照。

セクト・ポセット

有限群の部分群たちのなすポセット（半順序集合：半順序は包含関係で定義）のハッセ図は、有限群の重要な「幾何的不変量」である。セクトのなすポセットに対しても同様にハッセ図を考えることができる。これにより、群の中にセクトたちがどのように分布しているかが見て取れる。たとえば、 G が二面体群 D_4 （位数は 8）のとき、セクト・ポセットのハッセ図は図 3 で与えられる。位数が $\frac{|D_8|}{2} (= 4)$ を越えるものがたくさんあることに注意—これは高次構造の豊かさの反映である。

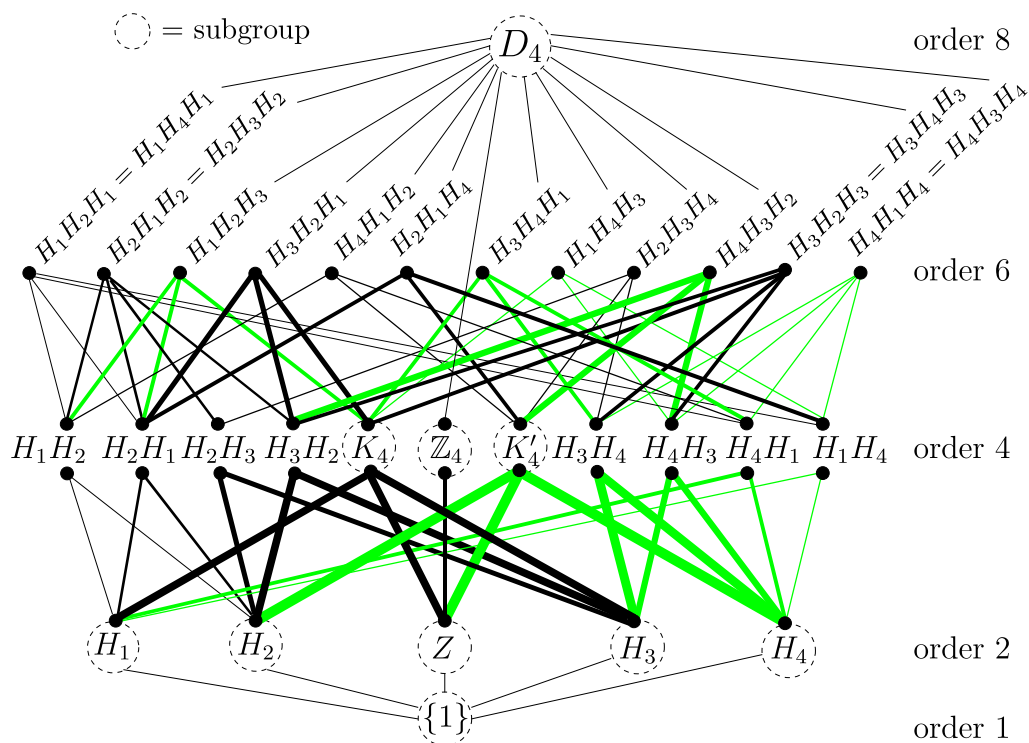


図 3: D_4 のセクト・ポセットのハッセ図: $Z (\cong \mathbb{Z}_2)$ は D_4 の中心, H_1, H_2, H_3, H_4 はそれ以外の $\mathbb{Z}_2$ であり, K_4 と K'_4 はクライン四元群 ($\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). 注: スペースの都合上 K_4 や K'_4 を分解するセクトは描いていない。これらは $K_4 = H_1H_3 = H_3H_1 = ZH_1 = H_1Z = ZH_3 = H_3Z$ および $K'_4 = H_2H_4 = H_4H_2 = ZH_2 = H_2Z = ZH_4 = H_4Z$.

群の高次構造の立場から、セクト・ポセットは重要な研究対象である（たとえば、それから作られる単体複体の代数トポロジー的な性質など）。ただし、セクト・ポセットは情報が豊富過ぎるので、うまく捨象しないと普遍的な原理が取り出せない。余談だが、こういった状況は物理学でよく起こる（以下の引用で、太字は引用者による）。

理論物理学における「優れたモデル」というのは、決して、実際の物質に忠実なモデルのことではない。むしろ、きわめて複雑な現実の系の中から、**着目している普遍的な現象にとって本質的な要素だけを抜き出し、その現象が生じるメカニズムそのものを集中的に研究できるようにしたものが、優れたモデルなのだ。**

田崎晴明 『統計力学 II』 p.428 強磁性イジング模型 培風館 (2008 年)

最後に

すでに establish された分野と違って、「高次群論」では、まずもって何をどのように記述すべきか、良い定理とは何か、ということをよくよく考えねばならない（自己満足に陥

らないように数学の他分野や物理なども見渡しながら)。物理学において、基本法則は「方程式」で表されている。たとえ、その方程式が解けようが解けまいが、それはそれ、別の話である。核心部分は、基本法則の定式化にある。「方程式を解く」というのは二次的な作業である（重要ではあるが）。また、幾何学においても、「ガウス・ボンネの定理」や「指数定理」は、それ自体尊いものである。「公式」というと、受験数学的な感覚では「それに当てはめればよい便利なもの」とチープになってしまうが、断じてそんなことはない。数学における良い公式は、物理の基本法則に当たるものであり、その分野の象徴となるものである。こういった観点から、高次群論においても、基本的な「公式」を導出することが重要であると考えている。

参考文献

- [EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes*, Springer-Verlag (1999)
- [Ful] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, AMS. (1984)
- [HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups*, Int. J. Group Theory 13 (2) (2024), 133–160
- [HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups*, Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367
- [HiTa2] ———, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball*, J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233
- [Isa] I. Isaacs, *Finite Group Theory*, AMS. (2008)
- [nLab] nLab, *étale map*, <https://ncatlab.org/nlab/show/%C3%A9tale+map>
- [Ta1] S. Takamura, “群の高次構造とその同伴ファイブレーション”, 研究集会 変換群の幾何とトポロジー (2023 年 6 月), 数理研講究録 (2024) p.94–117
- [Ta2] S. Takamura, “高次群論とその幾何学”, 研究集会 有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究 (2023 年 12 月), 数理研講究録 (2024)
- [Ta3] ———, *Bézout type theorem for higher order objects of groups*, Preprint (2024)
- [Ta4] S. Takamura, *Prime factorizations of finite groups, I, II, and III*, (2023), to appear from Advances in Group Theory and Applications

- [Ta5] ———, *Blowdown maps between subgroup posets*, Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499
- [Ta6] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams*, Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897
- [Ta7] ———, *Linearization of quotient families*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389
- [Ta8] ———, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014)
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf>
- [Ta9] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III, (Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves)*, Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)
- [Ta10] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, I, (Splitting criteria via configurations of singular fibers)*, J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145