Resonance and Chaos in Stochastic Delay Differential Equations

小島瑛貴 [1], 佐藤譲 [1,2]
北海道大学 理学院数学専攻 [1] / 電子科学研究所 [2]
Eiki Kojima[1], Yuzuru Sato[1,2]
Department of Mathematics[1] / RIES [2], Hokkaido University

§1. 確率共鳴

一般にシステムが外部ノイズにさらされると, そのダイナミクスは乱され無秩序さが増す. しかし直感に反して, 外部ノイズによってシステムの秩序構造が強化されることがある. そのような雑音誘起現象の典型例として確率共鳴 (stochastic resonance)[1] があげられる. 本稿では確率共鳴について概説し, さらに時間遅延系における確率共鳴を Mackey-Glass 方程式に基づいて考察する.

確率共鳴は双安定系 (あるいは多安定系) のアトラクター間の遷移ダイナミクスのタイムスケールが, あるノイズ強度で周期外力のタイムスケールに一致する現象である. 現象論的にはあるノイズ強度で周期性を表す指標 (例えばパワースペクトルや SN 比) が最大値を取るとき, すなわち周期性が最大となる「最適ノイズ強度」が存在するとき, 確率共鳴が起きているという.

確率共鳴の標準モデルはランジュバン方程式に周期外力を加えた

$$dx = \left[x(t) - x^3(t) + \epsilon \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right] dt + \sigma dW_t \quad (W_t : \text{Wiener 過程}) \tag{1}$$

で与えられる [2]. ただし外力の振幅 ϵ は十分小さく, 系が緩和する時間に対して十分長い外力周期 T を持つと仮定する ($\epsilon \ll 1, T \gg 1$). この式は二重井戸型ポテンシャル中を運動する粒子に周期外力（右辺第 3 項）とノイズ（右辺第 4 項）を加えた系のモデルである. ノイズが無い ($\sigma = 0$) とき, この系は外力と同じ周期 T の 2 つのリミットサイクルを各

井戸底に位置するアトラクターとして持つ．ノイズが存在する $(\sigma > 0)$ と，この 2 つのリミットサイクルの間に遷移ダイナミクスが生じる．図 1 は各ノイズ強度 σ ごとのサンプルパスである．あるノイズ強度で 2 つのリミットサイクルの間の遷移ダイナミクスが周期 T になることが見て取れる．ノイズが小さいときいずれかのリミットサイクルに沿ったランダム運動を示し，他方のリミットサイクルへ遷移することはほとんど起こらない．逆にノイズが非常に大きい場合は，2 つのリミットサイクルの間をランダムに遷移する．このように確率共鳴はマルチアトラクター系で生じる雑音誘機起現象として理解される．

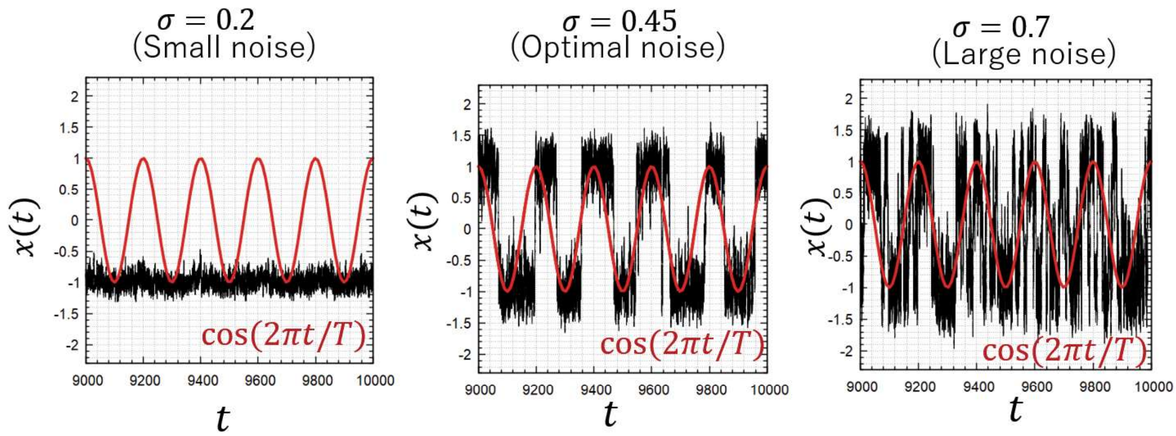

図 1　標準モデル (1) の各ノイズ強度におけるサンプルパス．黒線は $x(t)$ の時系列，赤線は周期 T の振動の具体例 $\cos(2\pi t/T)$ を表す．パラメーターは $\epsilon = 0.1, T = 200$ である．$\sigma = 0.45$ のとき確率共鳴が生じている．

図 1 の例では $\sigma = 0.45$ のとき共鳴が生じている．この現象においてはある強度の確率的摂動を与えたときに周期性が最大となるため、ある振動数の外力を与えたときに周期性が最大となる通常の意味での「共鳴」とのアナロジーで，「確率共鳴」と呼ばれている．周期外力が無い自励系においても，不安定なリミットサイクルが周期外力のかわりを果たし，類似のタイムスケールマッチングが観察されることがあり，この現象はコヒーレンス共鳴 (coherence resonance)[3] と呼ばれる．ここではこのようなノイズによって誘起されるタイムスケールマッチングを総称して確率共鳴と呼ぶこととする．

§2. 確率 Mackey-Glass 方程式における確率共鳴

時間遅延系においてもノイズと遅延フィードバックの相互作用によって確率共鳴が生じることが知られている [4, 5, 6]．時間遅延系では高次元のカオスが生じることが古くから

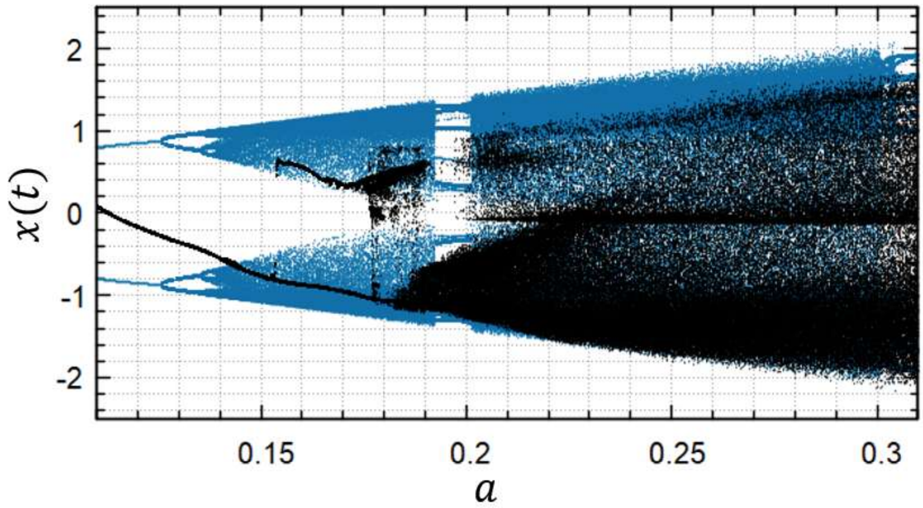

図 2　SMG(2) の決定論の場合 ($\sigma = 0$, 青) とノイズが存在する場合 ($\sigma = 0.15$, 黒) の分岐図．後者はプルバックアトラクターのある時刻におけるスナップショットを $x(t)$ 軸に射影したものを a の関数として描画した．他のパラメーターは $b = 0.1, c = 10, \tau = 90$ である．

知られており, 実際に低次元のカオス的アトラクターをベースとした確率共鳴も報告されている [6]. 一方で確率共鳴の動力学的特性についての研究は非常に少ない.

カオスが生じる遅延系として Mackey-Glass 方程式 (MG) がよく知られている．MG は造血のモデル [7] として導入され, 遅延 τ の増大に伴ってアトラクターの次元も大きくなることが知られている [8]．このため MG は高次元カオスを示す最小の力学系モデルとしてよく引き合いに出される.

ここで, MG に加法ノイズ項を加えた確率 Mackey-Glass 方程式 (SMG)

$$dx = \left[\frac{ax(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)} - bx(t)\right]dt + \sigma dW_t \quad (W_t : \text{Wiener 過程}) \tag{2}$$

を考える．ここでは $b = 0.1, c = 10, \tau = 90$ に固定し, 遅延フィードバックの強度 $a > 0.1$ とノイズ強度 $\sigma \geq 0$ をパラメーターとする．決定論 ($\sigma = 0$) の場合, 原点対称なアトラクターが 2 つ存在し, 非線形パラメータ a を大きくしていくとそれらは固定点, リミットサイクル, カオス, そして高次元カオスというように分岐していく (図 2)．ノイズが存在する場合 ($\sigma > 0$), これらのアトラクターはつながってグローバルなランダムアトラクター [9] を構成する.

我々は決定論アトラクターが固定点, リミットサイクル, カオス, 高次元カオスのいずれの場合においても確率共鳴が生じることを発見した．例えば $a = 0.14$ のとき, カオス

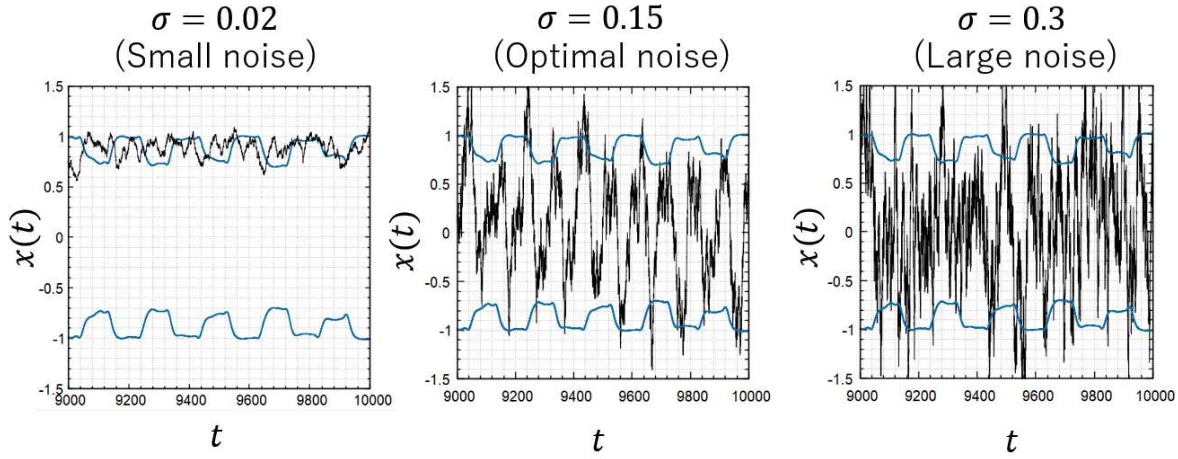

図 3　SMG(2) の各ノイズ強度のサンプルパス．黒線は $x(t)$ の時系列, 青線は決定論アトラクターを表す．パラメーターは $a = 0.14, b = 0.1, c = 10, \tau = 90$ である．

的アトラクターの間の遷移ダイナミクスがあるノイズ強度で周期性を持つ (図 3)．このとき遷移ダイナミクスの周期はおおよそ τ に一致する．アトラクターのサイズが小さい場合は, ベースとなった決定論アトラクターのダイナミクスと遷移ダイナミクスのスケールが分離し, 古典的な確率共鳴と同等の現象となる．一方でアトラクターのサイズが大きい ($a = 0.3$) 場合は確率カオスを内包する非自明な共鳴現象となっていることがわかってきた．

§3. 結び

本稿では時間遅延系において観察される確率共鳴現象を Mackey-Glass 方程式を例に概説した．時間遅延系は形式的に無限次元系であり, 高次元カオスをはじめ多様なダイナミクスが生じる．それらのダイナミクスと確率共鳴がどのように関係するかは興味深い問題である．近年ランダム力学系理論の発展に伴い確率的な力学系においてもその動力学的特性が議論できるようになってきており, ランダム力学系の観点から高次元の確率共鳴現象をとらえ直すことが求められている．

参考文献

[1] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70:223–287, Jan 1998.

[2] R Benzi, A Sutera, and A Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(11):L453, nov 1981.

[3] Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.*, 78:775–778, Feb 1997.

[4] Toru Ohira and Yuzuru Sato. Resonance with noise and delay. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2811–2815, Apr 1999.

[5] L. S. Tsimring and A. Pikovsky. Noise-induced dynamics in bistable systems with delay. *Phys. Rev. Lett.*, 87:250602, Nov 2001.

[6] C. Masoller. Noise-induced resonance in delayed feedback systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:034102, Jan 2002.

[7] Michael C. Mackey and Leon Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197(4300):287–289, 1977.

[8] J. Doyne Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(3):366–393, 1982.

[9] Mickaël D. Chekroun, Eric Simonnet, and Michael Ghil. Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(21):1685–1700, 2011.