複素数値連続関数空間上の surjective phase-isometry

新潟大学自然科学研究科　松崎　出穂
新潟大学自然科学研究科　榎並　優太
Izuho Matsuzaki
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
Enami Yuta
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1　はじめに

$(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ を複素ヒルベルト空間とする．Wigner は [7] で, 次の条件を満たす写像 $T\colon H_1 \to h_2$ の特徴づけを行った;

$$|\langle Tx, Ty\rangle| = |\langle x, y\rangle| \quad (x, y \in H_1). \tag{1.1}$$

この結果は Wigner の unitary-antiunitary theorem として知られており, 数理物理学で重要な役割を果たす．Páles and Maksa [4] は式 (1.1) と同値な条件をいくつか与えた．その中の一つが以下の条件である．

$$\{\|Tx + Ty\|, \|Tx - Ty\|\} = \{\|x + y\|, \|x - y\|\} \quad (x, y \in H_1) \tag{1.2}$$

この結果により, 式 (1.1) と同値な条件を内積を用いずに表すことができる．したがって, Wigner の結果で扱われていた写像を, 内積の構造を持たないノルム空間でも考察することができる．ノルム空間 H_1, H_2 の間の写像 $T\colon H_1 \to H_2$ であって, 式 (1.2) を満たすものを **phase-isometry** と呼ぶ．本稿では連続関数空間の単位球面上の phase-isometry の構造について紹介する．タイトルにある複素数値のケースについては発表までに証明できなかったが, 証明のアイデアの基となる実数値のケースについて本稿では扱う．論文として未発表の内容を含むので, 証明は一部には与えるが, 基本的に述べない．

本稿の目的は [6] の結果の別証明を与えることである．別証明のアイデアは [6] と三浦毅教授による．

2 設定

X をコンパクトハウスドルフ空間とする．$C(X,\mathbb{R})$ で X 上の実数値連続関数全体に上限ノルム $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ を入れた実 Banach 空間を表す.

$M \subset S(C(X,\mathbb{R}))$ が極大凸集合であるとは, M が凸集合であって, $M \subset C$ を満たす凸集合 $C \subset S(C(X,\mathbb{R}))$ が存在すれば $M = C$ が成り立つときに言う．$C(X,\mathbb{R})^*$ で A の双対空間に作用素ノルム $\|\Lambda\| = \sup_{f\in S(C(X,\mathbb{R}))} |\Lambda(f)|$ の入った空間を表す．$C(X,\mathbb{R})^*$ の部分集合 E の端点集合 $\mathrm{ext}(E)$ とは, $\Lambda \in E$ であって, $\Lambda = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$ を満たす任意の $\Lambda_1, \Lambda_2 \in E$ に対して $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ が成り立つものの全体である．$\mathrm{ext}(E)$ の点を E の端点と呼ぶ．任意の $x \in X$ に対して, x の point evaluation functional $\delta_x \colon S(C(X,\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ を $\delta_x(h) = h(x)$ $(h \in S(C(X,\mathbb{R})))$ と定義する．$B(C(X,\mathbb{R})^*) = \{\Lambda \in C(X,\mathbb{R})^* : \|\Lambda\| \le 1\}$ で $C(X,\mathbb{R})^*$ の閉単位球を表す．$C(X,\mathbb{R})$ の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(C(X,\mathbb{R}))$ を $\mathrm{Ch}(C(X,\mathbb{R})) = \{x \in X : \delta_x \in \mathrm{ext}(B(C(X,\mathbb{R})^*))\}$ と定義する．本稿で扱う $C(X,\mathbb{R})$ の Choquet 境界は X であることと, 任意の $f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ は X 上で最大絶対値をとることに注意する [2, Theorem 2.3.8].

これ以降, $T\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to S(C(Y,\mathbb{R}))$ は全射な phase-isometry とする.

3 準備

次の補題は Tan and Gao [5] による結果である.

補題 3.1. (Tan and Gao [5, Lemma 2]) T は任意の $f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ に対して $T(-f) = -T(f)$ を満たす．また, T は単射であり, T の逆写像 T^{-1} も全射な phase-isometry である.

記号. 任意の $x \in X$ に対して

$$M_x = \{f \in S(C(X,\mathbb{R})) : f(x) = 1\},$$
$$-M_x = \{f \in S(C(X,\mathbb{R})) : f(x) = -1\}$$

と定義する．また, 任意の $y \in Y$ に対しても同様に

$$N_y = \{u \in S(C(Y,\mathbb{R})) : u(y) = 1\},$$
$$-N_y = \{u \in S(C(Y,\mathbb{R})) : u(y) = -1\}$$

と定義する.

補題 3.2. (Tan, Zhang and Huang [6]) $S(C(X,\mathbb{R}))$ の任意の極大凸集合 M に対して, $S(C(Y,\mathbb{R}))$ の極大凸集合 N が存在して

$$T(M \cup -M) = N \cup -N.$$

が成り立つ.

Hatori, Oi and Shindo [3, Lemma 3.1] より, $C(X,\mathbb{R})$ の極大凸集合 M はある $\xi \in \mathrm{ext}(B(C(X,\mathbb{R})^*))$ を用いて

$$M = \xi^{-1}(\{1\}) \cap S(C(X,\mathbb{R})) \tag{3.1}$$

と表せる. また, Arens-Kelley の定理と Choquet 境界の定義から

$$\mathrm{ext}(B(C(X,\mathbb{R})^*)) = \{t\delta_x : t \in \{-1,1\}, x \in \mathrm{Ch}(C(X,\mathbb{R}))\}$$

が成り立つ. また, $S(C(X,\mathbb{R}))$ の Choquet 境界が X であることより, 直前の等式は

$$\mathrm{ext}(B(C(X,\mathbb{R})^*)) = \{t\delta_x : t \in \{-1,1\}, x \in X\} \tag{3.2}$$

と書き換えられる. よって式 (3.1) と (3.2) より, $S(C(X,\mathbb{R}))$ の任意の極大凸集合 M に対して, あるペア $(t,x) \in \{-1,1\} \times X$ が存在して

$$M = t\delta_x^{-1}(\{1\}) \cap S(C(X,\mathbb{R})) = \{f \in S(C(X,\mathbb{R})) : f(x) = t\} = tM_x \tag{3.3}$$

が成り立つ. また, (t,x) の一意性が Urysohn の補題により従う. 実際, 式 (3.3) を満たす (t',x') を任意にとる. このとき

$$tMx = M = t'M_{x'} \tag{3.4}$$

が成り立つ. $x \neq x'$ とする. このとき Urysohn の補題から, ある $f_0 \in S(C(X,\mathbb{R}))$ が存在して $f_0(x) = 1, f_0(x') = 0$ が成り立つ. $tf_0 \in tM_x$ であるが, $tf_0 \notin t'M_{x'}$ であるため式 (3.4) に矛盾する. よって $x = x'$ が成り立つ. この等式を式 (3.4) に用いて $tM_x = t'M_x$ を得る. 直前の等式より, $f \in tMx$ を任意にとると $t = f(x) = t'$ が成り立つので, (t,x) の一意性が示された. 同様に, $S(C(Y,\mathbb{R}))$ の任意の極大凸集合 N に対してもあるペア (s,y) を $\in \{-1,1\} \times Y$ がただ一つ存在して

$$N = sN_y \tag{3.5}$$

が成り立つ. これらの表現と補題 3.2 を組み合わせて以下の補題を得る.

補題 3.3. 任意の $x \in X$ に対して, ある $y \in Y$ がただ一つ存在して

$$T(M_x \cup -M_x) = N_y \cup -N_y \tag{3.6}$$

が成り立つ.

定義 3.4. 補題 3.3 より, 任意の $x \in X$ に対して式 (3.6) が成り立つような $y \in Y$ がただ一つ存在する. これを用いて写像 $\tau\colon X \to Y$ を式 (3.6) を満たすように構成する. 同様の方法

を用いて, T の逆写像 T^{-1} に対しても写像 $\sigma\colon Y \to X$ を式 (3.6) を満たすように構成する. τ を用いて式 (3.6) を

$$T(M_x \cup -M_x) = N_{\tau(x)} \cup -N_{\tau(x)} \quad (x \in X) \tag{3.7}$$

と書き換える.

補題 3.5. τ と σ は全単射で, $\tau^{-1} = \sigma$ が成り立つ.

記号. 二つの写像 $U_1, U_2\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to S(C(Y,\mathbb{R}))$ に対して, ある関数 $\theta\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to \{-1,1\}$ が存在して $U_1 = \theta U_2$ が成り立つとき, $U_1 \simeq U_2$ と表す.

補題 3.6. $\simeq$ は同値関係である.

T は式 (3.7) の意味で $M_x \cup -M_x$ を保存する. しかし $T(M_x) = N_{\tau(x)}$ あるいは $T(M_x) = -N_{\tau(x)}$ が成り立つとは限らない. そこで T を適切に変換することにより, $T(M_x) = N_{\tau(x)}$ あるいは $T(M_x) = -N_{\tau(x)}$ が成り立つようにすることができる. この性質を用いることにより, T の構造を解明できる. 以下ではそのための準備を行う.

定義 3.7. $x \in X$ を任意にとり固定する. 式 (3.7) より, $f \in M_x$ に対して, $T(f) \in N_{\tau(x)}$ もしくは $T(f) \in -N_{\tau(x)}$ のどちらか一方が成り立つ. これを用いて, 写像 $\phi_x\colon M_x \to N_{\tau(x)}$ を

$$\phi_x(f) = \begin{cases} T(f) & \text{if } T(f) \in N_{\tau(x)}, \\ -T(f) & \text{if } T(f) \in -N_{\tau(x)} \end{cases}$$

と定義する. また, 写像 $\Phi_x\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to S(C(Y,\mathbb{R}))$ を

$$\Phi_x(f) = \begin{cases} \phi_x(f) & \text{if} f \in M_x \\ -\phi_x(-f) & \text{if} f \in -M_x \\ T(f) & \text{if} f \notin M_x \cup -M_x \end{cases}$$

と定義する.

補題 3.8. 任意の $x \in X$ に対して $\Phi_x \simeq T$ が成り立つ.

以下の補題で Φ_x が極大凸集合を保存することを示す. これらの性質は残りの補題を証明する際に鍵となる.

補題 3.9. 任意の $x \in X$ に対して, Φ_x は $\Phi_x(M_x) = N_{\tau(x)}$ と $\Phi_x(-M_x) = -N_{\tau(x)}$ を満たす全射な phase-isometry である.

補題 3.10. 任意の $x, x' \in X$ に対して $\Phi_x \simeq \Phi_{x'}$ が成り立つ. すなわち, ある $\theta\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to \{-1,1\}$ が存在して $\theta\Phi_x = \Phi_{x'}$ が成り立つ.

$x, x' \in X$ に対して補題 3.10 より得られる θ の値は $f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ によって一般に異なるが, $tMx \cap t'M_{x'}$ $(t, t' \in \{-1, 1\})$ 上では一定の値をとることが次の補題からわかる.

補題 3.11. 任意の $(t, x), (t', x') \in \{-1, 1\} \times X$ に対して, 補題 3.10 より得られる $\theta\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to \{-1, 1\}$ は $tM_x \cap t'M_{x'}$ 上で定数である. すなわち, ある $\rho_0 \in \{-1, 1\}$ が存在して,

$$\rho_0 \Phi_x = \Phi_{x'} \text{ on } tM_x \cap t'M_{x'} \tag{3.8}$$

が成り立つ.

定義 3.7 の直前に述べたように, 定義 3.7 で定義した写像 Φ_x とこれまでの補題を用いて

- $T \simeq \Phi$
- $\Phi(M_x) = N_{\tau(x)}$ あるいは $\Phi(M_x) = -N_{\tau(x)}$

を満たす写像 $\Phi\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to S(C(Y,\mathbb{R}))$ を構成しよう. そのために $p_0 \in X$ を任意にとり, これ以降固定する. p_0 と任意に取った $x \in X$ に対して補題 3.11 を適用すると, ある定数 $\rho_{(1,x)}, \rho_{(-1,x)} \in \{-1, 1\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \rho_{(1,x)}\Phi_x &= \Phi_{p_0} \text{ on } \quad M_x \cap M_{p_0}, \\ \rho_{(-1,x)}\Phi_x &= \Phi_{p_0} \text{ on } -M_x \cap M_{p_0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

が成り立つ.

$S(C(X,\mathbb{R}))$ の任意の元 f はある点 $x \in X$ で最大絶対値をとるので, ある $t \in \{-1, 1\}$ が存在して $f \in tM_x$ が成り立つ. これを用いて, 写像 $\Phi\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to S(C(Y,\mathbb{R}))$ を

$$\Phi(f) = \rho_{(t,x)}\Phi_x(f)$$

と定義する. しかし, f が最大絶対値を複数の点で取った場合に $\Phi(f)$ の値が変わる場合がある. 例えば $f \in tM_x \cap t'M_{x'}$ が成り立つとき, $\rho_{(t,x)}\Phi_x(f) = \rho_{(t',x')}\Phi_{x'}(f)$ が成り立つかは直ちにはわからない. よって, この等式が成り立つことを示し, Φ が well-defined かどうか確かめる必要がある.

補題 3.12. 写像 Φ は well-defined である.

次の補題で Φ が極大凸集合を保存する写像であることがわかる.

補題 3.13. Φ は $\Phi \simeq T$ を満たす全射な phase-isometry であり, 任意の $x \in X$ に対して

$$\Phi(M_x) = \rho_{(1,x)}N_{\tau(x)} \quad \text{and} \quad \Phi(-M_x) = -\rho_{(-1,x)}N_{\tau(x)} \tag{3.10}$$

が成り立つ.

補題 3.14. 任意の $x \in X$ に対して $\rho_{(1,x)} = \rho_{(-1,x)}$ が成り立つ.

定義 3.15. $\alpha\colon X \to \{-1,1\}$ を $\alpha(x) = t_{(1,x)}$ $(x \in X)$ と定義する．α を用いて式 (3.10) を

$$\Phi(M_x) = \alpha(x)N_{\tau(x)} \quad \text{and} \quad \Phi(-M_x) = -\alpha(x)N_{\tau(x)} \quad (x \in X) \tag{3.11}$$

と書き直す.

次の補題は Φ の形を決定する上で鍵となる．証明のアイデアは [1, Lemma 2.17] に基づく.

補題 3.16. f を $S(C(X,\mathbb{R}))$ の任意の元, x_0 を X の任意の点とし, $x' \in X$ を $|f(x')| = \|f\|$ を満たす点する．また, $t \in \{-1,1\}$ を

$$t = \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{|f(x_0)|} & \text{if } f(x_0) \neq 0 \\ 1 & \text{if } f(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

とおく．このとき, $|f(x_0)| < 1$ ならば, ある $g \in M_{x_0}$ が存在して $f + (t - f(x_0))g \in tM_{x_0} \cap f(x')M_{x'}$ が成り立つ.

以下の補題により, Φ は絶対値のもとで合成作用素の形になっていることがわかる．そのために定義 3.4 で定義した σ を用いる.

補題 3.17. 任意の $f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ と $y \in Y$ に対して

$$|\Phi(f)(y)| = |f(\sigma(y))|$$

が成り立つ.

証明. 任意に $f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ と $y \in Y$ をとる．$|f(\sigma(y))| = 1$ とする．この場合, $f \in M_{\sigma(y)} \cup -M_{\sigma(y)}$ が成り立つので, 式 (3.7) より $T(f) \in N_y \cup -N_y$ である．また, 補題 3.13 より $\Phi \simeq T$ が成り立つので, ある関数 $\theta\colon S(C(X,\mathbb{R})) \to \{-1,1\}$ が存在して $\Phi = \theta T$ が成り立つ．この等式より, $|\Phi(f)(y)| = |\theta(f)T(f)(y)| = 1 = |f(\sigma(y))|$ を得る.

$|f(\sigma(y))| < 1$ とする．$f \in S(C(X,\mathbb{R}))$ より, ある $x' \in X$ が存在して $f \in f(x')M_{x'}$ が成り立つ．式 (3.12) の x_0 を $\sigma(y)$ として $t \in \{-1,1\}$ を定義する．補題 3.16 より, ある $g \in M_{\sigma(y)}$ が存在して $f + (t - f(\sigma(y)))g \in tM_{\sigma(y)} \cap f(x')M_{x'}$ が成り立つ．$h = f + (t - f(\sigma(y)))g$ とおく．式 (3.11) より $\Phi(f(x')M_{x'}) = \alpha(x')f(x')N_{\tau(x')}$ が成り立つので, $\Phi(f), \Phi(h) \in \alpha(x')f(x')N_{\tau(x')}$ が成り立つ．よって, $\|\Phi(f) + \Phi(h)\| = |\Phi(f)(\tau(x')) + \Phi(h)(\tau(x'))| = 2$ である．同様に, $f, h \in f(x')M_{x'}$ より $\|f + h\| = |f(x') + h(x')| = 2$ が成り立つ．よって $\|\Phi(f) + \Phi(h)\| = \|f + h\|$ を得る．この等式と Φ が phase-isometry であることから

$$\|\Phi(f) - \Phi(h)\| = \|f - h\| \tag{3.13}$$

が従う． $|f(\sigma(y))| \leq |\Phi(f)(y)|$ を示す． $h \in tM_{\sigma(y)}$ と補題 3.13 より $\Phi(h) \in \alpha(\sigma(y))tN_{\tau(\sigma(y))} = \alpha(\sigma(y))tN_y$ である．よって $|\Phi(h)(y)| = |\alpha(\sigma(y))t| = 1$ である．この等式と式 (3.13) より

$$1 - |\Phi(f)(y)| \leq |\Phi(h)(y) - \Phi(f)(y)| \leq \|\Phi(h) - \Phi(f)\| = \|h - f\| \tag{3.14}$$

を得る．また, t の定義 (3.12) と $g \in S(C(X, \mathbb{R}))$ より

$$\|h - f\| = \|(t - f(\sigma(y)))g\| = |t - f(\sigma(y))|\,\|g\| = 1 - |f(\sigma(y))| \tag{3.15}$$

が従う．よって $|f(\sigma(y))| \leq |\Phi(f)(y)|$ が成り立つ．ペア (Φ, f, y) に対して行った議論をペア $(\Phi^{-1}, \Phi(f), \sigma(y))$ に対して同様に行うと, $|\Phi(f)(\tau(\sigma(y)))| \leq |\Phi^{-1}(\Phi(f))(\sigma(y))|$ を得る．よって, $\tau = \sigma^{-1}$ が成り立つことと直前の不等式より $|\Phi(f)(y)| = |\Phi(f)(\tau(\sigma(y)))| \leq |\Phi^{-1}(\Phi(f))(\sigma(y))| = |f(\sigma(y))|$ が成り立つ．よって $|\Phi(f)(y)| \leq |f(\sigma(y))|$ を得る．以上より $|\Phi(f)(y)| = |f(\sigma(y))|$ が従う． □

4 主定理の証明

定理 4.1. $T\colon S(C(X, \mathbb{R})) \to S(C(Y, \mathbb{R}))$ が全射な phase-isometry であるとする．このとき, ある同相写像 $\sigma\colon Y \to X$ と連続写像 $\alpha\colon X \to \{-1, 1\}$ と写像 $\theta\colon S(C(X, \mathbb{R})) \to \{-1, 1\}$ が存在して

$$T(f)(y) = \theta(f)\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y)) \quad (f \in S(C(X, \mathbb{R})), y \in Y)$$

が成り立つ.

証明. まず Φ の形を決定する．任意に $f \in S(C(X, \mathbb{R}))$ と $y \in Y$ をとる．$|\Phi(f)(y)| = 0$ とする．このとき $\Phi(f)(y) = 0$ である．また, 補題 3.17 より $f(\sigma(y)) = 0$ が成り立つ．よって $\Phi(f)(y) = \alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))$ を得る.

$|\Phi(f)(y)| < 1$ とする．補題 3.17 より $|f(\sigma(y))| < 1$ である．式 (3.12) の x_0 を $\sigma(y)$ として $t \in \{-1, 1\}$ を定義する．補題 3.16 よりある $g \in S(C(X, \mathbb{R}))$ が存在して $f + (t - f(\sigma(y))) \in tM_{\sigma(y)} \cap f(x')M_{x'}$ が成り立つ．$h = f + (t - f(\sigma(y)))$ とおく．補題 3.17 を式 (3.15) に用いて $\|h - f\| = 1 - |\Phi(f)(y)|$ を得る．この等式と式 (3.14) を組み合わせて

$$1 - |\Phi(f)(y)| = |\Phi(h)(y) - \Phi(f)(y)| \tag{4.1}$$

を得る．$h \in tM_{\sigma(y)}$ より $|h(\sigma(y))| = 1$ であるので, 補題 3.17 より

$$|\Phi(h)(y)| = |h(\sigma(y))| = 1 \tag{4.2}$$

が成り立つ．よって式 (4.1) より $|\Phi(h)(y)|-|\Phi(f)(y)|=|\Phi(h)(y)-\Phi(f)(y)|$ を得る．この等式と $\Phi(f)(y)\neq 0$ であることから, 三角不等式の等号成立条件よりある $c\geq 0$ が存在して

$$c\Phi(f)(y)=\Phi(h)(y)-\Phi(f)(y)$$

が成り立つ．これをまとめて $\Phi(f)(y)=(c+1)^{-1}\Phi(h)(y)$ を得る．補題 3.17 と直前の等式および式 (4.2) より

$$|f(\sigma(y))|=|\Phi(f)(y)|=\frac{|\Phi(h)(y)|}{c+1}=\frac{1}{c+1}$$

が成り立つ． よって直前の二つの等式から $\Phi(f)(y)=|f(\sigma(y))|\Phi(h)(y)$ を得る． $h\in tM_{\sigma(y)}$ であるので, 式 (3.11) より $\Phi(h)\in\alpha(\sigma(y))tN_{\tau(\sigma(y))}=\alpha(\sigma(y))tN_y$ である．よって $\Phi(f)(y)=|f(\sigma(y))|\alpha(\sigma(y))t$ が成り立つので, $t=f(\sigma(y))/|f(\sigma(y))|$ より $\Phi(f)(y)=\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))$ を得る．

$|\Phi(f)(y)|=1$ とする． 補題 3.17 より $|f(\sigma(y))|=1$ である． したがって $f\in f(\sigma(y))M_{\sigma(y)}$ が成り立つ．よって式 (3.11) より $\Phi(f)\in\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))N_{\tau(\sigma(y))}=\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))N_y$ を得る．この包含関係より $\Phi(f)(y)=\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))$ が成り立つ．以上の議論より任意の $f\in S(C(X,\mathbb{R}))$ と $y\in Y$ に対して $\Phi(f)(y)=\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))$ が成り立つ．また, $\Phi\simeq T$ であるので, ある関数 $\theta\colon S(C(X,\mathbb{R}))\to\{-1,1\}$ が存在して $T=\theta\Phi$ が成り立つ．よって, 直前の二つの等式より

$$T(f)(y)=\theta(f)\Phi(f)(y)=\theta(f)\alpha(\sigma(y))f(\sigma(y))\quad(f\in S(C(X,\mathbb{R})),y\in Y)$$

を得る．

$\sigma\colon Y\to X$ が同相写像であることを示す．任意に X の開集合 U と $y_0\in\sigma^{-1}(U)$ をとる．Urysohn の補題より, ある $f_0\in S(C(X,\mathbb{R}))$ が存在して $f_0(\sigma(y_0))=1$ と $f_0(X\setminus U)=\{0\}$ が成り立つ.

$$V=\{y\in Y:|\Phi(f_0)(y)|>1/2\}\tag{4.3}$$

とおく．$\Phi(f_0)$ が Y 上で連続なので V は Y の開集合である．補題 3.17 より $|\Phi(f_0)(y_0)|=|f_0(\sigma(y_0))|=1>1/2$ が成り立つので, $y_0\in V$ である．また任意の $y\in V$ に対して, V の定義 (4.3) と補題 3.17 より $1/2<|\Phi(f_0)(y)|=|f_0(\sigma(y))|$ が成り立つので, $f_0(\sigma(y))\neq 0$ である．したがって $\sigma(y)\in U$ である．よって $V\subset\sigma^{-1}(U)$ が成り立つ．以上より, $\sigma^{-1}(U)$ が Y の開集合であることが示されたので, σ は Y 上で連続である．同様の議論により, $\tau=\sigma^{-1}$ も連続である．補題 3.5 より σ は全単射であるので, σ は同相写像である．

$\alpha\colon X\to\{-1,1\}$ が X 上で連続であることを示す．任意に $x_0\in X$ と x_0 に収束する X のネット $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ をとる．X 上の定数関数 $\mathbf{1}$ は $\mathbf{1}\in M_{x_0},\ M_{x_\gamma}$ $(\gamma\in\Gamma)$ を満たすので, 式 (3.11) より $\Phi(\mathbf{1})\in\alpha(x_0)N_{\tau(x_0)},\alpha(x_\gamma)N_{\tau(x_\gamma)}$ $(\gamma\in\Gamma)$ が成り立つ．$\Phi(\mathbf{1})$ と τ は共に連続写像であるからそれらの合成 $\Phi(\mathbf{1})\circ\tau$ も連続である．このこととネット $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ が x_0 に収

束することと組み合わせて $\alpha(x_\gamma) = (\Phi(\mathbf{1}) \circ \tau)(x_\gamma) \to (\Phi(\mathbf{1}) \circ \tau)(x_0) = \alpha(x_0)$ が成り立つ. したがって $\alpha(x_\gamma) \to \alpha(x_0)$ が成り立つので, α は x_0 で連続である. x_0 は任意だったので α は X 上で連続である.

$\square$

参考文献

[1] M. Cueto-Avellaneda, D. Hirota, T. Miura and A.M. Peralta, *Exploring new solutions to Tingley's problem for function algebras*, Quaest. Math. **46** (2023), no. 7, 1315–1346.

[2] R. Fleming and J. Jamison, Isometries on Banach spaces: function spaces, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 129, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[3] O. Hatori, S. Oi, R. Shindo-Togashi *Tingley's problem on uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl. 503, No. 2, Article ID 125346, 12p. (2021).

[4] G. Maksa and Z. Páles, *Wigner's theorem revisited*, Publ. Math. Debrecen **81** (2012), no. 1-2, 243–249.

[5] D. Tan and Y. Gao, *Phase-isometries on the unit sphere of $C(K)$*, Ann. Funct. Anal. **12** (2021), no. 1, Paper No. 15, 14pp.

[6] D. Tan, F. Zhang and X. Huang, *Phase-isometries on the unit sphere of CL-spaces*, J. Math. Anal. Appl. **527** (2023), no. 2, Paper No. 127568, 9pp.

[7] E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, J. W. Edwards, Ann Arbor, MI, 1944.