Directed treeの分岐増大度とshift作用素のhypercyclicity

筑波大学数理物質科学研究群（博士課程後期）数学学位プログラム
範揚武
Akitake Han[1]
Degree Programs in Pure and Applied Sciences,
Graduate School of Science and Technology, Doctoral Program in mathematics,
University of Tsukuba

1 序

本稿では, 川村一宏先生との共著論文 [6] で得られた結果を説明する. directed tree 上の l^p 空間及び c_0 空間上において, 重み付き backward shift が位相推移性を持つための必要十分条件は, [2] によって得られている. 我々の主定理は, これらの結果を踏まえて, backward shift の重みを連続的に tree の境界に拡張できる場合に, backward shift が位相推移性を持つための必要条件と十分条件について, tree の分岐度を表す関数及び重み関数が tree の境界においてとる値を用いて調べたものである.

この章の以下の各節では, いくつかの用語・記号を定義して, 本稿の主定理の基礎である [2] の Theorem4.4 及び Theorem5.3 を述べる.

1.1 hypercyclic と toplogical mixing

可分な Banach 空間 X 上の有界線型写像 $T : X \to X$ が<u>hypercyclic</u>であるとは, T が位相推移性を有するとき, すなわち $x \in X$ が存在して, $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が X で稠密であるときをいう. T が hypercyclic であることと, X の任意の空でない開集合 U, V に対して, $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在することが同値であることが Baire の定理を使って示される.

T が<u>topological mixing</u>とは, X の任意の空でない開集合 U, V に対して, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > n_0$ ならば $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ が成り立つときをいう. 従って, topological mixing ならば hypercyclic である.

[1]This work was supported by Research Institute for Mathematical Siencees, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. Also it is partially supported by JSPS Grant-In-Aid No.24K06704.

例 **1.1.** (1) (S.Rolewicz 1969) $X = l^2(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty\}$, $\lambda > 1$ とする．X 上の有界線型作用素 B を $B : X \ni (a_1, a_2, a_3 \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4 \dots) \in X$ とすると, λB は, X 上で hypercyclic となる．

(2) (H.N.Salas 1995) $X = l^2(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty\}$, $\lambda > 1$ とする．$B_\lambda : X \to X$ を, $a = (\dots a_{-1}, a_0, a_1 \dots) \in X$ について,

$$(B_\lambda(a))(j) = \begin{cases} \lambda^{-1} a_{j+1} \ (j < 0), \\ \lambda a_{j+1} \ (0 \leq j) \end{cases}$$

となる作用素とすると, B_λ は X 上で hypercyclic となる ([4] Theorem 2.1).

1.2 directed tree

頂点の集合 V と有向辺の集合 $E \subset V \times V$ で構成される有向グラフ $T = (V, E)$ が, ① T の underlying グラフ（辺の方向を無視したグラフ）が連結で, ② underlying グラフがサイクルを持たず, ③任意の $v \in V$ に対して, $(u, v) \in E$ となる $u \in V$ は高々 1 つであるときに T は<u>directed tree</u>という．

T が directed tree であるとき, $(u, v) \in E$ である $u \in V$ を持たない $v \in V$ は, 高々 1 つであることが示される．このような $v \in V$ が存在すれば, それを T の<u>*root*</u>という．

directed tree に関して記号を次のように定義する．任意の $v \in V$ に対して, $Chi(v) \overset{\text{def}}{=} \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$, $Chi^0(v) \overset{\text{def}}{=} \{v\}$ として, $Chi^n(v) \overset{\text{def}}{=} Chi(Chi^{n-1}(v))$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．また, 任意の $v \in V \backslash \{root\}$ に対して, $par(v)$ は $(u, v) \in E$ を満たす $u \in V$ として, $par^0(v) \overset{\text{def}}{=} v$, $par^n(v) \overset{\text{def}}{=} par(par^{n-1}(v))$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．

directed tree $T = (V, E)$ が $|Chi(v)| > 0$ $(v \in V)$ を満たす場合, $v_0 \in V$ を固定する（ただし $root$ を持つ場合は $v_0 = root$）と, 任意の $v \in V$ に対して, $n, n_0 \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して, $par^{n_0}(v_0) = par^n(v)$ とすることができ, $\gamma(v) \overset{\text{def}}{=} n - n_0$ が, $n, n_0 \in \mathbb{N}_0$ の取り方によらずに決まり, γ は $\mathbb{Z}$（$root$ を持たない場合）または $\mathbb{N}_0$（$root$ を持つ場合）への全射グラフ準同型写像となる．

以下では, directed tree は <u>$|Chi(v)| > 0$ $(v \in V)$ を満たすと仮定し, $v_0 \in V$ が固定されていて (ただし, $root$ を持つ場合は $v_0 = root$), 上記の全射グラフ準同型写像 γ が v_0 によって与えられていると</u>する．

1.3 $l^p(V)$ 空間, $c_0(V)$ 空間と重み付き backward shift 作用素

$T=(V,E)$ を directed tree とする. V 上の数列空間 $l^p(V)$ ($p\in[1,\infty)$) と $c_0(V)$ を

$$l^p(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f\in\mathbb{C}^V \mid \sum_{v\in V}|f(v)|^p<\infty\},$$
$$c_0(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f\in\mathbb{C}^V \mid \forall\epsilon>0 \text{ に対して } \exists F(\text{有限集合})\subset V s.t. |f(v)|<\epsilon\ (v\in V\backslash F)\}$$

とする. $l^p(V)$ と $c_0(V)$ は, それぞれ $\|f\|_{l^p}=\left(\sum_{v\in V}|f(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_{c_0}=\sup_{v\in V}|f(v)|$ をノルムとして Banach 空間である. (V が無限集合の場合, $l^\infty(V)=\{f\in\mathbb{C}^V \mid \sup_{v\in V}|f(v)|\infty\}$ は可分ではないので, $l^\infty(V)$ 上の有界線型作用素は hypercyclic にはならない. そのため, $c_0(V)$ を考えている.)

定義 1.2 (重み付き backward shift 作用素)**.** X を directed tree $T=(V,E)$ 上の $l^p(V)$ $(1\le p<\infty)$ または $c_0(V)$ とする. $\lambda=(\lambda_v)_{v\in V}$ $(\lambda_v\in\mathbb{C})$ について, λ を重みとする backward shift$B_\lambda : X\to X$ を

$$B_\lambda f(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{u\in Chi(v)} \lambda_u f(u)\ (v\in V)$$

によって定義する.

以下本稿を通して, 重み付き backward shift B_λ の重み λ は$\underline{\lambda_v>0\ (v\in V)}$を満たすと仮定する. また, $p\in(1,\infty)$ に対して, p^* を p の共役値, すなわち$\underline{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1}$を満たす値とする.

定理 1.3 ([3]Prop.3.1.8; [2]Prop.2.3)**.** X は directed tree$T=(V,E)$ 上の $l^p(V)$ $(1\le p<\infty)$ または $c_0(V)$, B_λ は $\lambda=(\lambda_v)_{v\in V}$ を重みとする backward shift とすると, B_λ がX上の有界線型作用素となる必要十分条件は

$$\sup_{v\in V\backslash\{root\}} \lambda_v<\infty\ (X=l^1(V)),$$
$$\sup_{v\in V}(\sum_{u\in Chi(v)}\lambda_u^{p^*})<\infty\ (X=l^p(V)\ p\in(1,\infty)),$$
$$\sup_{v\in V}(\sum_{u\in Chi(v)}\lambda_u)<\infty\ (X=c_0(V)).$$

が成り立つことである.

1.4 Hypercyclicity Criterion と Grosse-Erdmann and Papathanasiou の定理

定理 1.4. (C.Kitai, etc) $T : X \to X$ を可分な Banach 空間 X 上の有界線型作用素とする. X の稠密な部分集合 X_0, Y_0, 増大自然数列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, 及び写像の列 $(S_{n_k} : Y_0 \to X)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して,
(i) $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x) = 0$ $(\forall x \in X_0)$,
(ii) $\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(y) = 0$ $(\forall y \in Y_0)$,
(iii) $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) = y$ $(\forall y \in Y_0)$
とできるとき, T は hypercyclic である.
特に, 増大自然数列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ として, $\mathbb{N}$ がとれるとき, T は topological mixing である.

Hypercyclicity Criterion は, 当初 C.Kitai によって与えられ, 適宜に改良されている Criterion であり, 作用素の Hypercyclicity を示す際によく使われる重要な定理である. 次に述べる [2]Theorem4.4 及び Theorem5.3 の証明にも Hypercyclicity Criterion が使われている.

以下, directed tree $T = (V, E)$ 上の l^p あるいは c_0 空間上で定義された backward shift 作用素の重みを λ とするとき, $u \in Chi^n(v)$(すなわち $v = par^n(u)$) である $u, v \in V$ について, $\prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{par^j(u)}$ を $\lambda(v \to u)$ で表す. また, $n \in \mathbb{N}$ について, $u <_n v$, $u \sim_n v$ は, それぞれ $u \in Chi^n(v)$, $u \in Chi^n(par^n(v))$ を意味する.

定理 1.5 ([2], Theorem4.4)**.** T は $root$ を持つ directed tree, X は $l^p(V)$ $(p \in [1, \infty))$ 又は $c_0(V)$, 重み付き backward shift $B_\lambda : X \to X$ は有界とする.
(1) このとき以下は同値である.
(i) B_λ は hypercyclic
(ii) 増大自然数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して, 以下が成り立つ. 任意の $v \in V(T)$ に対して,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{u<_{n_k}v} \lambda(v \to u) = \infty \quad (X = l^1(V)),$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{u<_{n_k}v} \lambda(v \to u)^{p^*} = \infty \quad (X = l^p(V),$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{u<_{n_k}v} \lambda(v \to u) = \infty \quad (X = c_0(V)).$$

(2) B_λ が topological mixing である必要十分条件は, (ii) で $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ として, $\mathbb{N}$ がとれることである.

定理 1.6 ([2], Theorem5.3)**.** T は $root$ を持たない directed tree, X は $l^p(V)$ $(p \in [1, \infty))$ 又は $c_0(V)$, 重み付き backward shift $B_\lambda : X \to X$ は有界とする.

(1) このとき以下は同値である.
(i) B_λ は hypercyclic である.
(ii) 増大自然数列 $\{n_k\}_{(}k \in \mathbb{N})$ が存在して, 任意 $v \in V(T)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \sup_{u <_{n_k} v} \lambda(v \to u) = \infty \\ \lim_{k\to\infty} \max\Big(\dfrac{1}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)}, \dfrac{\sup_{u \sim_{n_k} v} \lambda(par^{n_k}(u) \to u)}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)}\Big) = \infty \end{cases} (X = l^1(V)), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \sum_{u <_{n_k} v} \lambda(v \to u)^{p^*} = \infty \\ \lim_{k\to\infty} \max\Big(\dfrac{1}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)}, \dfrac{\sum_{u \sim_{n_k} v} \lambda(par^{n_k}(u) \to u)^{p^*}}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)^{p^*}}\Big) = \infty \end{cases} (X = l^p(V)),$$

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \sum_{u <_{n_k} v} \lambda(v \to u) = \infty \\ \lim_{k\to\infty} \max\Big(\dfrac{1}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)}, \dfrac{\sum_{u \sim_{n_k} v} \lambda(par^{n_k}(u) \to u)}{\lambda(par^{n_k}(v) \to v)}\Big) = \infty \end{cases} (X = c_0(V).$$

(2) B_λ が topological mixing である必要十分条件は, (ii) で $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ として, $\mathbb{N}$ がとれることである.

2 準備と主定理

主定理は, 定理 1.5, 定理 1.6 を基に, directed tree の境界を考えて, 作用素の重み関数 λ が境界上に連続的に拡張できる場合に, tree の分岐増大度と λ の境界での値に着目して, hypercyclicity, topological mixing の条件を考察したものである. Tree の分岐増大度を測る指標として, 頂点 v に対する n の関数 $|Chi^n(v)|$, $|Chi^n(par^n(v))|$ の n に関する増大度を表す関数を用いる.

以下では, $\underline{0 < |Chi(v)| < \infty \ (v \in V)}$ を満たす directed tree を考える.

2.1 directed tree の境界及び分岐度関数

定義 2.1. (directed tree の境界と位相)

(1) $T=(V,E)$ を root を持つ directed tree とする．また, $\gamma : V \to \mathbb{N}$ は 1.2 節で定めた全射グラフ準同型写像とする．

(i) 頂点の列 $\omega = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $v_0 = root, v_{n-1} = par(v_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすものを T のgeodesic rayと呼び, $\partial_+ T$ で T の geodesic ray 全体をあらわす．$\overline{T} \stackrel{\text{def}}{=} V \cup \partial_+ T$ として, $\partial_+ T$ をT の境界と呼ぶ.

(ii) $v \in V$ について, $E(v) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl(\cup_{n\in\mathbb{N}} Chi^n(v)\bigr) \cup \{\omega \in \partial_+ T \mid v \in \omega\}$ とする.$\overline{T}$ の各点について, V の頂点の近傍系は離散位相の近傍系, $\omega = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_+ T$ の基本近傍系は $\{E(v_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ とすることによって, $\overline{T}$ の位相を定める．この時, $\overline{T}$ は, 完全不連結なコンパクト距離化可能空間である．

(2) $T=(V,E)$ を root を持たない directed tree とする．また, $\gamma : V \to \mathbb{Z}$ は 1.2 節で定めた全射グラフ準同型写像とする．

(i) 頂点の列 $\omega = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ で $v_{n-1} = par(v_n)$ $(n \in \mathbb{Z}), \gamma(v_0) = 0$ を満たすものを T のgeodesic lineと呼び, $\partial_+ T$ で T の geodesic line 全体をあらわす．$\overline{T} \stackrel{\text{def}}{=} V \cup \partial_+ T \cup \{-\infty\}$ として, $\partial_+ T \cup \{-\infty\}$ をT の境界と呼ぶ.

(ii) $\overline{T}$ の各点について, V の頂点の近傍は離散位相の近傍系, $\omega = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \partial_+ T$ の基本近傍系は $\{E(v_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$, $-\infty$ の基本近傍系は $\{F_n \mid n \in N\}$ とすることによって, $\overline{T}$ の位相を定める．ここで, $F_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \gamma(v) < -n\}$ である．

定義 2.2. (directed tree$T$ の分岐度をあらわす関数)

(1) T の頂点 v と $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\overline{\beta}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |Chi^n(v)|, \ \underline{\beta}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |Chi^n(v)|$$

とする．このとき, $\omega = (v_j)_j$ を T の geodesic ray または line とすると, $\overline{\beta}(v_j)$, $\underline{\beta}(v_j)$ は, j について, 単調非増大であることがわかり, $\omega = (v_j)_j \in \partial_+ T$ について,

$$\overline{\beta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty} \overline{\beta}(v_j) \in [0,\infty], \ \underline{\beta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty} \underline{\beta}(v_j) \in [0,\infty]$$

が定義できる．

(2) T の頂点 v と $n \in \mathbb{N}$ について, $G_n(v), g_n(v), \overline{g}(v)$ を

$$G_n(v) \stackrel{\text{def}}{=} |Chi^n(par^n(v))|, \ g_n(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \log G_n(v), \ \overline{g}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty} g_n(v)$$

とする． ある正数 M が存在して $|Chi(v)| < M$ $(v \in V)$ であれば, 任意の $u, v \in V$ について, $\overline{g}(u) = \overline{g}(v)$ であることがわかり, $v \in V$ に選び方に依存しない量

$$\Gamma_T \overset{\text{def}}{=} \overline{g}(v)$$

が定義できる.

2.2 主定理

定理 2.3 ($root$ がある場合)**.** $T = (V, E)$ は $root$ を持ち, $0 < |Chi(v)| < \infty$ $(v \in V)$ である directed tree で, X は $l^p(V)$ $(p \in [1, \infty)$ $)$ または $c_0(V)$ とする． また, backward shift B_λ は X 上で有界線型作用素であり, $\lambda = (\lambda_v)_{v \in V}$ は, $\overline{T}$ 上で連続拡張 $\overline{\lambda} : \overline{T} \to (0, \infty)$ を持つとする。

(1) 任意の $\omega \in \partial_+(T)$ について, 以下を満たすならば, B_λ は topological mixing である.

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_\omega > 1 \quad (X = l^1(V)), \\ \overline{\lambda}_\omega \exp(\underline{\beta}(\omega)/p^*) > 1 \quad (X = l^p(V)\ , p \in (1, \infty)), \\ \overline{\lambda}_\omega \exp(\underline{\beta}(\omega)) > 1 \quad (X = c_0(V)). \end{cases} \tag{2.1}$$

(2) B_λ が hypercyclic ならば, 任意の $\omega \in \partial_+(T)$ について以下をみたす.

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_\omega \geq 1 \quad (X = l^1(V)), \\ \overline{\lambda}_\omega \exp(\overline{\beta}(\omega)/p^*) \geq 1 \quad (X = l^p(V)\ , p \in (1, \infty)), \\ \overline{\lambda}_\omega \exp(\overline{\beta}(\omega)) \geq 1 \quad (X = c_0(V)). \end{cases} \tag{2.2}$$

定理 2.4 ($root$ がない場合)**.** $T = (V, E)$ は $root$ を持たず, $0 < |Chi(v)| < \infty$ $(v \in V)$ である directed tree で, X は $l^p(V)$ $(p \in [1, \infty)$ $)$ または $c_0(V)$ とする． また, backward sift B_λ は X 上で有界線型作用素であり, $\lambda = (\lambda_v)_{v \in V}$ は, $\overline{T}$ 上で連続拡張 $\overline{\lambda} : \overline{T} \to (0, \infty)$ を持つとする。

(1) 定理 2.3 の (2.1) を満たし, かつ以下の (b.1) 又は (b.2) を満たすならば, B_λ は topological mixing である.

(b.1) $\overline{\lambda}_{-\infty} < 1$,

(b.2)

(i) $\rho > 0$ が存在して $\lambda(\zeta) > \rho$ $(\zeta \in \overline{T})$, かつ $\Gamma_T > 0$ $(X = l^p(V)\ or\ c_0(V)\ )$,

(ii) $sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sup_{u \sim_n v} \lambda(par^n(u) \to u)}{\lambda(par^n(v) \to v)} = \infty$ $(X = l^1(v)\ )$.

(2) B_λ が hypercyclic ならば, 定理 2.3 の (2.2) を満たし, かつ以下の (i) 又は (ii) を満たす.

(i) $\overline{\lambda}_{-\infty} \leq 1$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} G_n(v) = \lim_{n\to\infty} |Chi^n(par^n(v))| = \infty \quad (v \in V)$.

注意 2.5. 定理 2.4(b.2) について

(1) B_λ が有界である（従って, 定理 1.3 の条件を満たす）こと, 及び $\overline{\lambda}(\zeta) > \rho\ (\zeta \in \overline{T})$ であることから, $|Chi(v)| < M\ (v \in V)$ をみたす正数 M が存在することが従い, Γ_T の存在が保証される.

(2) $X = l^1(V)$ のときの (b.2)(ii) の条件は, 定理 1.6(1.1) 式に現れているものであり, $\overline{\beta}$, $\underline{\beta}$, $\overline{g}$ を使って言い換えられていない.

注意 2.6. 例 1.1 の (1), (2) は, それぞれ定理 2.3(1), 定理 2.4(1) を適用して得ることができる.

注意 2.7. directed tree T が, ある $d \in \mathbb{N}$ について $|Chi(v)| = d\ (v \in V)$ を満たすとき, 分岐 d の<u>homogeneous directed tree</u>という. $d \geq 2$ として, T_1, T_2 を, それぞれ root をもつ分岐 d の homogeneous directed tree, root をもたない分岐 d の homogeneous directed tree とすると, 任意の geodesic ray, あるいは geodesic line $\omega = (v_j)_j$ について, $\overline{\beta}(v_j) = \underline{\beta}(v_j) = \log d,\ j \in \mathbb{N}\ (or \mathbb{Z})$ だから, $\overline{\beta}(\omega) = \underline{\beta}(\omega) = \log d$ である. また, T_2 については $|Chi^n(par^n)| = d^n$ だから $\Gamma_{T_2} = \log d$ となる.

分岐 $d \geq 2$ の homogeneous directed tree T 上の l^p 空間において, $\overline{T}$ に連続的に拡張される重みを持った backward shift B_λ で, hypercyclic であり, かつ topological mixing でないものが構成できる.

2.3 最後に

最後に, 今後の問題として, directed tree を拡張したグラフにおいて hypercyclicity(あるいは topological mixing property) を考察することに触れて, 本稿を終わりにする.

directed tree を拡張したグラフとして, directed semi-tree, generalized directed semi-tree が定義されている ([5]Def.2.2, Def.2.3). directed tree と同様にして, これらの拡張されたグラフ上で l^p 空間, c_0 空間を考えることができる. generalized directed semi-tree G で,

(i)G から $\mathbb{N}$ 又は $\mathbb{Z}$ への全射グラフ準同型写像が存在する

(ii) $u, v \in V$ に対して $u, v \in Chi(w)$ となる $w \in V$, $n \in \mathbb{N}$ がとれる
という 2 つの条件を満たすものを考え, G 上の l^p 空間, c_0 空間において自然に定義される shift 作用素について, hypercyclicity(あるいは topological mixing property) の研究すること, 特にグラフの適切な境界を定義したうえで, 分岐を表す関数やグラフの重み関数と hypercyclicity(topological mixing property) との関係を調べることは興味深い.

参考文献

[1] F.Bayart and É.Matheron, *Dynamics of linear oprators*, Cambridg Tracts in Math. 179(2009), Cambridge.

[2] K-G. Grosse-Erdmann and D. Papathanasiou, *Dynamics of weighted shifts on directed trees*, Indiana Univ. Math. J. 72(2023), 263-299.

[3] Z.J. Jabloński,B.Jung and J.Stochel, *weighted shifts on directed trees*, Mem. Ame. Math. Soc. 216(2012), No. 1017.

[4] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc., 347(1995). 993-1004.

[5] G. Ghosh and S. Hazra, *On analytic struture of weighted shifts on generalized directed semi-trees*, ArXv 2201.09226v1 [math. FA], 23 Jan. 2022.

[6] A. Han and K. Kawamura, *Hypercyclicity of weighted backward shifts and branching growth of directed trees*, submitted.