Dijkgraaf-Witten 不変量の K 理論的研究

東京工業大学理学院数学系数学コース 柳田 幸輝
Koki Yanagida
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

DW 不変量は有向閉三次元多様体の位相的不変量であり、その値を常ホモロジーにもつ。本研究では、DW 不変量の構成を模倣することで、K-ホモロジーに値を持つ位相的不変量を新たに定義した。これを KDW 不変量と呼ぶ。加えて、いくつかの Brieskorn homology sphere と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ の組に対して KDW 不変量の計算結果を与えた。これは基本群が非ベキ零な多様体に対する DW 不変量の初めての計算例である。

1　導入

Dijkgraaf-Witten 不変量（以降、DW 不変量）とは、Dijkgraaf と Witten によって定義された量である [DW90]。DW 不変量 $\mathrm{DW}_G(X)$ は有限群 G と有向閉三次元多様体 X を与えるたびに定まり、特に G を固定したときに X の位相的不変量として振舞うことが知られている。DW 不変量は、大まかな解釈として、基本類 $[X] \in H_3(X;\mathbb{Z})$ を用いて $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$ を重みづけし足し合わせた量である。さて、Dijkgraaf と Witten は、DW 不変量を三角形分割を用いて表現し、TQFT-like な toy モデルを構成している。そのため、DW 不変量の豊富な計算例は TQFT を理解する一助となる。しかしながら、G や $\pi_1(M)$ が非ベキ零群である計算例は多くない。

本研究では、この DW 不変量を模倣した不変量、KDW 不変量を提案する。KDW 不変量の定義では、常ホモロジーの基本類の代わりに、K-ホモロジーにおける "基本類" $[X]_K \in K_1(X)$ [Rud98] を用いる。このため、KDW 不変量はその値を K-ホモロジーにもつ。本研究の目的はこの KDW 不変量の計算例を示すことである。そのためには K-ホモロジーの構造を定量的に理解する必要がある。そこで本研究では Knapp [Kna78] によって構成された K-ホモロジーの複素表現環 $R(G)$ への埋め込みに注目した。KDW 不変量の複素表現環への埋め込みを α-KDW 不変量と呼んでいる。

本研究で得られた計算結果は以下の三つである。いずれも一般ホモロジーに値を持つ DW 不変量の初めての計算例である。

1. $G = \mathbb{Z}/k$ におけるレンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の α-KDW 不変量
2. $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ におけるレンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の α-KDW 不変量
3. $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ におけるブリ—スコーンホモロジー球面 $\Sigma(k_1, k_2, k_3)$ の α-KDW 不変量

最後の計算結果においては、有限群 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ と基本群 $\pi_1(\Sigma(k_1, k_2, k_3))$ のいずれもが非ベキ零群であることに注意する。

2 準備

この節では、主定理を述べるための準備を行う。G は有限群、X は有向閉奇数次元多様体を意味する。

2.1 K-理論と KDW 不変量

まず初めに K-コホモロジー $K^*(X)$ と K-ホモロジー $K_*(X)$ について復習しよう [HR00, BHS07]。X の複素ベクトル束全体の集合は、ホイットニー和 $\oplus$ によって可換なモノイドを成す。このモノイドから得られるグロダンディーク群を $K^0(X)$ と表し、$K^{-n}(X) \coloneqq K^0(\Sigma^n X)$ で定める。ここで ΣX は約懸垂 $(X \times [0,1])/(X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\} \sqcup \{x_0\} \times [0,1])$ を意味する。こうして定義される $K^*(X)$ は K-コホモロジーと呼ばれている。

次に K-ホモロジーについて復習しよう。K-ホモロジーの定義は複雑であるため、このレポートではその詳細には立ち入らず、二つの基本的な性質を述べよう。(詳細な定義については、[BHS07] を参照)。一つ目は、Bott 周期性 $K_*(X) \cong K_{*-2}(X)$ が成立することである。このため、$K_0(X)$ と $K_1(X)$ のみに着目すれば十分である。二つ目の性質は、K-ホモロジーにおいても、常ホモロジーと同様の手段で "基本類" $[X]_K \in K_1(X)$ を定義できることである [Rud98]。具体的にその定義を述べれば、任意の点 $x \in X$ において $K_1(X) \to K_1(X, X \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ の像が生成元をなす $K_1(X)$ の類を $[X]_K$ として定めている。以降では $[X]_K$ を K-基本類と呼び、K-基本類が定まる多様体のことを K-向き付け可能であると言う。注意として、常ホモロジーの基本類は正負を除いて一意に定まったが、K-基本類は正負を除いても一意に定まるとは限らない。

KDW 不変量は K-基本類を用いて次で定める。

Definition 1. G は有限群とする。加えて、X を K-向き付け可能な閉奇数次元多様体で、$[X]_K$ をその K-基本類とする。KDW 不変量とは、以下で定まる形式和である。

$$\mathrm{KDW}_G([X]_K) \coloneqq \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)} 1_{\mathbb{Z}} (Bf \circ \iota_{\pi_1(X)})_* [X]_K \in \mathbb{Z}[K_1(BG)].$$

ここで各記号は次を意味している。BG と $B\pi_1(X)$ はそれぞれ G と $\pi_1(X)$ の定める分類空間である。$\iota_{\pi_1(X)} : X \to B\pi_1(X)$ は分類写像を意味し、$Bf : B\pi_1(X) \to BG$ は $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$ が誘導する連続写像である。

Remark 1. 有限群 G に対する $K_*(BG)$ の構造は [Eke20] によって、次式のように与えられている。

$$K_*(BG) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } * = 0, \\ \prod_{p \in \mathcal{P}(G)} (\mathbb{Z}/p^\infty)^{r_G(p)}, & \text{if } * = 1. \end{cases} \tag{1}$$

ここで、$\mathcal{P}(G)$ は G の位数を割り切る素数全体のなす集合、そして $r_G(p)$ は位数が p の冪になる元が代表する共役類の個数、$\mathbb{Z}/p^\infty$ はプリューファー p 群を表す。

2.2 Knapp の ψ_G と α-KDW 不変量

次に [Kna78] から単射準同型 ψ_G を導入し、α-KDW 不変量を定義しよう。ψ_G は以下で説明する準同型 $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}$ と μ_s によって構成される。

まず $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}$ を復習しよう。Y を群 G が自由に作用する向き付けられた奇数次元多様体とする。G の位数が有限であったから、その有向ボルディズム群 $\Omega_*(BG)$ は捩れ加群である。このことから、ある $n_Y \in \mathbb{N}$ と G が

作用する $(\mathrm{dim}Y+1)$ 次元多様体 W が存在して、$\sharp^{n_Y}Y=\partial W$ を満たす。ここで $\sharp^{n_Y}Y$ は n_Y 個の Y の連結和であって、∂W は W の境界を表す。この状況の下で G の指標 χ_Y を次で定義できる。

$$\chi_Y(g) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{n_N}\mathrm{Sign}(g,W), & \text{if } g\neq 1, \\ \frac{1}{n_N}\mathrm{Sign}(W), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで、$\mathrm{Sign}(W)$ は W の符号数を、$\mathrm{Sign}(g,W)$ は [AS68] における G-符号数 $\mathrm{Sign}(G,W)$ が定める指標である。Knapp は、$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 係数有向ボルディズム群 $\Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に考察を加えることによって、$\chi_\bullet$ が次の準同型を誘導することを示した (詳細は [Kna78, p.108])。

$$\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}:\Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to R(G)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

次に写像 μ_s を復習する。Knapp は symbol class に着目することで、$[X]_s\in K_1(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を構成した。この $[X]_s$ は、X が K-向き付け可能である場合に、ある K-基本類 $[X]_K\in K_1(X)$ が存在して $[X]_s=[X]_K\in K_1(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ となる性質を持つ。Knapp はこの $[X]_s$ をもちいて、準同型 $\mu_s:\Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to K_1(BG)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を、

$$\mu_s((X,f:X\to BG))\coloneqq f_*[X]_s$$

で定めた。

最終的に、Knapp は $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[1/2]}$ が μ_s とある単射準同型

$$\psi_G:K_1(BG)\otimes\mathbb{Z}[1/2]\to R(G)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$$

の合成写像と等しくなることを示した。ここで、$\mathbb{Z}_{(2)}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアル (2) による局所化を意味する。$\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ が成り立つことに注意する。本研究では、この ψ_G を用いて α-KDW 不変量を次で定める。

Definition 2. X を閉奇数次元多様体とする。α-KDW 不変量とは、次で定まる形式和である。

$$\alpha\text{-KDW}_G(X)=\sum_{\mathrm{Hom}(\pi_1(X),G)}1_{\mathbb{Z}}\ \psi_G\circ(Bf\circ\iota_{\pi_1(X)})[X]_s\in\mathbb{Z}[R(G)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

Remark 2. X が K-向き付け可能であると仮定する。このとき、K-基本類 $[X]_K$ で $[X]_s=[X]_K\in K_1(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を満たすものが存在するのであった。この K-基本類による $\mathrm{KDW}([X]_K)$ の 2-捩れ部分以外は、$\alpha\text{-KDW}_G(X)$ から復元できることが ψ_G の単射性からわかる。

この小節の最後に ψ_G の性質とそれから導かれる補題を述べる。$f:H\to G$ を単射な群準同型としよう。このとき、f によって H を G の部分群として見做すことで、加法的準同型 $f_!\coloneqq\mathrm{Ind}_H^G\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}}:R(H)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}\to R(G)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$ が定義できる。ここで、Ind_H^G は誘導表現である。Knapp は $f_!$ と ψ_G の間で次が成り立つことを示している。

$$f_!\circ\psi_H=\psi_G\circ(Bf_*\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[1/2]})$$

この性質を応用することで次が得られる。

Lemma 1. [Y.] X を閉奇数次元多様体とし、$G\cong\pi_1(X)$ とする。この時、

$$\alpha\text{-KDW}_G(X)=\sum_{f\in\mathrm{Hom}(\pi_1(X),G)}1_{\mathbb{Z}}(f_!\circ(\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[1/2]})(X)).$$

2.3 例：レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量

この小節では記号の導入もかねて、レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量を求める。$k \in \mathbb{N}$ とし、ℓ を k と互いに素な整数とする。

表現 $\rho : \mathbb{Z}/k \to \mathbb{C}^\times$ を $\rho(m) := e^{2\pi m\sqrt{-1}/k}$ と定めよう。このとき、$R(\mathbb{Z}/k)$ は $\{\rho^0, \rho^1, \ldots, \rho^{k-1}\}$ で張られる $\mathbb{Z}$ 自由加群である。以降では、$R(\mathbb{Z}/k)$ を次の対応で $\mathbb{Z}^k$ に同一視する：

$$R(\mathbb{Z}/k) \ni \sum_{i=0}^{k-1} a_i \rho^i \quad \longleftrightarrow \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})^{\mathrm{transpose}} \in \mathbb{Z}^k. \tag{2}$$

特に、$(\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[1/2]})(L^1(k;\ell)) \in R(\mathbb{Z}/k) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$ に対応するベクトルを $\boldsymbol{\xi}(k;\ell) \in (\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z})^k$ と表そう。加えて、$h \in \mathbb{Z}/k$ に対して置換行列 $P_k^{(h)} \in \mathbb{Q}^{k\times k}$ を

$$(P_k^{(h)} \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} 1, & \text{if } j \equiv hi \mod k, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく。このとき、Lemma 1 によって対応 (2) の下で次が成り立つ。

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = 1_{\mathbb{Z}}\boldsymbol{o} + \sum_{h=1}^{k-1} 1_{\mathbb{Z}}(P_k^{(h)}\boldsymbol{\xi}(k;\ell)) \in \mathbb{Z}[(\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z})^k]$$

となる。ここで $\boldsymbol{o} \in (\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z})^k$ はゼロベクトルである。

よって $\boldsymbol{\xi}(k;\ell) \in (\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z})^k$ の値を求めれば α-KDW$_G(M)$ もまた従う。実は、[Kna78] によって任意の k と ℓ における $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(L^1(k;\ell))$ の指標が計算されている。このことから、$\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ は具体的に計算可能である。実際、[Yan23] において $k \in \{3,5,7,11,13\}$ における $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ を具体的に示している。

3 主定理

主結果を述べよう。p を奇素数とする。$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ は位数 p の有限体がなす射影特殊線型群とする。k, k_1, k_2, k_3 は $p^3 - p$ を割り切る互いに異なる奇素数とする。更に、ℓ は k と互いに素とし、ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は

$$k_1k_2\ell_3 + k_1\ell_2k_3 + \ell_1k_2k_3 \in \{\pm 1\}$$

を満たすようにとる。さて、G の構造に考察を与えることによって、位数 k_i の巡回部分群は共役を除いて一意に定まることが分かる。この位数 k_i の巡回群を一つ固定し、H_{k_i} と表そう。以降では、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z} \to R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$ を加法的準同型 $\mathbb{Z}[R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$ と自然にみなす。

Theorem 1. [Y.] α-KDW$_G(L^1(k;\ell))$ は、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}}$ における次の元の像と一致する。

$$(1 - m_k)\boldsymbol{o} + m_k\ \alpha\text{-KDW}_G(L^1(k;\ell)) \in \mathbb{Z}[R(H_k) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

ここで

$$m_k = \begin{cases} p^2 + p, & \textit{if } k | p-1, \\ p^2 - p, & \textit{if } k | p+1, \\ p+1, & \textit{if } k = p. \end{cases}$$

次の二つの Theorem を述べるにあたって、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}^{k_i} \tag{3}$$

であることに注意する。

Theorem 2. [Y.] $p \notin \{k_1, k_2, k_3\}$ とする。α-$\mathrm{KDW}_G(\Sigma(k_1, k_2, k_3))$ は、写像

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^{G} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

による

$$\boldsymbol{o} + 4|G| \sum_{m_1=1}^{(k_1-1)/2} \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_{k_1}^{(m_1)}\boldsymbol{\xi}(k_1;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_3;\ell_3)).$$

の像と一致する。

さて、$p \in \{k_1, k_2, k_3\}$ の場合、$\Sigma(k_1, k_2, k_3) = \Sigma(k_2, k_3, k_1) = \Sigma(k_3, k_1, k_2)$ によって、$k_1 = p$ の場合のみを考えればよい。

Theorem 3. [Y.] $k_1 = p$ とし、$\Delta \in \mathbb{Z}/p$ は $\mathbb{Z}/p$ において二乗数ではないとする。α-$\mathrm{KDW}_G(\Sigma(k_1, k_2, k_3))$ は、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^{G} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

による

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{o} + 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(1)}\boldsymbol{\xi}(p;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2)) \\ &+ 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(\Delta)}\boldsymbol{\xi}(p;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_3;\ell_3)). \end{aligned}$$

の像と一致する。

参考文献

[AS68] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[BHS07] P. Baum, N. Higson, and T. Schick, *On the equivalence of geometric and analytic K-homology*, Pure Appl. Math. Q.**3** (2007), no. 1, Special Issue: In honor of Robert D. MacPherson. Part 3, 1–24.

[DW90] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 393–429.

[Eke20] J. Ekenstam, *K-homology and analytic surgery of finite groups*, Master's thesis, Chalmers university of technology, 2020.

[HR00] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Oxford Science Publications.

[Kna78] K. Knapp, *On the K-homology of classifying spaces*, Math. Ann. **233** (1978), no. 2, 103–124.

[Rud98] Y. B. Rudyak, *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With a foreword by Haynes Miller.

[Yan23] K. Yanagida, *The Dijikgraaf-Witten invariant in topological K-theory*, preprint (2023).